# „*Ars Conjectandi*” *Jakuba Bernoulliego*

*Dobiesław BOBROWSKI, Poznań*

Jest to zapis odczytu wygłoszonego na XXXI Szkole Matematyki Poglądowej „Wybrane dzieła klasyków”, Grzegorzewice, sierpień 2003.

„*Ars Conjectandi*” *Jakuba Bernoulliego*, której znaczenie jest przedmiotem tego artykułu, jest niewątpliwie dziełem przełomowym co najmniej z dwóch powodów. A mianowicie zawiera jawne określenie pojęcia prawdopodobieństwa oraz opisanie jego własności, a po wtóre pierwsze sformułowanie prawa wielkich liczb. Niektórzy twierdzą, że wszystko, co działo się przed *Bernoullim*, to prehistoria probabilistyki. W przeszłości zastanawiano się nad wieloma zjawiskami, których przyczyn nie umiano objaśnić, jak np. powodów zaćmienia Księżyca. Brak racjonalnego wyjaśnienia tego zjawiska był powodem różnych przekonań irracjonalnych mających charakter zabobonu, magii itp. Dopiero rozwój astronomii pozwolił zrozumieć, że zaćmienie Księżyca występuje wówczas, gdy jego trajektoria przecina ekliptykę. Stwierdzenie to pozwoliło na dość precyzyjne prognozowanie przyszłych zaćmień. Zjawiska, których przyczyny nie były dokładnie rozpoznane, nazywano przypadkowymi lub losowymi. Impuls do matematycznego spojrzenia na problematykę zjawisk przypadkowych dawała analiza gier hazardowych. Rozważania nad grami hazardowymi prowadziło wielu znanych uczonych. Oparte one były na kombinatoryce, przy czym dominowało przekonanie, że wszystkie poszczególne przypadki są tak samo możliwe. Tak więc w końcu XVII wieku nagromadziło się wiele rozważań o zjawiskach losowych, przede wszystkim w postaci stawianych pytań i odpowiedzi na nie. Wielu znakomitych uczonych zajmowało się tym w poszukiwaniu ilościowych sposobów oceny zjawisk losowych. Nie byli jednak w stanie wykonać ostatniego koniecznego kroku – wprowadzenia pojęcia prawdopodobieństwa, choć bliscy tego byli *B. Pascal* (1623–1662) i *C. Huygens* (1629–1695). Dokonali oni tego, że powstał fundament pod wprowadzenie tego pojęcia. Pierwszy *J. Bernoulli* rozwinął wprowadzone przez *C. Huygensa* pojęcie wartości oczekiwanej, przez pojęcie stopnia pewności, do mierzalnego prawdopodobieństwa. Odkrycie *Jakuba Bernoulliego* pojawiło się w odpowiedniej chwili, kiedy to probabilistyka nie była jeszcze nauką, ale nagromadziło się już wiele obserwacji z tej dziedziny. Pojęcie prawdopodobieństwa było analizowane do końca XIX wieku, w szczególności przez *A. Moivre'a* (1657–1754) w publikacji „*The Doctrine of Chances*”, London 1756 oraz *P.S. Laplace'a* (1749–1827). Pojęcie prawdopodobieństwa przed *J. Bernoullim* nie było co prawda znane, ale statystyczne pojęcie częstości było powszechnie stosowane do rozwiązywania konkretnych zadań, w tym także pojęcie granicy częstości.

