Najważniejsze równania różniczkowe zwyczajne i najważniejsze bryły geometryczne

Praca wykonana w ramach grantu KBN No 2 P03A 010 22

Henryk ŻOŁĄDEK, Warszawa

1. Wstęp. Niebezpiecznie jest nazywać pewne obiekty matematyczne najważniejszymi. Niemniej dwa bardzo szczególne równania różniczkowe zwyczajne przyjęto uważać za takie. Najważniejsze równanie liniowe to *równanie hipergeometryczne Gaussa*

$$t(t-1)\ddot{x} + [(\alpha+\beta+1)t-\gamma]\dot{x} + \alpha\beta x = 0. \tag{1}$$

a najważniejsze równanie nieliniowe to *równanie Painlevé VI*

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-t}\right)\dot{x}^2 - \left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t-1}+\frac{1}{x-t}\right)\dot{x} \\ &+ \frac{x(x-1)(x-t)}{t^2(t-1)^2}\left[\alpha+\beta\frac{t}{x^2}+\gamma\frac{t-1}{(x-1)^2}+\delta\frac{t(t-1)}{(x-t)^2}\right].\end{aligned} \tag{2}$$

Forma (2) równania Painlevé VI jest dosyć odstraszająca. Niedawno Yu. Manin [Man] przekształcił je do znacznie strawniejszej postaci

$$\frac{d^2z}{d\tau^2} = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \sum_{j=0}^{3} \alpha_j \mathcal{P}'_z(z+T_j/2,\tau),$$

gdzie $\mathcal{P}(z,\tau) = \frac{1}{z^2} + \sum_{(m,n)\neq(0,0)}\left[\frac{1}{(z+m\tau+n)^2} - \frac{1}{(m\tau+n)^2}\right]$ jest funkcją Weierstrassa związaną z krzywą eliptyczną $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z})$, liczby $T_0 = 0, T_1 = 1, T_2 = \tau, T_3 = 1+\tau$ są okresami a parametry α_j są definiowane przez $(\alpha_0,\ldots,\alpha_3) = (\alpha,-\beta,\gamma,1/2-\delta)$.

Większość liniowych równań fizyki matematycznej (Legendre'a, Bessela, Hermite'a, Laguerre'a) stanowią szczególne przypadki równania (1).

Równanie (2) pojawiło się w dosyć osobliwy sposób. Otóż P. Painlevé postanowił sklasyfikować równania drugiego rzędu z wymierną prawą stroną, których ogólne rozwiązania nie mają ruchomych osobliwości. (Na przykład, równanie $\dot{x} = 1/x$ ma rozwiązania $x(t) = \sqrt{2t+C}$ z algebraiczną osobliwością w ruchomym punkcie $t = -C/2$. Równanie $\dot{x} = x^2$ ma rozwiązania $x = 1/(C-t)$ z biegunem w $t = C$, który nie jest traktowany jako osobliwość, bo $x(t)$ jest holomorficzne jako odwzorowanie w sferę Riemanna $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\cup\infty$. Równanie $\dot{x} = x$ ma rozwiązania $x = Ce^t$ z nieruchomą osobliwością w $t = \infty$.) Początkowa klasyfikacja Painlevé (14 przypadków) okazała się niepełna i dopiero jego uczeń B. Gambier [Gam] ją dokończył. Zawiera ona 50 przypadków, przy czym 44 odpowiednich równań okazało się całkowalnymi w znanych funkcjach. Pozostałe 6 równań, nazwanych potem Painlevé I – Painlevé VI, okazały się istotnie nowymi i ich rozwiązania tworzą nową klasę funkcji przestępnych. Równania Painlevé I – Painlevé V otrzymuje się z Painlevé VI przez odpowiednie przejścia graniczne i dlatego nie warto ich tutaj wypisywać. Równania Painlevé ostatnio znajdują coraz więcej zastosowań (symetria lustrzana, losowe permutacje, model Isinga).

