Bujanie w przestrzeni

Michał SZUREK, Warszawa

Artykuł ten jest spisaniem wykładu, jaki miałem w XXIX Szkole Matematyki Poglądowej (Grzegorzewice, sierpień 2002 r.) Jak wiadomo, szkoła poświęcona była pojęciu przestrzeni. Temat był chwytliwy. Nic dziwnego. Przestrzeń interesuje filozofów, historyków, fizyków, matematyków ... i zwykłych ludzi. Nawet na studiach polonistycznych są zajęcia o czasie i przestrzeni w dziełach literackich. Celem mojego wykładu było podzielenie się z audytorium swoimi wrażeniami o tym, jak można uczyć bądź tylko opowiadać o przestrzeniach wielowymiarowych dla trzech typów audytoriów: 1) humaniści (uczestnicy mojego seminarium „Humanistyczne Aspekty Matematyki" i inni, okazjonalnie spotykane audytoria), 2) nauczyciele matematyki (uczestnicy Seminariów Edukacji Matematycznej prowadzonych pod egidą Fundacji Rozwoju Matematyki Polskiej, uczestnicy spotkań organizowanych przez rozmaite wydawnictwa oświatowe), 3) zdolne dzieci (głównie stypendyści i podopieczni Krajowego Funduszu na Rzecz Dzieci dla dzieci wybitnie zdolnych, tzw. „geniusze"). Wbrew pozorom, te trzy kategorie mają wiele wspólnego. Powiem, że mam tu na myśli „humanistę w starym sensie": to człowiek o szerokich zainteresowaniach, dostrzegający ludzkie aspekty rozmaitych nauk. Odnoszę wrażenie, ze humanistami lubią nazywać się ludzie, którzy nie lubią matematyki, nie rozumieją jej i nie znają. Wybitny humanista nie znając matematyki, może wypowiadać się na jej temat bardzo sensownie. Mam tu na myśli Leszka Kołakowskiego i jego esej „Matematyk i mistyk" w książeczce „Miniwykłady o maxisprawach".

Drugim celem wykładu było spojrzenie na to co robimy z punktu widzenia... teorii literatury. Matematyka jako literatura wydaje mi się ciekawym wątkiem.

Każdy z nas, matematyków, wie, że typową reakcją interlokutora, gdy się dowie, jaki jest nasz zawód, jest „Panie, ja w szkole nigdy nic nie rozumiałem a maturę zdałem dzięki ściągawkom w kanapkach". Ale bywa i inna reakcja: „Aaa, bardzo mi przyjemnie poznać człowieka, który umie sobie wyobrazić przestrzeń pięciowymiarową". Takie właśnie odezwanie się pewnej miłej humanistki skłoniło mnie wiele lat temu do opracowania referatu o wielu wymiarach. Czy jednak można opowiadać o matematyce tak, żeby to było zrozumiałe dla audytorium i uczciwe?

Najpierw dwie uwagi ogólne.

1) Nawet Steven Hawking („Krótka historia czasu") wyznaje zasadę, że zamieszczenie wzoru matematycznego w książce zmniejsza jej sprzedawalność o połowę. Być może – jednak termin „sprzedawalność" budzi we mnie dość jednoznaczne i niezbyt sympatyczne skojarzenia. Ale w opinii Hawkinga jest dużo prawdy. Z niezrozumiałych względów „humaniści" , nawet ci prawdziwi, mają fobię na punkcie wzoru. Uczenie matematyki polega również na uczeniu rozumienia wzorów. To osobna, wcale nie bagatelna sprawa.

2) Matematycy często tworzą na użytek „humanistów" różne konstrukcje myślowe, które mają im pomóc w rozumieniu, a często zaciemniają obraz matematyki. Takie określenia, jak twierdzenie o kanapkach (każdą kanapkę można przeciąć płaskim cięciem tak, by przepołowić bułkę, masło i szynkę), o obieraniu ziemniaków, a nawet o cudownym podziale kuli są zabawne dla nas samych – „humaniści" sądzą, że matematyka teoretyczna naprawdę zajmuje się przecinaniem prawdziwych kanapek i domykaniem czegoś. Najlepiej ilustruje to mój ulubiony cytat o zakrzywieniu przestrzeni, które uchodzi za jedną z niemożliwych do zrozumienia sztuczek fizyków. Clive Staple Lewis pisze:

Matematyka jest teraz najbliższa rzeczywistości. Wszystko możliwe do wyobrażenia, nawet wszystko to, czym można manipulować za pomocą zwykłych *(to znaczy niematematycznych) pojęć, jest tylko analogią, ustępstwem dla naszej słabości, dalekim od tej prawdy, do której matematyka była drogą. Nowoczesna fizyka nie przemawia do rzesz bez przypowieści. Takie wyobrażenie jak „zakrzywienie przestrzeni" daje się ściśle porównać do starej definicji Boga jako „koła, którego środek jest wszędzie, a obwód nigdzie". Oba skutecznie sugerują; każde czyni to, przedstawiając to, co na poziomie naszego zwykłego myślenia jest nonsensem. Przyjmując „zakrzywienie przestrzeni" nie „wiemy" ani nie cieszymy się „prawdą" na sposób, który kiedyś uważano za możliwy.* (Clive Staple Lewis, *Odrzucony obraz*, Kraków 1995).

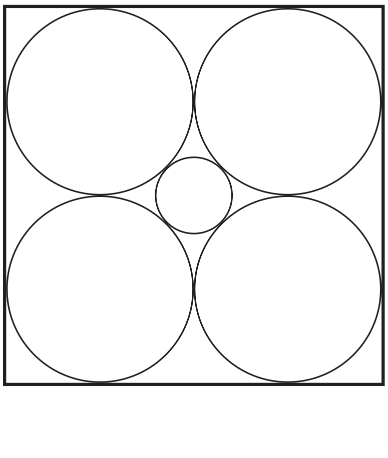
Bardzo lubił matematyzować i wplatać fizykę do swoich tekstów wybitny pisarz włoski Alberto Moravia. Wychodziły z tego takie kwiatki: *Flaga zwisa nieruchomo z braku ciążenia* (reportaż o wyprawie Apolla 11).

Uważny Czytelnik wysnuje z tego słuszny wniosek, że nie popieram takiej metody popularyzacji matematyki, gdzie za wszelką cenę unikamy pisania wzorów. Muzyka bez zapisu nutowego jest możliwa, matematyka bez formuł – mimo wszystko nie. A jeśli nawet, to jest bardzo trudna.

Lewis zachowuje się tu jak *akuzmatyk*: zakłada, że pewnego pojęcia nie da się zrozumieć i zaczyna je kontemplować. Nie wolno odrzucać akuzmatycznego spojrzenia na matematykę, należy jednak próbować coś zrozumieć. Tymczasem każdemu, naprawdę każdemu humaniście, da się ściśle wytłumaczyć, co to jest metryka Riemanna – pod warunkiem wszakże, że nie będziemy mówić o mitycznym „zakrzywieniu przestrzeni", tylko nauczymy słuchacza mnożyć macierz 2 na 2 przez wektor 2 na 1. O tym jednak nie tutaj.

A więc jak wprowadzam przestrzeń czterowymiarową? Przeprowadzam standardową konstrukcję. Staram się mieć kredę w czterech kolorach. Rysuję biały (a czarny, jeśli piszę na flamastrem na białej tablicy) odcinek i przesuwam w „zielonym" kierunku. Pytam „co to jest?". Słyszę odpowiedź: „kwadrat!". A nie, odpowiadam, bo to tylko rysunek kwadratu. Że nie rozdrabniam włosa na czworo, staje się jasne, gdy narysuję na tablicy biało-zielono-niebieski sześcian. Każdy rozumie, że to jest tylko rysunek obiektu, bo sam obiekt jest przestrzenny. W zależności od swojego wyczucia audytorium pozwalam sobie teraz na jeden lub dwa standardowe żarty. Żart nr 1. Pani w szkole pokazuje dzieciom obrazek i pyta, co na nim jest. „Kot!!!" krzyczą dzieci. „Nie, dzieci, to nie kot, tylko rysunek kota! A na tym obrazku?" – „Mysz", odpowiadają dzieci już mniej pewnie. „Nie, dzieci, to nie mysz, tylko rysunek myszy! No, a na tym?" – „Już wiemy, już wiemy!!! Rysunek kota łapie rysunek myszy!!!" Żart nr 2. Wyrażam żal, że organizatorzy nie zapewnili czterowymiarowej tablicy. Żart nr 2 służy mi do zwrócenia uwagi na to, że już trzeci wymiar musiałem umownie przedstawić na płaskiej tablicy jako ukośny kierunek, więc pytanie o tym, dlaczego czwarty wymiar to też ukośna kreska, jest nie na miejscu. Bo przecież muszę zmieścić coś wymiaru większego w czymś o wymiarze mniejszym. Jeśli wykład jest dla nauczycieli, to wspominam tu o zasadzie szufladkowej Dirichleta. Trochę nie na temat, ale nie szkodzi, jeżeli się dowiedzą. Cel uświęca środki (pogląd, jak wiemy, dyskusyjny).

