Popularyzacja matematyki – próba syntezy

Marek KORDOS, Warszawa

Jest to zapis odczytu inaugurującego Seminarium Popularyzacji Matematyki prowadzone od 3 października 2003 na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego.

Popularyzacja to kształtowanie społecznej świadomości w danej dziedzinie. Dotyczy to wszelkiej popularyzacji: matematyki, historii, ekonomii, ideologii, religii. Na racjonalne działanie w dziedzinie popularyzacji składa się:
– ocena aktualnego stanu owej społecznej świadomości;
– odnotowanie i prognozowanie społecznych potrzeb w tym zakresie;
– sprecyzowanie naszego zamiaru, efektu, jaki chcemy osiągnąć;
– dobór odpowiedniej metody.
Tekst ten jest próbą zarysowania problematyki we wszystkich tych sprawach.

Zacząć wypada od przeglądu miejsc, jakie matematyka zajmowała, ról, jakie społecznie pełniła na przestrzeni dziejów.

Pomijając mało znane i trudne do przeprowadzenia jednoznacznej analizy czasy prematematyki, zacząć wypada od czasu, gdy matematyka, w dzisiejszym znaczeniu tego słowa, pojawiła się.

A więc pitagoreizm – utożsamienie matematyki z poszukiwaniem harmonii świata, którym to poszukiwaniom nadawano rangę wyróżnika człowieczeństwa w świecie żywym. Zatem **ideologia**. W wielkim skrócie: odkrycie związków między liczbami a muzyką poprzez badanie skracania struny; przekonanie, że da się wszelką harmonię wyrazić za pomocą stosunków liczb naturalnych, i tym będzie ona pełniejsza, im te liczby mniejsze; kryzys po odkryciu niewymierności już w kwadracie; rozpad na akuzmatyków zalecających ucieczkę w mistycyzm i wierzących w siłę rozumu matematyków; odkrycie opisujących „wszystko” liczb rzeczywistych przez Teajtetosa (ułamki łańcuchowe) i Eudoksosa (przekroje). Tak było od −VIII po −III wiek.

Następnie matematyka to była **wiedza tajemna** przekazywana przez mistrza czeladnikom i uczniom, a pożytkowana praktycznie: podstawowe zapotrzebowanie to algorytmy praktycznych działań. Jak dalece mogło to być wzniosłe świadczy przykład najbardziej chyba geometrycznego z dzieł rąk ludzkich – gotyku, gdzie budowniczowie katedr umieli z rysunków często już zmarłych majstrów odtworzyć bezbłędnie przestrzenną postać tego, czym mieli uzupełnić powstające nieraz przez stulecia dzieło. W kategorii dokonań intelektualnych najznakomitsze będzie chyba skonstruowanie modelu planetarnego przez Ptolemeusza. Nawet algebra al Chwarizmiego (czy Kuwarizmiego, jak chce Umberto Eco) nosi na sobie piętno takich czarów. Ten okres jest najdłuższy w udokumentowanej historii matematyki: od −II do XV wieku.

W kolejnych wiekach matematyka zaczęła służyć jako **język przyrody**, co poetycko propagował prekursor tej epoki, Galileusz. Język umożliwiający opisanie przyrody i jej opanowanie. Ludzie uwierzyli w to wobec odkrycia grawitacji przez Newtona i potem wdrożyli te możliwości w życie kreując wiek pary i elektryczności, gdzie wszystko zdało się ludzkości możliwe. Warto odnotować, że sytuacja ta stworzyła potrzebę powszechnego nauczania i wywołała silny społeczny nacisk w tym kierunku (od pełnego wyrzutu *pójdź dziecię, ja cię uczyć każę*, po przepełnione dumą *bo wiedza to potęgi klucz. W tym rzecz, kto więcej umie*, aby cytować polskich poetów). To są wieki XVI–XIX.

Wiek dwudziesty przyniósł matematykę, która była **zbyt trudna by ją pojąć i zbyt przydatna, by ją odrzucić**. Nawet noblista Eugene Wigner pisze o tym, jako o zdumiewającej stosowalności. Powstaje elitarna kasta konstruktorów modeli matematycznych, a równocześnie elektronika zdejmuje ze społeczeństwa obowiązek sprawności rachunkowej, dla wielu stanowiący przed stu laty jedyny kontakt z matematyką. Nożyce się rozwierają.

