Zapomniane książki

Twierdzenia matematyczne nie poddają się próbie czasu, zmienia się co najwyżej język, w jakim są formułowane. Inaczej bywa z książkami matematycznymi. Wiele z nich z czasem traci swoją aktualność – pisane były na doraźne potrzeby; zmienia się spojrzenie na przedstawianą dziedzinę, zmieniają się zainteresowania. Są jednak i takie książki, które, mimo upływającego czasu, mimo nieco już archaicznego języka są nadal interesujące. Chętnie do nich zaglądamy, wykorzystujemy pomysły w nich zawarte, powołujemy się na nie.

W czasach swej największej świetności wydawnictwo Prószyński i S-ka postanowiło wydać ponownie najciekawsze dawne podręczniki do nauki matematyki, a także niektóre książki popularyzujące matematykę. W ten sposób po latach czytelnicy znów mogli poznać ciekawy podręcznik z geometrii Zydlera. W języku polskim ponownie została wydana też niezwykła książka Couranta i Robbinsa *Co to jest matematyka.* Jej pierwsze polskie wydanie ukazało się w 1967 roku; pierwsze wydanie w języku angielskim pochodzi jeszcze z lat czterdziestych XX wieku. Od tego czasu musiało upłynąć ponad trzydzieści lat, żeby polski czytelnik znów miał okazję zapoznać się z tą fascynującą książką.

Istnieją jednak książki, które nie miały tego szczęścia, że jakieś wydawnictwo zainteresuje ich wznowieniem. Wydawanie książek matematycznych w czasach, gdy liczy się przede wszystkim szybki zysk i duży nakład, jest działalnością niepopularną i charytatywną. Dlatego nawet bardzo ciekawe książki popularyzujące matematykę – klasyka literatury światowej – mają niewielką szansę na wznowienie.

Jedną z takich książek jest *Geometria poglądowa* Davida Hilberta i Stephana Cohn-Vossena. Oryginał ukazał się w 1932 roku i powstał na bazie wykładu Hilberta z lat 1921–22. Polski przekład został wydany przez PWN w 1956 roku. Mogłoby się wydawać, że tak leciwe wykłady są już archaiczne i nie warto obecnie poświęcać im czasu. A jednak, gdy przejrzymy dokładniej książkę, to przekonamy się, że jest to bardzo piękny przegląd różnych dziedzin geometrii zawierający wiele ciekawych idei przybliżających trudne pojęcia klasyczne i takie, które stały się podstawą teorii rozwijających się bujnie w XX wieku.

Najpierw omawiane są krzywe i powierzchnie drugiego stopnia, a więc obiekty doskonale znane i wydawałoby się, że niczego nowego nie można się o nich dowiedzieć. Jednak współczesny ich opis w języku algebry liniowej i form kwadratowych gubi gdzieś zadziwiające geometryczne własności tych tworów. W *Geometrii poglądowej* położony jest nacisk właśnie na te geometryczne własności oraz ich zastosowania. Zresztą zastosowania podkreślane są na każdym kroku w całej książce; Autorzy chętnie nam przypominają, że nawet najbardziej abstrakcyjne pojęcia mają swoje praktyczne umocowania. Dalej dyskutowane są „prawidłowe układy punktowe”. Pod tą nazwą kryje się teoria grup krystalograficznych, teoria badająca symetrie szlaczków, mozaik i przestrzennych sieci krystalograficznych. To zadziwiające, że nieskończona mnogość mozaik cieszących oko poddaje się prawom dającym się opisać za pomocą skończonej ilości grup symetrii.

Rozdział „Konfiguracje” wprowadza nas w świat geometrii rzutowej wyrosłej z teorii perspektywy. W oryginalny sposób przedstawione są najważniejsze twierdzenia geometrii rzutowej oraz ich wzajemne powiązania. Przy okazji omówione są wielościany foremne i ich wielowymiarowe odpowiedniki.

Niemal jedna trzecia książki poświęcona jest geometrii różniczkowej. Dziś trudno wyobrazić sobie wykład elementów tej dziedziny bez wiązek wektorowych, tensorów i przestrzeni włóknistych głównych. A przecież niemal wszystkie podstawowe pojęcia geometrii różniczkowej mają przejrzystą interpretację geometryczną. Autorzy, choć bardzo oszczędnie posługują się wzorami, potrafią sugestywnie opisać własności różniczkowe krzywych i powierzchni. Szczególnie cenne są zaproponowane intuicje dotyczące pojęcia krzywizny Gaussa i modeli różnych geometrii nieeuklidesowych.