Celem tego artykułu jest zademonstrowanie pięknych związków tych równań z teorią brył regularnych, które można uważać za najważniejsze bryły geometryczne.

2. Grupa monodromii równania hipergeometrycznego. Umówmy się, że zarówno zmienna konfiguracyjna x jak i czas t w równaniu (1) są zespolone. Zatem rozwiązania $x = \phi(t)$ są funkcjami holomorficznymi, t.j. lokalnie. W szczególności, jedno takie rozwiązanie $x = \phi_1(t)$ jest zadane *szeregiem hipergeometrycznym*

$$F(\alpha,\beta;\gamma;t) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma\cdot 1!}t + \frac{\alpha(\alpha-1)\beta(\beta-1)}{\gamma(\gamma-1)\cdot 2!}t^2 + \ldots,$$

zbieżnym w kole $|t| < 1$. Drugie, liniowo niezależne rozwiązanie można wybrać w postaci $\phi_2(t) = t^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1; 2-\gamma; t)$ (każde inne rozwiązanie jest kombinacją liniową tych dwu). Jak widać ϕ_2 ma osobliwość w punkcie $t = 0$, czego powodem jest fakt, że prawa strona dla $\ddot{x} = \ldots$ ma tam biegun. Inne punkty osobliwe to $t = 1$ i $t = \infty$.

Rozwiązania $\phi(t)$ można przedłużać wzdłuż dróg $\delta \subset \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Przy tym dostaje się wielowartościowe funkcje holomorficzne. W szczególności, przedłużenie ϕ wzdłuż zamkniętej pętli δ (o początku i końcu $t_0 \neq 0, 1$) prowadzi do nowej funkcji $\tilde{\phi}$, która też jest rozwiązaniem, ale na ogół różnym od ϕ. Na przykład, przedłużenie $\phi_2(t)$ wzdłuż małej pętli wokół $t = 0$ prowadzi do $\tilde{\phi}_2(t) = e^{2\pi i(1-\gamma)}\phi_2(t)$.

Dla ustalonej bazy (ψ_1, ψ_2) przestrzeni rozwiązań w otoczeniu t_0 i pętli $\delta \in \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}, t_0)$ definiujemy *macierz monodromii* M_δ za pomocą wzoru $(\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2) = (\psi_1, \psi_2)M_\delta$. Inny wybór bazy prowadzi do sprzężonej macierzy $M'_\delta = BM_\delta B^{-1}$.

Wygodnie jest pracować z tzw. *funkcją Schwarza*

$$u(t) = \frac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)}, \quad t \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}.$$

Monodromia funkcji u jest zadana za pomocą przekształcenia Möbiusa

$$u \to \mathcal{M}_\delta(u) = \frac{au + c}{bu + d},$$

jeśli $M_\delta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Przekształcenia $\mathcal{M}_\delta$ tworzą *grupę monodromii Mon*(u), którą nazywa się także grupą monodromii równania Gaussa. Jest to podgrupa grupy $PSL(2, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : ad - bc = 1 \right\} / \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Grupa *Mon*$(u)$ w istotny sposób zależy od parametrów α, β, γ, na ogół jest nieskończona i jej opis nie jest prosty.

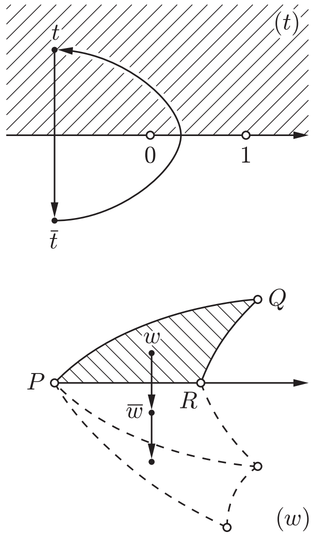
H. Schwarz [Schw] zainteresował się sytuacją, gdy równanie (1) rozwiązuje się za pomocą funkcji algebraicznych. To znaczy, że ϕ_1 (odpowiednio ϕ_2) spełnia równanie algebraiczne $P(\phi_1, t) = 0$. W szczególności, funkcja Schwarza jest funkcją algebraiczną. W istocie nietrudno pokazać (wyliczając wrońskian), że algebraiczność $u(t)$ jest wystarczająca do algebraiczności rozwiązań.