Pozostaje jakoś scharakteryzować stan obecny. Wśród matematyków sytuacja jest klarowna: na Kongresach w Berlinie i Pekinie widać było wyraźną restrukturyzację matematyki w kierunku ponad 60% udziału zastosowań i towarzyszącą jej siłę przekonań matematyków, że ich działania wcześniej czy później ludzkość zbawią. Elita naukowa innych dyscyplin odnosi się do tego nad wyraz przychylnie, czego wymiernymi dowodami są Nagrody Nobla dla matematyków: wzór Blacka–Scholesa, gry Nasha, albo za matematykę, np. fulereny. Na naszym, warszawskim gruncie takim wymiernym dowodem jest wypączkowanie z ekipy zajmującej się zastosowaniami na naszym Wydziale potężnej i bogatej instytucji, jaką jest Interdyscyplinarne Centrum Modelowania. Wśród bussinesmanów to samo zjawisko przejawia się w potężnym wysysaniu matematyków do pracy w bankach, ubezpieczeniach, a także do działania w bezpośrednim manageringu. Prawie każda działalność poznawcza czy praktyczna została wyposażona we właściwe dla niej modele matematyczne i dziś czy się leczy raka, czy pracuje na giełdzie, czy bada ludzką psychikę, czy zgłębia problemy językowe, czy prowadzi przedsiębiorstwo itd. wszędzie bez kontaktu z modelem matematycznym nie można się obejść.

I równocześnie, poza sferami bezpośrednio w nią uwikłanymi, matematyka wywołuje generalną niechęć i paniczny nieraz lęk. I to nie tylko w sferach niewykształconych. Próbuje się dość powszechnie dzielić predyspozycje do pracy intelektualnej czy po prostu intelektualną sprawność na matematyczną i humanistyczną, z wyraźnym przekonaniem o ich rozłączności.

Widać więc pogłębiającą się alienację matematyki w społeczeństwie zmierzającym szybko do jej powszechnego stosowania. Nie trzeba być heglistą, aby widzieć, że w najbliższej przyszłości narastająca sprzeczność tych tendencji będzie musiała być jakoś rozwiązana.

Dla dalszej analizy konieczne jest dostrzeżenie różnych aspektów społecznej obecności matematyki. W najgrubszym ujęciu działa ona jako
– **wiedza**, zasób wiadomości i algorytmów;
– **sposób myślenia**, podejścia do realnych i myślowych problemów;
– **technika**, formalizmy, a w szczególności rachunek.

Nie jest oczywiste, czy społecznie niezbędne są wszystkie te trzy aspekty. Do pomyślenia jest struktura, w której wiedzę i technikę użytkują tylko konstruktorzy modeli matematycznych, podczas gdy pozostałym niezbędny jest tylko charakterystyczny dla matematyki sposób myślenia, pozwalający poprawnie korzystać z realizacji tych modeli – od wciskania guzików komórki czy klawiatury windowsów, poprzez obsługę automatów w rodzaju rezerwacji biletów, autopilota jumbojeta, czy tomografu, aż po stosowanie pakietów programowych budowy mostów lub tp.

W ten sposób pytanie o popularyzację staje się łudząco podobne do pytania o edukację. Np. Zbyszek Marciniak przekonywał mnie kiedyś, że popularyzacja to po prostu dobra dydaktyka. Problem, czy tak jest, wydaje się jednak w oczywisty sposób mieć rozwiązanie negatywne – każdy bez trudu odróżnia książkę popularyzującą matematykę od podręcznika, choćby obie były napisane po mistrzowsku (a nawet zwłaszcza wtedy). Nie należy jednak poprzestawać na tym socjologicznym uzasadnieniu – warto przyjrzeć się różnicy.

Jaś Waszkiewicz (żeby trzymać się cytowania kolegów) kiedyś oznajmił mi, że zdecydowanie woli kłusowników od myśliwych – jedni i drudzy to zabójcy, ale zaletą kłusowników jest to, że nie są zrzeszeni. Jak się wydaje podobna relacja jest między popularyzatorami a nauczycielami. Instytucjonalność działalności tych drugich wyraża się w ogromnej bezwładności monstrualnej maszyny, jaką jest szkoła, w której trybach w Polsce jest aktualnie (bez studiów wyższych) 6,5 mln ludzi, czyli 16% ogółu społeczeństwa z niemowlętami i starcami włącznie.