Swoje miejsce w *Geometrii poglądowej* znalazła również topologia. Gdy powstawała książka, topologia była dziedziną bardzo młodą nabierającą dopiero coraz większego znaczenia. Autorzy położyli nacisk na ukazanie jej geometrycznych korzeni. Czytelnik ma okazję poznać charakterystykę Eulera i jej zastosowania. Pięknie opisane są przykłady różnych powierzchni, w szczególności powierzchni jednostronnych, w tym rozmaite zanurzenia płaszczyzny rzutowej w przestrzeni trójwymiarowej.

Książka napisana jest jasnym, przystępnym językiem, a poglądowość została po mistrzowsku pogodzona z precyzją określeń i rozumowań. Wykład Hilberta jest znakomitym przykładem, jak abstrakcyjną wiedzę można przekazywać w przystępny sposób. Przeglądając dokładniej książkę zauważymy, że wiele pomysłów i przykładów podawanych przez współczesnych autorów swoje źródło ma właśnie w *Geometrii poglądowej.*

Mniej więcej w tym samym czasie co książka Hilberta i Cohn-Vossena powstało inne bardzo ciekawe dzieło popularyzujące matematykę – książka *O liczbach i figurach* Rademachera i Toeplitza. Dwaj znakomici matematycy Hans Rademacher i Otto Toeplitz opowiadają o różnych ciekawych problemach z elementarnej teorii liczb i geometrii. Pokazują, jak problemy jednej dziedziny ściśle wiążą się z problemami drugiej. Czytelnik może się też przekonać, jak proste z pozoru zadania mogą prowadzić do stawiania pytań, na których odpowiedzi wymagają rozwinięcia trudnych teorii. Cenne są też liczne uwagi dotyczące pochodzenia problemów i ludzi, którzy się nimi zajmowali.

Zagadnienie Waringa, problem czterech barw, Wielkie Twierdzenie Fermata, konstrukcje za pomocą samego cyrkla, problemy dotyczące rozmieszczenia liczb pierwszych, twierdzenie Fagnano to tylko nieliczne z haseł omawianych w książce Rademachera i Toeplitza. Jest to prawdziwa kopalnia ciekawych przykładów i problemów. Interesujące, że jedyne polskie wydanie ukazało się również w 1956 roku, podobnie jak przekład *Geometrii poglądowej.* Wtedy też pierwszy raz po wojnie wznowiony został *Kalejdoskop matematyczny* Hugona Steinhausa.

Nieco później, bo w 1967 roku polski czytelnik miał okazję poznać inną niezwykłą książkę znaną w świecie matematycznym: *Wstęp do geometrii dawnej i nowej* Coxetera. Oryginalny tytuł *Introduction to geometry* nie dzieli geometrii na dawną i nową. Autor nie robi tego również, podzielił natomiast książkę na cztery części. W części pierwszej omówione są bardziej i mniej znane fakty geometrii elementarnej: jest więc prosta Eulera, okrąg dziewięciu punktów, problem Fagnano, twierdzenie Morleya, a także twierdzenie Hjelmsleva i inne twierdzenia dotyczące izometrii, są parkietaże inwersje względem okręgów i sfer oraz wiele innych zagadnień.

Część druga opisuje różnorodne związki geometrii z liczbami. Oprócz, naturalnie, problemów geometrii analitycznej przedstawione jest zastosowanie liczb zespolonych w geometrii, a także liczby Fibonacciego i ich związek ze złotym podziałem, wzór Eulera dla wielościanów i jego zastosowanie do klasyfikacji brył platońskich.

W części trzeciej Coxeter prezentuje rozmaite geometrie dające się wyprowadzić z różnych układów aksjomatów. Dyskutowany jest problem aksjomatyzacji geometrii euklidesowej. Mamy szansę zapoznać się z podstawami geometrii afinicznej, rzutowej, absolutnej i hiperbolicznej.