Ogólna funkcja algebraiczna $v(t)$ jest oczywiście wielowartościowa, ale może tych wartości przyjmować tylko skończenie wiele. To oznacza, że jej grupa monodromii *Mon*(v) jest skończona; jest to podgrupa grupy permutacji zbioru jej wartości nad punktem t_0. W przypadku funkcji Schwarza skończoność *Mon*(u) prowadzi do określonych warunków na parametry α, β, γ. Na przykład, dla $u = \phi_1/\phi_2$ monodromia wokół $t = 0$, $\mathcal{M}_0(u) = e^{2\pi i(\gamma-1)}u$, jest skończona (i cykliczna) tylko wtedy gdy $e^{2\pi i(\gamma-1)}$ jest pierwiastkiem z 1, t.j. gdy liczba $\lambda := 1 - \gamma$ jest wymierna. Podobnie, rozważając monodromie $\mathcal{M}_1$ i $\mathcal{M}_\infty$ wokół $t = 1$ i $t = \infty$ (w odpowiednich bazach) pokazuje się, że liczby $\mu := \beta - \alpha$ i $\mu := \gamma - \alpha - \beta$ są wymierne.

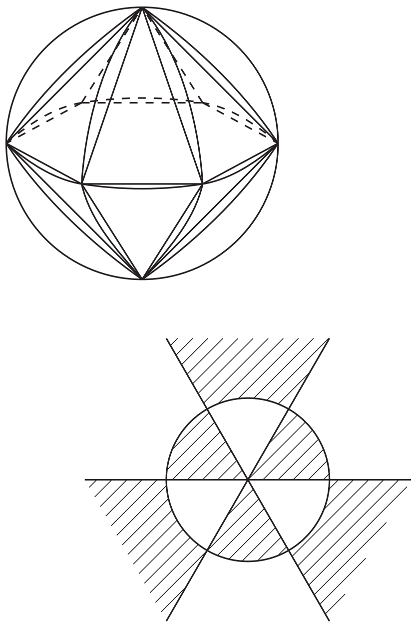
Niestety skończoność monodromii wokół punktów osobliwych jeszcze nie zapewnia skończoności całej grupy monodromii. Ale istnieje proste globalne przedstawienie tej grupy. Opiera się ono na następującym wzorze Eulera

$$F(\alpha, \beta; \gamma; t) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 f(s, t)ds,$$

gdzie $f(s, t) = s^{\beta-1}(1-s)^{\gamma-\beta-1}(1-ts)^{-\alpha}$. Inne, niezależne, rozwiązanie równania (1) można wybrać w postaci $\int_{-\infty}^0 f(s, t)ds$ lub w postaci $\int_1^\infty f(s, t)ds$. Zakładamy, że powyższe całki są zbieżne, chociaż można sobie poradzić również w rozbieżnych przypadkach (patrz [BaEr]).