Od dawna wszyscy zgadzają się, że dziedziczymy na dwóch drogach: biologicznie i intelektualnie. Wielu uważa, że reguły rządzące tym drugim dziedziczeniem są podobne do biologicznej genetyki. W tym ujęciu szkoła reprezentowałaby stabilność genomu, popularyzacja zaś realizować by mogła wszelkie mutacje. Od stabilności genomu zależy przetrwanie, od mutacji – rozwój. Tak więc należy się pogodzić z ogromną bezwładnością dydaktyki i nauczycieli, nie zaniedbując równocześnie wprowadzania do społecznego obiegu rzeczy nowych, niedawno powstałych pojęć, różnego rodzaju hipotez i informacji z naukowego frontu. O istnieniu popytu na tego rodzaju działalność świadczy dobitnie imponująca popularność Festiwali Nauki, czy też wielkie zainteresowanie wszelkimi publikacjami ze słowami *chaos*, albo *fraktale*.

Tu warto wyróżnić paradoksalną na pierwszy rzut oka popularyzację matematyki wśród matematyków. Istnienie tego rodzaju działań nie budzi wątpliwości. Choćby *Geometria poglądowa* Hilberta i Cohn-Vossena, czy *Wstęp do geometrii dawnej i nowej* Coxetera należą do tej grupy, a umieszczenie w nich przesłania do szerokich rzesz społeczeństwa trzeba uznać za przejaw kokieterii. W nieco innej skali do matematyków też są skierowane *Okruchy matematyki* Górnickiego. Podobnie trwają, wbrew prawom przyrody, Szkoły Matematyki Poglądowej.

Istnienie tego rodzaju popularyzacji bierze się z faktu, że technika, wysoko sformalizowane narzędzia często utrudniają (wbrew swemu przeznaczeniu) ogląd matematyki nie ograniczony tylko do najbliższego naszego matematycznego otoczenia.

Oj, myślę sobie czasem, aże sam się śmieję,
dlaczego to zbiór wszystkich zbiorów nie istnieje.
Oj, byłby to hałas spory,
gdyby zebrać wszystkie zbiory.
Tak bodaj brzmi pierwsza zwrotka *Hymnu*.

Interesującym odpryskiem takiej autopopularyzacji matematyki są **pastisze**. Niektóre z nich mają, jak to się mówi w popkulturze, charakter kultowy. Choćby powszechnie śpiewany *Hymn Matematyków*, którego pierwszych twórców nie pamiętają nawet liczni spośród „najstarszych ludzi".

W Krakowie uprawia się kult *Matematyki najwspółcześniejszej* i ten, kto nie wie, jakie własności ma półpunkt $\langle a, a\rangle$ nie zalicza się do towarzystwa. Nie jest to specjalność polska: spójrzmy choćby na *Dziwny wieczór* Iana Stewarta. I nie sposób oprzeć się wrażeniu, iż twórcy dzieł tego rodzaju pragną odetchnąć nieco od rozkoszy ufundowanych im przez algebrę homologiczną czy teorię snopów, pozostając jednak w obrębie matematyki.

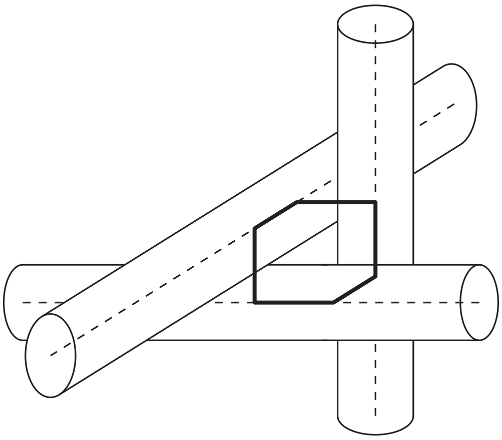
Matematyka szkolna też zresztą wytworzyła swoją wersję pastiszy, których w Polsce klasykiem jest inżynier Szczepan Jeleński z jego *Lilavati* i *Śladami Pitagorasa*. Owa przekupka, sprzedająca każdemu połowę posiadanych jajek i jeszcze pół jajka, miała pogodzić z matematyką tych jej wielbicieli, których uczucia nadwątlało tłuczenie szkolnych algorytmów.