Przejdźmy teraz do podstawowego dzieła, którego omówieniem zajmuję się w tym artykule. Najpierw co oznacza tytuł: ars to sztuka, nabyta umiejętność, w przeciwieństwie do wrodzonych umiejętności, *coniecto* – dosłownie dorzucam, a w przenośni przypuszczam, wnioskuję, oceniam, ale *coniector* to wróżbita, objaśniający sny. Dokładny tytuł mówi, że w tomie tym dodatkowo zamieszczono rozprawę o szeregach nieskończonych oraz (napisany po francusku) list o grze piłką. Autor dzieła, *Jakub Bernoulli*, należał do rodziny, wśród członków, której 12 osób ma swój wkład do matematyki, w tym 5 zajmowało się probabilistyką. *Jakub Bernoulli* urodził się w Bazylei 27 XII 1654 r. Ojciec przewidywał dla niego karierę polityczną. Matematyka stanowiła tylko uzupełnienie ogólnego wykształcenia i interesował się nią jako samouk i to raczej wbrew woli ojca. W 1671 r. został magistrem filozofii, a w roku 1676 ukończył studia teologii. W latach 1670–1682 odbył podróże do Francji, Anglii, Irlandii i Niemiec. W 1681 roku ukazała się pierwsza jego publikacja dotycząca komet. Od 1685 roku zajmuje się probabilistyką, a w roku 1687 obejmuje katedrę matematyki w Bazylei. Na tym stanowisku pozostaje do śmierci (16 VIII 1705).

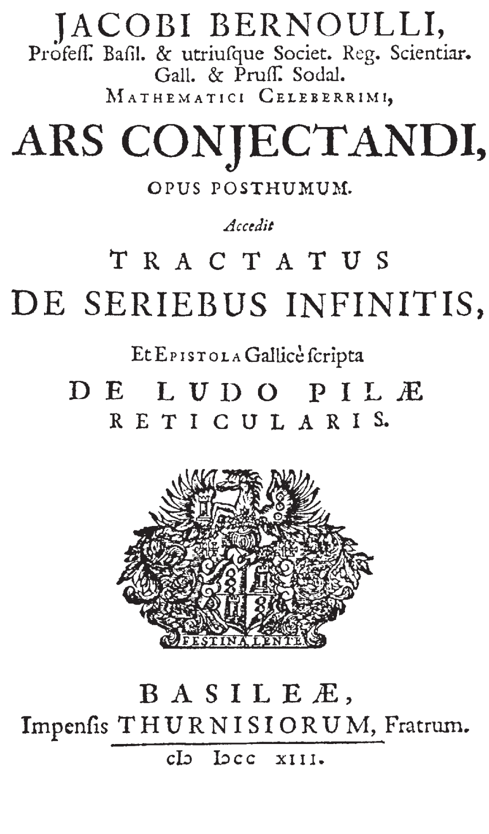
W 1684 roku *Jakub Bernoulli* razem z młodszym bratem *Janem* (1667–1784) opanowali rachunek różniczkowy na podstawie publikacji *G.W. Leibniza* (1646–1716). M.in. studiowali krzywe, a zwłaszcza zagadnienia minimalizacji, co doprowadziło *L. Eulera* (1707–1783) i *J. L. Lagrange'a* (1736–1813) do stworzenia rachunku wariacyjnego. W roku 1690

T 3

Ars Conjectandi

Nr. 177

Vorlage: Universitätsbibliothek Basel, Kg VII 1.


JACOBI BERNOULLI,
Profeff. Bafil. & utriufque Societ. Reg. Scientiar. Gall. & Pruff. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,
ARS CONJECTANDI,
OPUS POSTHUMUM.
Accedit
TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,
Et EPISTOLA Gallicè fcripta
DE LUDO PILÆ RETICULARIS.
FESTINA LENTE
BASILEÆ,
Impenfis THURNISIORUM, Fratrum.
cIↃ IↃcc XIII.

T 4
Dissertation von Niklaus I Bernoulli:
De Usu Artis Conjectandi in Jure

Nr. 178

DISSERTATIO INAUGURALIS
MATHEMATICO-JURIDICA
DE
USU ARTIS
CONJECTANDI
IN JURE,
Quam
DIVINA JUVANTE GRATIA
Auctoritate & Jussu
Magnifici & Amplissimi JCtorum Ordinis
in Academia Patria
pro
GRADU DOCTORATUS
In Utroque Jure legitime consequendo
Ad Diem Junii A. C. M DCC IX.
L. H. Q. S.
Publice defendet
M. NICOLAUS BERNOULLI,
Basiliensis.