Nadchodzi kulminacyjny moment przedstawienia. Biorę do ręki czerwoną kredę i przesuwam narysowany sześcianik w czwartym, lekko ukośnym wymiarze. Powstaje znany nam wszystkim rysunek kostki I^4. Gdy delektuję się własną pracą, pada zwykle pytanie: a co jest tym czwartym wymiarem, na pewno czas? Nie mogę odpowiedzieć jak sierżant w wojsku, bo najtrudniej jest właśnie przekonać wszystkich, że nie jest to pytanie matematyczne, a ja tutaj tylko zajmuję się matematyką. Zwykle dochodzimy do wspólnej konkluzji, że jakkolwiek ten czwarty wymiar wygląda, ja go umiem przedstawić na rysunku. To jest dobry moment do uwag na temat uniwersalności matematyki. Cytuję tu zwykle Eulera, że matematyk, jak długo jest matematykiem, nie musi parać się filozofią. Jeśli wykład jest dla humanistów, bądź nawet nauczycieli, to nawiązuję tu do znanej w teorii literatury koncepcji *make-believe*: autor stwarza jakiś świat, my wierzymy w jego istnienie ...dopóki czytamy książkę.



Bez trudu dowodzę (najczęściej proszę kogoś do tablicy), że przekątna takiej kostki ma długość 2. Na ogół wszyscy zgadują, że w kostce n-wymiarowej będzie to $\sqrt{n}$. Cieszą się, że rozwiązali n-wymiarowe zadanie. Uczniom i nauczycielom pokazuję zatem taki paradoks:

Zadanie. W naroża kostki n-wymiarowej o długości krawędzi 1 wpisano 2^n kul o promieniach $1/2$. Między nie wpisano kulę styczną do nich zewnętrznie. Obliczyć jej promień. Rysunek obok obrazuje sytuację dla $n = 2$.

Bardzo łatwo jest obliczyć, że promień „mniejszej” kuli jest równy $r = \dfrac{\sqrt{n}-1}{4}$.
Dla $n = 3$ to jest równe $\dfrac{\sqrt{3}-1}{4} \approx 0{,}18$, dla $n = 4$ już 0,25, gdy zaś $n = 9$ to „mała” kula ma promień 1/2 i jest po prostu kulą wpisaną w kostkę.
Dla większych n jest jeszcze „paradoksalniej” , na przykład, gdy $n = 25$, to „małą” kula wystaje dość daleko poza kostkę!

Charakterystyczne jest, że rozwiązania tego zadania na ogół nie rozumieją humaniści. Nauczyciele zaś uporczywie szukają błędów rachunkowych. Tylko uczniowie przyjmują, że w przestrzeni wysokiego wymiaru widocznie tak musi być i basta.

Liczę teraz, ile jest ścian kolejnych wymiarów w kostce I^4. Wprowadzam pojęcie ściany pustej i ściany pełnej. Obliczam naprzemienną sumę ścian, wychodzi zero i formułuję twierdzenie Eulera. Gdy zajęcia są dla nauczycieli, zwracam uwagę, że liczby ścian kolejnych wymiarów w kostce I^n są równe współczynnikom przy kolejnych potęgach x w pewnym wyrażeniu. Na pytanie „dlaczego?” na ogół nikt nie umie odpowiedzieć. Pokazuję wtedy, że obie liczby obliczane są według tego samego wzoru rekurencyjnego, podobnego do schematu Hornera:

Jeżeli $s_n(k)$ oznacza liczbę k-wymiarowych ścian w kostce wymiaru n, albo współczynnik przy x^{n-k} w rozwinięciu $(2x + 1)^n$, to

$$s_k(n) = 2s_{k-1}(n) + s_{k-1}(n-1)$$

Jeżeli mam do dyspozycji Excel, to pokazuję, jak obliczyć kolejne $s_k(n)$, przesadnie egzaltując się tym, że oto uprawiam za pomocą arkusza kalkulacyjnego geometrię n-wymiarową.