Część czwarta zawiera oryginalny wykład geometrii różniczkowej krzywych i powierzchni oraz pewne informacje z topologii. Hasła są niemal te same jak w *Geometrii poglądowej* Hilberta i Cohn-Vossena, a jakże inaczej przedstawione. Całość zamyka rozdział poświęcony geometrii czterowymiarowej, gdzie opisane są między innymi czterowymiarowe odpowiedniki wielościanów foremnych.

Książka Coxetera choć powstała na bazie jego wykładów nie jest zwykłym podręcznikiem geometrii. Jest raczej czymś w rodzaju leksykonu; każdy rozdział a także wiele podrozdziałów można czytać praktycznie niezależnie. Liczba zagadnień poruszonych przez Autora jest imponująca. Trudno też *Wstęp* zaliczyć do standardowych książek popularnonaukowych – wszystkie fakty podawane są bardzo precyzyjnie i wiele twierdzeń ma oryginalne dowody. Książka jest dostępna dla szerokiego grona czytelników od uczniów szkół średnich i nauczycieli do wszystkich zainteresowanych różnymi działami geometrii. Może też być bardzo interesująca dla matematyków wszystkich specjalności. Pouczające jest porównanie ujęcia problemów we *Wstępie* z ich prezentacją w *Geometrii poglądowej.*

Z książek godnych uwagi, które z różnych względów zostały praktycznie zapomniane, warto wspomnieć jeszcze jedną, bardzo nietypową. Chodzi o *Modele matematyczne* H.M. Cundy'ego i A.P. Rolleta. Jest to zbiór praktycznych przepisów, jak wykonać samemu modele różnych obiektów matematycznych. Szczególnie interesujący jest opis siatek najważniejszych typów wielościanów: od foremnych poprzez archimedesowe i dualne do gwiaździstych i kompozycji wielościennych. Przedstawione są nawet modele komórek czterowymiarowych.

Oprócz wielościanów czytelnik znajdzie w *Modelach matematycznych* całą kolekcję obiektów płaskich w tym różnych odmian tangramu oraz interesujących krzywych. Opisane są pomysłowe modele kwadryk, powierzchni prostokreślnych i powierzchni jednostronnych. Zebrane są też przeróżne mechanizmy przegubowe służące między innymi do objaśnienia praw mechaniki i przyrządy do rysowania krzywych.

Autorzy podają szereg użytecznych rad, z jakich materiałów najlepiej wykonać poszczególne modele, na co zwracać szczególną uwagę, żeby model się udał i często sugerują nawet kolejność wykonywania czynności przy konstrukcji. Nie zapominają o samej matematyce przedstawiając własności konstruowanych obiektów.

Mogłoby się wydawać, że w dobie rozbudowanych graficznych programów komputerowych, konstruowanie modeli jest już archaiczne. Czym innym jest jednak oglądanie nawet najlepiej wygenerowanego w komputerze obiektu, a czym innym jest możliwość wzięcia modelu do ręki i zapoznanie się z nim w rzeczywistości.

Nauczyciele i uczniowie często pytają, gdzie można znaleźć siatki mniej znanych wielościanów, jak narysować taką czy inną krzywą. *Modele* z dużym naddatkiem zawierają odpowiedzi na ich pytania.

Obecnie nawet wydawnictwa specjalizujące się w wydawaniu książek naukowych i popularnonaukowych zainteresowane są bardziej przygotowywaniem podręczników dla różnego typu szkół niż wznawianiem starszych choć znakomitych książek. Nie należy się raczej spodziewać, że wspomniane wyżej klasyczne perełki literatury matematycznej znów ujrzą światło dzienne. Chyba, że nastąpi radykalna zmiana w polityce wydawniczej albo znajdą się ludzie o dużej sile przekonywania i redaktorzy o dalekosiężnej wyobraźni.

D. Hilbert, S. Cohn-Vossen, *Geometria Poglądowa*, PWN, Warszawa 1956, tłumaczenie: Alina Dawidowicz.

H. Rademacher, O. Toeplitz, *O liczbach i figurach*, PWN, Warszawa 1956, tłumaczenie: Abraham Goetz.

H.S.M. Coxeter, *Wstęp do geometrii dawnej i nowej*, PWN, Warszawa 1967, tłumaczenie: Ryszard Krasnodębski.

H.M. Cundy, A.P. Rollet, *Modele matematyczne*, PWN, Warszawa 1961, tłumaczenie: Roman Duda.

Zdzisław POGODA