BASILEÆ,
Typis JOHANNIS CONRADI à MECHEL.

*J. Bernoulli* rozwiązał problem brachistochrony postawiony w roku 1687 przez *Leibniza. Jan* (profesor w Groningen) publikował rozwiązania problemów, które w tym samym czasopiśmie stawiał *Jakub*. „*Ars Conjectandi*" wydana została w roku 1713, a więc osiem lat po śmierci autora przez jego bratanka *Mikołaja* (1687–1750).

Zanim jednak przejdziemy do samego dzieła „*Ars Conjectandi*" musimy nieco uwagi poświęcić *Cristianowi Huygensowi* (1629–1695) wybitnemu astronomowi, fizykowi i matematykowi holenderskiemu, który w 1655 roku, będąc w Paryżu dowiedział się o słynnych wynikach *B. Pascala* (1623–1662) i *P. Fermata* (1601–1665) dotyczących zagadnienia podziału wygranej w przypadku nieukończenia gry, a mianowicie rozwiązania spełniającego po raz pierwszy wymogi, dziś powiedzielibyśmy, probabilistyczne, tzn. oparte na dalszym potencjalnym przebiegu nie odbytej gry. *Huygens* po powrocie do Niderlandów, nie znając, wtedy nie opublikowanego jeszcze rozwiązania, doszedł samodzielnie do tych rezultatów i zamieścił je w publikowanej w roku 1656 rozprawie „*Van rekeningh in spelen van gieluck*" (O rachunkach w grach losowych). W książce tej używa, zaczerpniętego wprost z języka potocznego holenderskiego słowa *kans* (francuskie *chanse*) nie mającego pierwowzoru w języku łacińskim, które oznaczało możliwość osiągnięcia ustalonego celu. Wyraz ten miał niewątpliwie sens zbliżony do prawdopodobieństwa, jednak pojęcie to zyskało ścisły sens dopiero w latach o wiele późniejszych. Do przekładu łacińskiego, którego dokonał *Frans van Schoten* (1615–1660) *Huygens* proponował takie słowa: *alea* (kostka do gry, przypadek), *sors* (los, ryzyko), *fortuna* (szczęśliwy los), *casus* (przypadek), *lusio* (gra). W oryginale holenderskim mamy jednak najczęściej opisowe sformułowania tłumaczone na łacinę jako „*expectatio mea...*" (moje oczekiwanie...) co odpowiada w terminologii nam współczesnej pojęciu wartości oczekiwanej.

Na początku *Huygens* formułuje trzy prawa dotyczące sposobu obliczania wartości oczekiwanej. Np. I zasada brzmi : „*Si a vel b expecto, quorum utrumquis aequo facile mitti obtinere posit, expectatio mea dicenda est valere* $(a+b)/2$.", tzn. „Jeśli spodziewam się $a$ lub $b$, i obie równie łatwo mogę otrzymać, to oczekiwanie moje jest warte $(a+b)/2$", co ilustruje następująco: „Jeżeli ... mogę wygrać 3 szylingi zaciśnięte w jednej ręce lub 7 szylingów zaciśniętych w drugiej, to wybór jednej ręki jest dla mnie wart 5 szylingów".

Na podstawie trzech praw *Huygens* przytacza 11 przykładów i formułuje 5 zadań bez rozwiązań. Oto przykład czwarty: „Gdybyśmy grali o to, kto pierwszy wygra 20 partii, i jeślibym wygrał 19, a mój partner 18, ... to miałbym równe szanse wygrać następną partię i zdobyć $a$, jak i ją przegrać i zdobyć w dalszej grze $\frac{a}{2}$. Zatem zgodnie z I prawem moje szanse wynoszą $\frac{a+\frac{a}{2}}{2} = \frac{3}{4}a$, a mojego partnera $\frac{1}{4}a$." Zauważmy, że istotnie dalszy przebieg gry ma trzy warianty A, BA, BB, gdzie A oznacza wygraną gracza pierwszego, a B drugiego. Prawdopodobieństwa wygranej gracza A w poszczególnych wariantach wynoszą odpowiednio $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{4}$ i 0.