Nie od rzeczy jest tu wspomnieć, że oryginalna *Lilavati* była XII-wiecznym dziełem Bhāskary i pełniła podobną rolę. W Europie coś podobnego napisał trzy wieki wcześniej Alquin (z czego wszyscy pamiętają do dziś zadanie o wilku, kozie i kapuście).

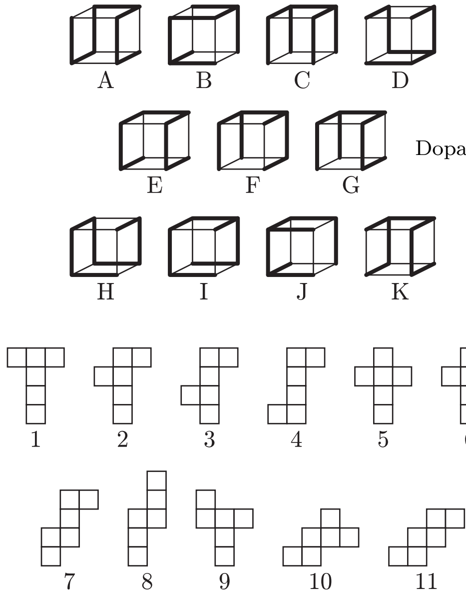
Wymienienie pastiszy to przywołanie jednego z obszarów formalnych, wykorzystywanych przez popularyzację. Spróbujmy sporządzić w miarę kompletną ich listę (przykłady z oczywistej konieczności będą jedynie miniaturowe).

Działanie **pour épater le bourgeois**, by zadziwić profanów. Tu mamy demonstrowanie wstęgi Möbiusa, ale jako fenomenu bez rzutowego kontekstu, wręcz popychające odbiorcę, aby ten podejmował próby takiego kolejnego sklejenia wstęgi, by powstała powierzchnia zerostronna. Tu mieści się paradoksalny rozkład najchętniej opowiadany o złotej kuli, którą matematycy umieją podwoić (i zapewne dlatego są tacy bogaci). Dla koneserów można prezentować rozkład trójwymiarowej przestrzeni na jednowymiarowe rozłączne okręgi. Można też, przedstawiając topologię, „pokazywać" np. rogatą sferę.

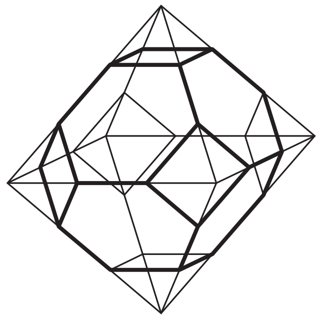
Szlachetniejsza (i, moim zdaniem, pożyteczniejsza) wersja poprzedniego, to **wyobraźnia przestrzenna**. Tu można wymienić genialne zadanie Szarygina o trzech walcach (patrz niżej), zabawę w utożsamianie jedenastu siatek sześcianu z jedenastoma jego rozcięciami (patrz obok), czy wypełnianie przestrzeni czternastościanami archimedesowymi (niżej obok).



Należy podać promień walca, który można wetknąć w otwór powstały między trzema jednakowymi, parami stycznymi walcami o promieniu 1. Zobaczenie, że odcinki przechodzące przez punkty styczności prostopadle do osi walców tworzą, wraz z odpowiednimi odcinkami tych osi sześć krawędzi sześcianu, pozwala rozważać dalej tylko jego wnętrze, co – gdy ktoś się nie boi obrotów w przestrzeni – prowadzi do wniosku, że promień szukanego walca to $\sqrt{2} - 1$.



Dopasuj liczby do liter.



Czternastościan archimedesowy powstaje przez takie obcięcie wierzchołków ośmiościanu foremnego, by nowo powstałe krawędzie były równe pozostałościom „starych".

Tu można dokonać „kroku w górę": **nowe światy**. Pierwszym przykładem jest tu, oczywiście, czwarty wymiar, który można pokazywać w aspekcie czterowymiarowych wielościanów foremnych, albo np. przez pokazanie, że nie ma w nim nierozwiązalnych węzłów. A najwięcej można zdziałać pokazując geometrie nieeuklidesowe poprzez ich euklidesowe modele.