Rys. 1



Rys. 2

Wybierzmy funkcję Schwarza w postaci

$$w(t) = \int_1^\infty f / \int_0^1 f.$$

Przy tym zakładamy, że początkowo t leży w górnej półpłaszczyźnie $\mathbf{H} = \{\mathrm{Im} t > 0\}$. Można ją przedłużyć przez półprostą $\{t < 0\}$ do dolnej półpłaszczyzny z własnością $w(\bar{t}) = \overline{w(t)}$. Zatem obraz półprostej $t < 0$ jest prostym odcinkiem $PR \subset \mathbb{R}$ (Rysunek 1). Obraz $\Delta = w(\mathbf{H})$ całej półpłaszczyzny jest trójkątem krzywoliniowym. Jego pozostałe dwa boki są łukami okręgów, czyli obrazami prostych odcinków przy przekształceniach Möbiusa związanych z innymi wyborami bazy rozwiązań. Przy tym sprzężeniu (związanemu z przedłużeniem przez $(\infty, 0)$) odpowiadają inwersje względem łuków PQ i QR. Monodromia $w \to \mathcal{M}_0(w)$ wokół $t = 0$ jest złożeniem inwersji względem łuku PR i względem obrazu łuku PQ. To pokazuje, że kąt $\angle P$ wynosi $\pi(1 - \gamma) = \pi\lambda$. Podobie przedstawiamy monodromie wokół $t = 1$ i $t = \infty$ i wnioskujemy, że grupa $Mon(w)$ jest podgrupą indeksu 2 w grupie generowanej przez inwersje względem boków trójkąta Δ o kątach $\pi\lambda, \pi\mu, \pi\nu$.

Utożsamiając $\mathbb{C} \cup \infty$ ze sferą S^2 (za pomocą rzutu stereograficznego z północnego bieguna), trójkąt Δ możemy traktować jako trójkąt sferyczny. Jego obrazy przy inwersjach tworzą pewną mozaikę sfery; przy tym obrazy mogą się przecinać, nakładać, itp. Grupa $Mon(w)$ jest skończona tylko wtedy, gdy odpowiadająca jej mozaika jest skończona. Wtedy $Mon(w)$ jest utożsamiana ze skończoną podgrupą grupy $SO(3)$ obrotów sfery, a sama mozaika jest indukowana przez odpowiednią bryłę regularną wpisaną w sferę. Skończone podgrupy $SO(3)$ są następujące: grupa dwuścienna obrotów n-kąta foremnego (rysunek 2), grupa obrotów czworościanu foremnego, grupa obrotów sześcianu i grupa obrotów dwunastościanu foremnego.

Wykorzystując tę klasyfikację i uwzględniając możliwość nakładania się obrazów Δ, Schwarz podał pełną klasyfikację trójek (λ, μ, ν) w obszarze $0 \le \lambda, \mu, \nu, \lambda + \mu, \mu + \nu, \nu + \lambda \le 1$ (inne przypadki sprowadzają się do tego, patrz [BaEr]), dla których równanie hipergeometryczne rozwiązuje się w funkcjach algebraicznych. Ta klasyfikacja (15 przypadków) jest przedstawiona w poniższej tabeli. Pierwszy przypadek stanowi nieskończoną serię i odpowiada grupie dwuściennej. Następne dwa przypadki odpowiadają grupie obrotów czworościanu, kolejne dwa są związane z sześcianem a pozostałe – z dwunastościanem. W pierwszych pięciu przypadkach grupa $Mon(w)$ jest rozwiązalna i rozwiązania wyrażają się w pierwiastnikach, np. $x = (\sqrt(t) + \sqrt{t-1})^{p/n}$ dla przypadku dwuściennego. W pozostałych przypadkach $Mon(w)$ jest nierozwiązalna, równa $A(5)$.

$$\begin{gathered}
\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{p}{n}\right), \\
\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \ \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \\
\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right), \ \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \\
\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right), \ \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \ \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right), \ \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right), \ \left(\frac{3}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right), \\
\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right), \ \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right), \ \left(\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right), \ \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{3}\right), \ \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{3}\right).
\end{gathered}$$

3. Grupa warkoczy w działaniu na Painlevé VI. Opiszemy wyniki pracy B. Dubrovina i M. Mazzocco [DuMa], gdzie sklasyfikowano równania Painlevé VI mające przynajmniej jedno algebraiczne rozwiązanie. Przy tym ograniczono się 1-parametrową rodziną (4-parametrowej rodziny (2)) PVI_μ definiowaną przez

$$\alpha = \frac{1}{2}(2\mu - 1)^2, \ \beta = \gamma = 0, \ \delta = \frac{1}{2}.$$

(Autorzy motywują to ograniczenie koniecznością zachowania rozsądnych rozmiarów pracy.)