„*Ars Conjectandi*", składa się z czterech części. Część pierwsza: – *Complectnes tractatum Hugenii de ratiociniis in ludo aleae* – obejmuje rozprawę *C. Huygensa.* W dodatku do traktatu *Huygensa Bernoulli* zamieścił rozwiązania owych pięciu problemów, z których pierwszy dotyczy podziału nagrody pomiędzy dwóch graczy, grających dwiema kostkami, pod następującym warunkiem: gracz A uzyskuje nagrodę, gdy wygra 6 rzutów, gracz B – gdy wygra 7 rzutów, itd. Na siedmiu stronach dowodzi *Bernoulli*, że podział nagrody powinien być równy proporcji 10353 : 12276.

*Pars secunda continens doctrinam de permutationibus et combinationibus* – w tej części *Bernoulli* zajmuje się permutacjami, kombinacjami i kombinacjami z powtórzeniami. Zamieszcza tabelę odpowiadającą trójkątowi *Pascala*, którego zapewne nie znał. Nowością jest algorytm obliczania sum potęg początkowych liczb naturalnych za pomocą współczynników, które później zostały nazwane liczbami *Bernoulliego.*

*Pars tertia explicans usum praecedentis doctrinae in variis sortitionibus et ludis aleae* zawiera zastosowania kombinatoryki w 24 różnych przykładach gier hazardowych wraz z rozwiązaniami.

Wydaje się jednak, że najważniejszą rolę spełnia część czwarta, która jest najbardziej oryginalna. Nosi ona tytuł: *Pars quarta tradens usum et applicationem praecedentis doctrinae in civilibus, moralibus et oeconomicis* (zastosowanie poprzednich nauk w sprawach obywatelskich, moralnych i ekonomicznych).

W liście do Leibniza z 3 X 1703 roku *Jakub Bernoulli* pisze o „*Ars Conjectandi*": „... większą część mojej książki już ukończyłem, ale brak jeszcze najważniejszej części, w której pokazuję, jak podstawy mojej sztuki można zastosować do spraw obywatelskich, obyczajowych i gospodarczych." Rozpoczynają ją rozważania nad pojęciami: pewność, prawdopodobieństwo, konieczność, przypadek. Pewność oznacza dla *Bernoulliego* prawdę istnienia w przeszłości, obecnie lub w przyszłości.

Całkowity determinizm jest według *Bernoulliego* faktem obiektywnym. Subiektywna pewność polega na stopniu naszego poznania prawdy. „To, co przez poznanie, rozumowanie, czucie, doświadczenie, autopsję czy też na innej drodze stwierdzamy tak, że o ich istnieniu w przyszłości nie możemy wątpić, cieszy się pełną i bezwarunkową pewnością. Wszystko inne otrzymuje w umysłach naszych ocenę mniej doskonałej pewności, mniejszą lub większą, przez co jest mniej lub więcej możliwe wystąpienie jakichś rzeczy obecnie w przyszłości lub w przeszłości.

Bardzo ciekawe jest określenie prawdopodobieństwa „*Probabilitas est gradus certitudinis, et ab hac differt ut pars a toto*" (prawdopodobieństwo jest stopniem pewności i różni się od niej tak, jak część od całości). „Jeśli pewność całkowitą i bezwarunkową oznaczymy literą $a$ lub jedynką, to można przyjąć, że składa się ona z np. pięciu prawdopodobieństw, jakby części, z których trzy świadczą o istnieniu lub przyszłości jakiegoś zdarzenia, a pozostałe są jemu przeciwne. O takim zdarzeniu mówimy, że ma $\frac{3}{5}a$ lub $\frac{3}{5}$ pewności." „Tę możliwość nazywa się bardziej prawdopodobną, która ma większą liczbę części pewności."