Dygresja: Jakie motto kiedy przyświecało edukacji?
1900: Niechaj w polu pasa świnie, kto nie umie po łacinie.
1945: Nie matura, lecz chęć szczera, zrobi z ciebie oficera.
1965 (autentyczne, z UW) Niech pogania woły w polu, kto się nie zna na Algolu.
2000: Nie osiągniesz nigdy celu, gdy się nie znasz na Excelu.
2050: Tylko profesory i docenty wiedzą, co to są procenty.

Bawiąc się danymi, otrzymanymi z obliczeń liczby ścian, odkrywamy ekperymentalnie kilka twierdzeń, na przykład:

Dowód: Jeśli $x = 1$, to $(2x + 1)^n$ jest potęgą trójki. Dlaczego jest to dowód?

Suma liczb ścian (bez uwzględnienia ściany pustej) jest potęgą trójki. W kostce wymiaru $3n - 1$ jest tyle samo ścian n-wymiarowych, co ścian wymiaru $n - 1$.

Najbardziej podoba się to zdolnym uczniom. Humaniści mają trudności techniczne, ale staram się im wytłumaczyć, na czym polega uogólnianie twierdzeń matematycznych i w ogóle niektóre aspekty rozwoju matematyki. Nieco naciągając, mówię tak: kto z Państwa się zastanawiał dlaczego kwadrat ma tyle samo wierzchołków, co boków? Jeśli nawet tak, to kto się zastanowił nad pytaniem: jakiego ogólnego twierdzenia jest to szczególny przypadek? Tak właśnie często postępuje matematyk.

Można obliczyć kąt nachylenia przekątnej do podstawy. Ładne jest zadanie o skórce.

Zadanie o skórce. Ile objętości jabłka wymiaru n zawarte jest w skórce? Należy oczywiście przyjąć arbitralnie grubość skórki oraz „wytłumaczyć”, dlaczego objętość rośnie proporcjonalnie do n-tej potęgi promienia. To nie jest trudne: kwadrat składa się z czterech kwadracików o dwa razy krótszym boku, sześcian z ośmiu kostek o dwa razy krótszej krawędzi, a kostka n-wymiarowa z 2^n małych. Można się bawić wyliczeniami w jakiej przestrzeni na skórkę przypada połowa objętości. Efektowny jest taki wariant zadania:

W przestrzeni wymiaru 25 jajka są kuliste. Każde jajko jest pakowane w sześcianik, którego zewnętrzna krawędź ma 3 cm, a ścianki mają grubość 1 mm. Skorupka jajka ma grubość 1 mm. Ile procent objętości opakowania zajmuje białko i żółtko jajka?

Do rozwiązania tego zadania potrzebna jest umiejętność obliczania objętości kuli.

Zadanie. Obliczyć promień kuli wpisanej w kostkę n-wymiarową i kuli opisanej na takiej kostce.

Odpowiedź: wpisana ma promień 1/2, opisana $\frac{1}{2}\sqrt{n}$.

Można prosto rozwiązać wiele zadań dotyczących geometrii kostki (nachylenie przekątnej do podstawy, promień kuli wpisanej, opisanej i kuli stycznej do wszystkich krawędzi, zadania z rachunku prawdopodobieństwa na wędrówki muchy po krawędziach). Można tworzyć siatki kostki czterowymiarowej. Można grać w kółko i krzyżyk i jest to naprawdę bardzo ciekawe ... przez pewien czas (p. zadanie niżej).

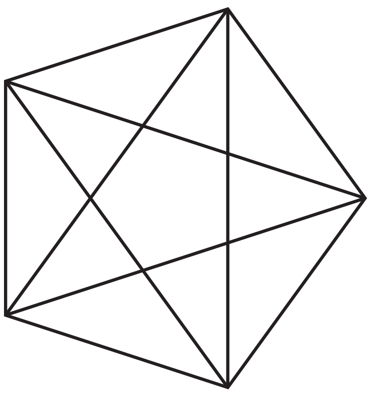
Jako zadanie „interdyscyplinarne” polecam:

Zadanie. Szkielet kostki n-wymiarowej zbudowany jest z drutu. Opór każdej krawędzi równy jest r. Do przeciwległych wierzchołków kostki podłączony jest prąd. Obliczyć opór całkowity układu.

Zadanie to jest pouczające również dlatego, że aby zrobić taki schemat połączeń, nie trzeba się zanurzać w przestrzeń wymiaru n – wystarczy pokombinować. Tak oto znajduje zastosowanie twierdzenie Kuratowskiego o spłaszczalności grafów.