Równanie Painlevé VI jest związane z monodromią pewnego liniowego zagadnienia różniczkowego, tylko w trochę inny sposób niż w przypadku równania Gaussa. Rozważa się 2-wymiarowy układ

$$\frac{dY}{dz} = A(z)Y, \quad z \in \mathbb{C},\ Y \in \mathbb{C}^2, \tag{3}$$

gdzie macierz $A(z)$ ma postać

$$A = \frac{A_1}{z-u_1} + \frac{A_2}{z-u_2} + \frac{A_3}{z-u_3}$$

i macierze A_j zależą od u_1, u_2, u_3 (oraz od parametru μ). Układ (3) ma punkty osobliwe $z = u_1, u_2, u_3, \infty$. Dla zadanej bazy $\Phi_1(z), \Phi_2(z)$ przestrzeni rozwiązań, tworzącej macierz fundamentalną $\mathcal{F}(z) = (\Phi_1, \Phi_2)$, definiujemy macierze monodromii M_1, M_2, M_3, M_∞ odpowiadające rezultatom $\mathcal{F} \to \mathcal{F}M_\sharp$ przedłużenia analitycznego wzdłuż pętli wokół $z = u_1, u_2, u_3, \infty$. Ustalamy specjalną macierz fundamentalną $\mathcal{F}_\infty$, tak aby $\mathcal{F}_\infty(z) = \begin{pmatrix} z^{-\mu} & 0 \\ 0 & z^\mu \end{pmatrix}(1 + O(1/z))$ przy $z \to \infty$; przy tym zakładamy, że

$$A_\infty := -A_1 - A_2 - A_3 = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix}.$$

Wtedy macierz $M_\infty = \begin{pmatrix} \exp(2\pi i\mu) & 0 \\ 0 & \exp(-2\pi i\mu) \end{pmatrix}$ nie zależy od u_j, tzn. jest stała.

Naturalne jest pytanie o warunki na macierze $A_j = A_j(u_1, u_2, u_3)$ aby również pozostałe macierze $M_{1,2,3}$ były stałe (problem izomonodromiczności deformacji). L. Schlesinger podał te warunki w postaci pewnych równań różniczkowych cząstkowych, których nie będę wypisywał. Powiem tylko, że równania Schlesingera redukują się do równania Painlevé VI, zaś w przypadku gdy dodatkowo ograniczymy się przypadkiem nilpotentnych macierzy A_j, t.j.

$$A_j^2 = 0, \quad j = 1, 2, 3,$$

dostaje się równanie PVI_μ. Odpowiednie wyliczenia są koszmarne. Podstawowe relacje wiążące dane w (3) ze zmiennymi w (2) są następujące:

$$t = \frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1}, \quad x = \frac{q - u_1}{u_3 - u_1},$$

gdzie q jest pierwiastkiem równania algebraicznego $a_{12}(q) = 0$ przy $A(z) = \begin{pmatrix} a_{11}(z) & a_{12}(z) \\ a_{21}(z) & a_{22}(z) \end{pmatrix}$.

Zatem, znając macierze A_j będziemy znali rozwiązanie równania PVI_μ. Z drugiej strony, macierze A_j można odtworzyć ze znajomości macierzy monodromii M_j. Jest to treścią głębokiego twierdzenia (21-szy problem Hilberta), nad którym nie będziemy się zatrzymywać. Dalej będziemy pracować tylko z macierzami M_j.