Natomiast moralnie pewnym (*moraliter certum*) jest „to czego prawdopodobieństwo jest prawie równe pełnej pewności, tak że nie można różnicy uważać za istotną", natomiast moralnie niemożliwym jest to, co ma tylko tyle prawdopodobieństwa, ile moralnie pewnemu brakuje do pełnej pewności.

W dalszym ciągu *Bernoulli* rozważa rzeczy konieczne i przeciwstawia im rzeczy przypadkowe. „Pewne jest, że z położenia kości, prędkości, odległości od deski do gry w chwili, gdy opuszcza rękę rzucającego, kość nie może upaść inaczej, niż rzeczywiście pada." „Podobnie przy danym stanie powietrza i przy danych wiatrach, mgłach, chmurach, masach, położeniach, kierunkach, prędkościach, jak też prawach mechaniki, według których występuje wzajemne oddziaływanie, jutrzejsza pogoda nie może być inna niż ta, która rzeczywiście będzie. Do tego stopnia jest to następstwo jej bezpośrednich przyczyn. Nie mniej konieczne, jak zjawisko zaćmienia, jest następstwem ruchu ciał niebieskich; i tylko zwyczajowo zaćmienie zalicza się do koniecznych, wynik zaś rzutu kością i jutrzejszą pogodę do przypadkowych."

„Nie ma na to innych argumentów niż to, że dla określenia przyszłych zjawisk dane, jakie należałoby przyjąć i jakie są one w rzeczywistości, nie są nam wystarczająco znane, a jeśli byłyby – to niedość rozwinięta jest geometria i fizyka, aby można było rachunkiem wyznaczyć zjawiska, tak jak ze znanych zasad astronomii można rachunkowo przewidzieć zaćmienia."

Prześledzimy z kolei jak *Bernoulli* proponuje ocenianie prawdopodobieństwa w zagadnieniach społecznych. „Prawdopodobieństwo ocenia się zarówno na podstawie liczby jak i wagi (*pondus*) argumentów." Różnorakość argumentów ilustruje następujący przykład podany przez *Bernoulliego*:

Na drodze znaleziono zabitego Tytusa. Mewio jest oskarżony o zabójstwo. Argumenty oskarżenia są następujące:

1° stwierdzono, że nienawidził Tytusa;
2° badany zbladł i odpowiadał z lękiem;
3° w domu Mewio znaleziono miecz mokry od krwi;
4° w dniu, w którym Tytus został zabity na drodze, przechodził nią Mewio;
5° Kajus zeznał, że w przeddzień zabójstwa odbyła się kłótnia między Tytusem a Mewio.

Aby prawidłowo ocenić argumenty *Bernoulli* proponuje ogólne zasady (*regulas seu axiomata*), „które jedynie zdrowy umysł ludzki powinien dyktować, a które w życiu stale są stosowane jako najroztropniejsze." Takich zasad wymienia 9. Dla przykładu przytoczę tutaj zasadę siódmą, która głosi, że „wartości postępowania ludzkiego nie należy oceniać po jego skutkach; niekiedy najgłupsze działania cieszą się najlepszymi osiągnięciami i na odwrót – najbardziej mądre są najgorszymi ... tak więc jeśli ktoś rzucając trzy kości chciałby w pierwszym rzucie otrzymać trzy „szóstki", to nawet jeśli taki wynik uzyskał, musi być uważany za głupca".

A oto inny przykład: Są świadkowie, że podczas zamieszek zginął człowiek zasztyletowany przez zabójcę odzianego w czarną chlamidę. Ale widziano trzech uczestników odzianych w czarne chlamidy. Jest więc argument, że zabójcą był Gracchus, gdyż miał czarną chlamidę, ale jednocześnie jest to argument w obronie Gracchusa, gdyż zabójcą mógł być każdy z pozostałych osób mających czarne chlamidy.