Ten ostatni przykład to fragment większej całości, którą tworzą **modele matematyczne**. Tu warto chyba zwrócić uwagę, że pora już, aby słowo to zaczęło się kojarzyć tak, jak jest przeważnie współcześnie używane, a przestało obsługiwać zakres klejenia wielościanów z kartonu itp. spraw, do których świetną książkę napisali Coundy i Rollett (może tamtą dziedzinę jakoś nazwać, np. materializacja?). Sprawa umiejętności konstruowania modeli matematycznych prostych sytuacji wydaje mi się szczególnie ważna dlatego, że została skompromitowana przez szkolne zalecenie rozwiązywania na lekcjach matematyki „praktycznych problemów", tak jakby praktyktyczne problemy poddawały się matematyzacji środkami szkolnej matematyki. Trzeba tu wyraźnie powiedzieć, że matematyzacji, a więc stworzeniu dla nich modeli matematycznych poddają się jedynie wymyślone, wyidealizowane sytuacje. Można o to walczyć tym bardziej, że istnieje bardzo obfita literatura prezentująca takie problemy na poziomie wręcz zagadek. Moja ulubiona (bo wywołująca częste kłótnie) taka zagadka to: *W dwu jednakowych pucharach jest jednakowa ilość w jednym wody, w drugim wina. Przelewamy kieliszek wody do wina, mieszamy, a potem kieliszek mieszaniny wlewamy do pucharu z wodą. Czy więcej jest wody w winie, czy wina w wodzie?* Matematyzacja polega tu na spostrzeżeniu, że poziom cieczy w obu pucharach jest taki sam, jaki był na początku, więc ile jednego ubyło tyle drugiego przybyło. Inny gardnerowski przykład: *Mąż powraca kolejką podmiejską o godzinie 17:00. W tym samym momencie na stację przyjeżdża samochodem jego żona i razem wracają do domu. Pewnego dnia mąż przyjechał o 16:00 i wyszedł żonie naprzeciw. Ile czasu szedł, jeśli tym razem wrócili do domu o 10 minut wcześniej?* Matematyzacja polega tu na zauważeniu, że żona sama jechała o 5 minut krócej, a więc spotkała męża o 16:55. W podobnym duchu jest pytanie o najszybszą drogę w mieście o prostokątnej sieci ulic. Ta zagadka ma drugie dno: gdy już stwierdzimy, że wszystkie drogi w prostokącie, którego przeciwległymi wierzchołkami są start i meta, mają tę samą długość, wtedy dostrzegamy, że chodziło nie o najkrótszą, lecz o najszybszą drogę, a więc trzeba wybrać te, które mają najmniej zakrętów. Wreszcie obalająca swą oczywistością jest odpowiedź na pytanie o to, ile razy i jak trzeba przełamać tabliczkę czekolady 4×6, łamiąc za każdym razem jeden tylko kawałek, aby otrzymać każdy tafelek osobno. Odkrycie, że za każdym razem liczba kawałków powiększa się o 1, a więc niezależnie od tego jak, trzeba łamać 23 razy, dla wielu jest pierwszym krokiem ku matematyce.

Szczególną rolę pełnią tu paradoksy. Mój kontakt z probabilistyką zaczął się od opowiedzianego przez Roberta Bartoszyńskiego problemu: *Jak wytłumaczyć, bez podejrzewania pana P. o oszustwo, sytuację, w której w ciągu roku spędził on noc 4 razy częściej u swej nieżony, niż u żony, mimo, że postępował względem nich sprawiedliwie. Mianowicie wychodził z pracy o losowej godzinie i wsiadał na przystanku w pierwszy tramwaj, jaki przyjechał. Tramwaje zaś w kierunku NŻ i w kierunku Ż jeździły regularnie co 10 minut.* Odkrycie, że odstęp między tramwajem *NŻ* i *Ż* musiał być ledwie dwuminutowy, co pana P. całkowicie tłumaczy, bardzo mi w studiowaniu probabilistyki pomogło. Inny przykład paradoksu, stosownego dla ludzi nie bojących się trochę liczyć, to pytanie o „środkową" kulę. Jeśli mianowicie wpisać w każde naroże kostki jednakowe, styczne z sąsiednimi, kule, to „w środku" można umieścić (dodatkową) kulę styczną do nich wszystkich. W przypadku zwykłego sześcianu, a więc kostki trójwymiarowej, kula ta jest niewielka. Należy znaleźć taki wymiar kostki, by „środkowa" kula wystawała na zewnątrz kostki.