Skoro A_j są nilpotentne, to M_j są unipotentne, tzn. $\mathrm{tr} M_j = 2$ i $\det M_j = 1$. Ponadto mamy $M_3 M_2 M_1 = M_\infty^{-1}$. Okazuje się, że ogólna postać trójki (M_1, M_2, M_3) spełniającej powyższe warunki jest zadana wzorami

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -x_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x_1 & 1 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 1 + x_2x_3/x_1 & -x_2^2/x_1 \\ x_3^2/x_1 & 1 - x_2x_3/x_1 \end{pmatrix},$$

przy czym

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2x_3 = 4\sin^2 \pi\mu. \tag{4}$$

Teraz na arenę wkracza grupa warkoczy B_3 (z trzech kosmyków), którą można zdefiniować jako $\pi_1((\mathbb{C}^3 \setminus diag)/S(3))$, gdzie

$diag = \{(u_1,u_2,u_3):(u_1-u_2)(u_2-u_3)(u_3-u_1)=0\}$ jest sumą diagonali a $S(3)$ oznacza grupę symetryczną. Grupa warkoczy jest generowana przez dwie pętle: β_1, wzdłuż której punkty u_1 i u_2 przemieszczają się aby w rezultacie zamienić się miejscami, i β_2, prowadząca do zamiany $u_2 \leftrightarrow u_3$. Zachodzi znana relacja $\beta_1\beta_2\beta_1 = \beta_2\beta_1\beta_2$.

Grupa B_3 działa na układ liniowy (3) poprzez deformacje biegunów i w rezultacie na macierze monodromii:

$$\beta_1 : M_1 \to M_2,\ M_2 \to M_2M_1M_2^{-1},\ M_3 \to M_3,$$

$$\beta_2 : M_1 \to M_1,\ M_2 \to M_3,\ M_3 \to M_3M_2M_3^{-1}.$$

W zmiennych (x_1,x_2,x_3) dostaje się bardzo proste działanie:

$$\begin{array}{ll} \beta_1 : (x_1,x_2,x_3) \to & (-x_1, x_3 - x_1x_2, x_2), \\ \beta_2 : (x_1,x_2,x_3) \to & (x_3, -x_2, x_1 - x_2x_3). \end{array} \tag{5}$$

Grupa warkoczy pełni w równaniu Painlevé analogiczną rolę do roli grupy monodromii w równaniu Gaussa. Warunek algebraiczności danego rozwiązania równania Painlevé tłumaczy się na skończoność orbity punktu (x_1,x_2,x_3) wzgędem działania grupy B_3. (Niestety algebraiczność jednego rowiązania PVI_μ jeszcze nie implikuje algebraiczności innych rozwiązań.) Nasze zadanie sprowadza się do klasyfikacji trójek (x_1,x_2,x_3) spełniających równanie (4) i charakteryzujących się skończonymi B_3-orbitami.

Przejdźmy do zmiennych r_1,r_2,r_3 z przedziału $[0,1]$ zadanych tożsamościami $x_j = -2cos\pi r_j$ (analogia do zamiany $\alpha,\beta,\gamma \to \lambda,\mu,\nu$). Okazuje się, że liczby r_j muszą być wymierne. Na przykład, przekształcenie $\beta_1^2 : (x_1,x_2,x_3) \to (x_1, x_2 + x_1x_3 - x_1^2x_2, x_3 - x_1x_2)$ przy ustalonym x_1 jest równoważne obrotowi o kąt $\pi + 2\pi r_1$ w płaszczyźnie (x_2,x_3).

Warunkiem koniecznym skończoności orbity trójki (x_1,x_2,x_3) z wymiernymi r_1,r_2,r_3 jest: $\beta(x_1,x_2,x_3) = (-2\cos\pi r_1', -2\cos\pi r_2', -2\cos\pi r_3')$ dla pewnych wymiernych $r_i' = r_i'(\beta)$ i dowolnego $\beta \in B_3$. Problem klasyfikacji takich wymiernych trójek (r_1,r_2,r_3) prowadzi do wymiernych rozwiązań równań trygonometrycznych $\cos\pi r_k' = \cos\pi r_k + 2\cos\pi r_i \cos\pi r_j$ (dla różnych permutacji (ijk) indeksów $1,2,3$), lub (równoważnie) równań

$$\cos 2\pi\phi_1 + \cos 2\pi\phi_2 + \cos 2\pi\phi_3 + \cos 2\pi\phi_4 = 0, \quad \phi_j \in \mathbb{Q}.$$