Centralne zagadnienie IV części „*Ars Conjectandi*", które kończy tę księgę, później zostało nazwane prawem wielkich liczb w postaci *Bernoulliego.* Było to nie tylko jeszcze jedno ważne twierdzenie, rozpoczynające nowy etap w rozwoju pojęcia prawdopodobieństwa oraz całej teorii prawdopodobieństwa. Treść twierdzenia *Bernoulliego* znajduje się dziś w każdym, choćby najskromniejszym, kursie rachunku prawdopodobieństwa, zmienia się tylko metoda dowodu, gdyż sto pięćdziesiąt lat po *Bernoullim* problemem tym zajął się ponownie *P.L. Czebyszev* (1821–1894) i znalazł daleko idące uogólnienie oraz podał prostą i mocną metodę dowodową.

Nie mniej zapoznamy się ze sformułowaniem twierdzenia *Bernoulliego* ze względu na znaczenie nowych idei w nim występujących. Niech liczba wszystkich przypadków pożytecznych do wszystkich możliwych ma się jak $r$ do $t = r + s$. Wówczas można wziąć tyle obserwacji żeby prawdopodobieństwo, iż zaobserwowana częstość znajdzie się pomiędzy $\frac{r-1}{t}$ a $\frac{r+1}{t}$ było c razy większe niż prawdopodobieństwo, że znajdzie się poza tym przedziałem, tzn.

$$P\left(\frac{r-1}{t} \leq \frac{x}{n} \leq \frac{r+1}{t}\right) \geq cP\left(\frac{x}{n} < \frac{r-1}{t} \wedge \frac{x}{n} > \frac{r+1}{t}\right)$$

lub

$$P\left(\left|\frac{x}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) > cP\left(\left|\frac{x}{n} - p\right| > \varepsilon\right)$$

czyli

$$P\left(\left|\frac{x}{n} - p\right| > \varepsilon\right) < \frac{1}{c+1},$$

gdzie $p = \frac{r}{t}$, $\varepsilon = \frac{1}{t}$, $n$ – liczba obserwacji, $x$ – liczba pozytywnych obserwacji. Później znaleziono dokładniejsze oszacowanie

$$P\left(\left|\frac{x}{n} - p\right| > \varepsilon\right) \leq \mathrm{e}^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}.$$

Jednak nie należy kojarzyć prawa wielkich liczb z faktem, że w otaczającym nas świecie częstość zjawisk losowych jest stabilna, tzn. np. w oparciu o zasadę izonomii głoszącej, że np. prawidłowa tzn. idealnie symetryczna moneta „nie ma prawa” upaść częściej jedną stroną niż drugą, o ile tylko liczba rzutów będzie dostatecznie duża. Są to spostrzeżenia bliskie sobie, ale nie identyczne.

Sformułowanie prawa wielkich liczb wyraźnie wskazuje na związki pojęcia prawdopodobieństwa z pojęciem częstości w dostatecznie długim ciągu obserwacji, eksperymentu itp. zjawisk empirycznych. *Bernoulli* pisze, że kto nie ma dostatecznych podstaw do oceny prawdopodobieństwa *a priori* na podstawie rozumowej, to powinien wielokrotnie obserwować wyniki w analogicznych warunkach i otrzymaną częstość traktować jako prawdopodobieństwo *a posteriori.*

Prawo wielkich liczb było dla *Bernoulliego* logiczną podstawą uzasadniającą postępowanie intuicyjne, praktykowane już dawno. Omawiając poglądy *Jakuba Bernoulliego* warto zwrócić uwagę na przekonanie, że większa liczba obserwacji daje większą pewność. *Bernoulli* w 1738 roku, aby przekonać się o pewnym fakcie, wskazał na konieczność przeprowadzenia 25.550 obserwacji, podczas gdy liczba mieszkańców Bazylei była wówczas mniejsza niż 25.550. Zauważmy jeszcze, że mimo iż prawo wielkich liczb było opublikowane w roku 1713, to według notatki samego *J. Bernoulliego* dowód był mu znany jeszcze przed rokiem 1690. I dalsze wyniki w uściśleniu prawa wielkich liczb znanego jako twierdzenie *Moivre'a–Laplace'a.* Uogólnienie tego prawa zawdzięczamy *Poissonowi*, a następnie *P.L. Czebyszevowi.*