Takie modelowe podejście ma jeszcze jedną, bardzo ważną wersję. To **prezentacja dokonań**. Sposób, który zjednał matematyce wielu sympatyków w pierwszej połowie ubiegłego wieku. Kanapka z masłem i szynką, którą zawsze można tak przeciąć płaskim pionowym cięciem, aby przepołowić i chleb i masło i szynkę, możność znalezienia na kuli ziemskiej takich punktów antypodycznych, w których jest taka sama temperatura i takie samo ciśnienie, niemożność uczesania bez przedziałków i wicherków owłosionej kuli, to wszystko prezentowało społeczeństwu, że matematycy coś robią. Prawda, że taka praca mogła się komuś wydać niepoważna, ale czy to dlatego dzisiejsze wyniki matematyków nie są tak prezentowane? Dzisiaj robi się to może trochę zbyt poważnie, bo przecież do tego nurtu należą już ponad półwieczna *Co to jest matematyka?* Couranta i Robbinsa, czy dość niedawna *Czy Bóg gra w kości?* Stewarta.

Wspomnienie tych książek dotyka obszernego obszaru, którego większość tak popularyzatorów, jak twórców matematyki nieco się boi: **filozofia matematyki**. Prezentowana jest ona w popularyzacji przez *Ciągłość* Mioduszewskiego. Można też przeczytać pisaną niezwykle poważnie *Psychologię odkryć matematycznych* Hadamarda. Jest też pretensjonalny *Świat matematyki* Davisa i Hersha. Nie ulega jednak wątpliwości, że to pole najbardziej czeka na zaoranie.

Matematycznym fragmentem owej filozofii są **problemy metodologiczne**. Tu wołają o poprawne przyswojenie społeczeństwu takie podstawowe pojęcia jak choćby nieskończoność. Znakomita większość elity intelektualnej jest tu na poziomie przedarystotelesowskim i nie odróżnia nieskończoności potencjalnej (czyli możliwości kontynuowania czynności bez stopu) i aktualnej (czyli dysponowania równoczesnego nieskończenie wielu obiektami), nie wie, że ∞ i $\aleph$ to nie są znaczki z jednej paczki. Kolejne podstawowe pojęcie całkowicie zaniedbane to wymiar. Tutaj sama matematyka stworzyła niezły zamęt, produkując jego najróżniejsze wersje. Jednak coraz powszechniejsze odkrywanie wszędzie fraktali prosi o przybliżenie tych idei. Wreszcie wielkość – pojęcie, wprowadzone do matematyki w czasach platońskich i dziś rozumiane jako obiekt mierzalny, obecnie znajduje swoje szczątkowe miejsce na lekcjach fizyki, gdzie nie tyle się tłumaczy, co wymaga znajomości zasadniczej różnicy, jaka jest między np. temperaturą, a objętością.

Ponadto w obrębie metodologii mieści się jeszcze **obszar logiki**. To pole wypełniają przeważnie rozmaite *Rozkosze łamania głowy.* Większe całości na ten temat produkuje np. Smullyan.

⋆ ⋆ ⋆

Zapewne to wyliczenie obszarów nie jest kompletne. Zapewne ocenie, iż podstawowym zapotrzebowaniem społecznym jest przekaz matematycznego sposobu myślenia, a nie wiedzy czy techniki właściwej dla matematyki, można zarzucić subiektywność (bardzo odmiennie wypowiada się na ten temat np. Michał Szurek w *Matematyce dla humanistów*, gdzie za popularyzację matematyki uważa przede wszystkim przybliżanie laikom matematycznych technik).

Ale istotą seminarium jest właśnie wymiana poglądów, a jeszcze lepiej: konfrontacja osiągnięć.

Dlatego zapraszam wszystkich chętnych do współpracy z seminarium, którego uczestnikami są zarówno pracownicy naukowi, jak studenci, i nie tylko z Uniwersytetu Warszawskiego.