Analogiczne równania były badane przez P. Gordana [Gor]. Dubrovin i Mezzocco posłużyli się techniką Gordana i pokazali, że istnieje dokładnie pięć skończonych orbit działania B_3. Każda taka orbita zawiera punkt $(r_1,r_2,r_3) \sim (x_1,x_2,x_3)$ z poniższej listy:

$$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right),\ \left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right),\ \left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{5}\right),\ \left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{5}\right),\ \left(\frac{1}{2},\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right). \tag{6}$$

Poszczególne przypadki odpowiadają wartościom $-\frac{1}{4},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{2}{5},\ -\frac{1}{5},\ -\frac{1}{3}$ parametru μ.

Nieliniowe działanie (5) grupy B_3 można zrealizować przy pomocy pewnego działania liniowego. Weźmy przestrzeń $V = \mathbb{R}^3$ z symetryczną dwuliniową formą zadaną macierzą

$$g = \begin{pmatrix} 2 & x_1 & x_3 \\ x_1 & 2 & x_2 \\ x_3 & x_2 & 2 \end{pmatrix},$$

t.j. $(e_i,e_i) = 2, (e_1,e_2) = x_1$, itd. Definiujemy odbicia R_i w V, $R_iv = v - (e_i,v)e_i$. Mamy

$$R_1 = \begin{pmatrix} -1 & -x_1 & -x_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x_1 & 1 & -x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_3 & -x_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Grupa warkoczy działa na odbiciach

$$\beta_1 : (R_1, R_2, R_3) \to (R_2, R_2 R_1 R_2, R_3),\ \beta_2 : (R_1, R_2, R_3) \to (R_1, R_3, R_3 R_2 R_3);$$

to działanie zgadza się z (5).

Grupa G generowana przez odbicia $R_{1,2,3}$ jest skończoną podgrupą grupy $O(V, g)$ przekształceń liniowych zachowujących iloczyn skalarny g. Są to grupy symetrii pewnych figur regularnych. Pierwsza trójka z listy (6) odpowiada grupie symetrii regularnego czworościanu, druga – ośmiościanu, a pozostałe trzy trójki odpowiadają różnym wyborom generatorów grupy symetrii dwudziestościanu. Faktycznie, ostatnie dwie trójki można związać odpowiednio z dwudziestościanem wielkim i z dwunastościanem wielkim.

W pracy [DuMo] są podawane odpowiednie algebraiczne rozwiązania PVI_μ. Na przykład, w przypadku czworościanu mamy takie rozwiązanie zadane w postaci parametrycznej:

$$t = \frac{(s-1)^3(1+3s)}{(s+1)^3(1-3s)},\ x = \frac{(s-1)^2(1+3s)(9s^2-5)^2}{(1+s)(25-207s^2+1539s^4+243s^6)}.$$

Literatura

[BaEr] H. Bateman and A. Erdélyi, *Higher transcendental functions*, v. 1, McGraw-Hill Book Comp., New York, 1953.

[DuMa] B. Dubrovin and M . Mazzocco, *Monodromy of certain Painlevé-VI transcendents and reflection groups*, Invent. Math. 141 (2000), 55–147.

[Gam] B. Gambier, *Sur les équations différentielles du second ordre et du prémier degré dont l'integrale générale est á points critiques fixes*, C. R. Acad. Sci. Paris 142 (1906), 266–269.

[Gor] P. Gordan, *Über endliche Gruppen linearer Transformationen einer Veränderlichen*, Math. Ann. 12 (1877), 23–46.

[Man] Yu. I. Manin, *Sixth Painlevé equation, universal elliptic curve and mirror of* $\mathbb{P}^2$, in: "Geometry of differential equations", Amer. Math. Soc. Transl. (2) 186 (1998), 131–151.

[Schw] H. A. Schwarz, *Über diejenigen Falle in welchen die Gaussche hypergeometrische Reihe eine algebraische Funktion ihres vierten Elements darstellt*, J. reine angew. Math. 75 (1873), 292–335.