*J. Bernoulli* dochodzi do konkluzji w „*Ars Conjectandi*”: „Jeżeli zostaną zaobserwowane wszystkie zdarzenia w wieczności, to zostaną poznane wszystkie stosunki (*ratios*)”. Było to powtórzenie poglądów *Platona*, a były one błędne. Wynikało to po pierwsze z ulegania uparcie wysokiemu znaczeniu „moralnej pewności”. *J. Bernoulli* głosi, że niepewność rośnie, gdy maleje liczba obserwacji – „dla najgłupszego człowieka dzięki samemu instynktowi natury z siebie samego bez żadnej instrukcji”.

Interesująca jest lektura listów, jakie wymienili w latach 1703–1705 *J. Bernoulli* z *G.W. Leibnizem* (1646–1716). *Bernoulli* informował, że znalazł sposób empirycznej oceny prawdopodobieństwa. *Leibniz* był przekonany, że ocena taka musi opierać się na nieskończenie wielu obserwacjach, a nie na skończonej ich liczbie, jak głosił to *Bernoulli.* Duża liczba obserwacji, np. rzutów kostką, może utwierdzić nas w przekonaniu, że kostka jest prawidłowa (symetryczna), ale nie pozwoli nam na prognozę wyniku następnego rzutu.

Dziesięć lat po śmierci znanego filozofa *Spinozy* (1632–1677) w Hadze została opublikowana anonimowo praca, złożona z dwóch części, różniących się znacznie treścią; pierwsza pt. „Badanie tęczy”, druga pt. „Uwagi o matematycznym prawdopodobieństwie”. Badania wskazują, że są to dzieła *Spinozy.* W drugiej części znajduje się rozwiązanie pierwszego zadania *Huygensa* oraz sformułowanie pozostałych czterech. Nas powinno zainteresować to, że w tytule mówi się już o „matematycznym prawdopodobieństwie” chociaż w samej pracy prawdopodobieństwa nie określa się.

Praca *J. Bernoulliego* odkryła przed teorią prawdopodobieństwa nową drogę rozwoju zmierzającą do przekształcenia jej w nową matematyczną dyscyplinę, mającą swoją własną tematykę, związaną z poznaniem wpływu dużej liczby przyczyn, prawidłowości, związanych z prawem wielkich liczb. Dalszy rozwój probabilistyki wykazał, że najważniejsze jest nie to, iż teoria prawdopodobieństwa to aparat obliczeniowy, ale to, że stwarza o wiele szerszą koncepcję pozwalającą ustalać porządek i prawidłowości tam, gdzie podejście deterministyczne zawodzi. Ogromne znaczenie teorio-poznawcze probabilistyki polega na ogólniejszym pojmowaniu przyczynowości, niż czyni to jakakolwiek czysto deterministyczna teoria. Rozważania *Bernoulliego* nad pojęciem prawdopodobieństwa dały podstawy powstałej wówczas dziedzinie wiedzy, którą nazywano rachunkiem prawdopodobieństwa, a która na tych podstawach rozwijała się w latach następnych, aż do kolejnego przełomu, jakim była jej aksjomatyzacja w XX wieku. Na zakończenie odnotujmy, że teza doktorska bratanka *J. Bernoulliego Mikołaja* dotyczyła zastosowań metod zawartych w „*Ars Conjectandi*” w problematyce prawnej.

## Literatura


[1] *Die Werke von Jakob Bernoulli*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1975

[2] *Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeits Theorie von den Anfängen bis 1933*, Einführung und Texte, Herausgegeben von Ivo Schneider, Akademie-Verlag, Berlin 1989