Sympleks. Przechodzę do badania n-wymiarowego sympleksu. Pozornie nie ma w tym nic skomplikowanego (jeśli już słuchacze mają wystarczająco dużo wyobraźni), ale z praktyki mojej wynika, że jest to temat trudny. Sympleks nie jest bowiem tak prostą bryłą jak kostka, a z drugiej strony nie ma w nim tak wiele fascynującego, jak w kuli. Tak że jest to temat do omówienia ze zdolnymi uczniami i ... rozsądnymi nauczycielami {są tacy, zapewniam}.

Mówię tylko o sympleksie foremnym, który jest utworzony przez $n+1$ punktów tak, że wszystkie wzajemne odległości tych punktów są równe 1. Sympleksy można łatwo rysować. Wystarczy zaznaczyć na kartce n punktów tak, by żadne trzy nie leżały na jednej prostej i połączyć wierzchołki, każdy z każdym. Obok sympleks wymiaru 4, prawda, że ładny (tu wzruszam się, rzucam dygresję o złotym podziale, a gdy się opanowuję, to wyjaśniam, że wszystkie odcinki mają długość 1).



Łatwo dowodzi się (indukcyjnie, twierdzenie Pitagorasa) formułki na wysokość sympleksu:

$$h_n^2 = 1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 h_{n-1}^2$$

Przypominamy sobie wzór na wysokość trójkąta równobocznego i wyliczamy, że kwadraty wysokości kolejnych sympleksów są równe:

$$\frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \frac{7}{12}, \frac{4}{7}, \frac{9}{16}, \frac{5}{9}, \dots$$

co owocuje nam ładnym zadaniem na indukcję: wykazać, że $h_n = \sqrt{\frac{n+1}{2n}}$. Ciekawe, że granicą wysokości sympleksu przy n dążącym do nieskończoności jest $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Aby wyprowadzić wzór na objętość sympleksu, musimy przekonać (siebie i innych), że objętość ostrosłupa to $\frac{1}{n}$ iloczynu „pola” podstawy razy wysokość. To nietrudne. Łączymy środek kostki wymiaru n z wierzchołkami. Otrzymujemy $2n$ ostrosłupów, każdy o „polu podstawy” 1 i wysokości 1/2. A zatem objętość takiego ostrosłupa jest równa $\frac{1}{n}$ iloczynu „pola” podstawy razy wysokość ... i musimy przyjąć na wiarę, że tak jest dla wszystkich ostrosłupów. Wyprowadzamy stąd ładny wzór na objętość sympleksu o krawędzi 1:

$$v_n = \frac{1}{n!}\sqrt{\frac{n+1}{2^n}}$$

i wygenerowało nam się zadanie z analizy: obliczyć $\lim_{n\to\infty} v_n$. Nie potrzeba wielkiej wprawy, żeby zobaczyć, że granica jest równa 0. Ciąg (v_n) jest zresztą bardzo szybko zbieżny do zera, już v_4 jest równe 0,02.

Standardowo rozwiązuje się:

Zadanie. Wyliczyć promień kul (wpisanej, opisanej i stycznej do wszystkich krawędzi) w sympleksie, wyznaczyć kąty (np. kąty nachylenia krawędzi do podstawy) itd.

Niestety, żadne z przedstawionych przeze mnie audytoriów nie zainteresuje się głębiej takimi własnościami n-wymiarowego sympleksu, które można bez większego trudu przenieść z $n = 3$, tj. z czworościanu. Polecam np. zastanowienie się, które z własności czworościanu, o których pisałem w rozdziale 11 książki „Opowieści geometryczne" można uogólnić na dowolny wymiar. Podam jedną:

Jeżeli wszystkie wysokości n-wymiarowego sympleksu przecinają się w jednym punkcie, to każda ściana wymiaru k jest prostopadła do przeciwległej ściany wymiaru $n - k - 1$.

Dowód przenosi się bezpośrednio z przypadku $n = 3$. Oznaczmy wierzchołki sympleksu przez A_i, gdzie $i = 1, 2, \ldots, n + 1$. Niech O będzie punktem wspólnym dwóch wysokości, np. A_1H_1 i A_2H_2. Wtedy OA_1 jest wektorem prostopadłym do ściany $A_2A_3A_4 \ldots A_{n+1}$, natomiast OA_2 jest wektorem prostopadłym do ściany $A_1A_3A_4 \ldots A_{n+1}$. Krawędź $A_1A_2 = A_1O - OA_2$ jest zatem prostopadła do ściany $A_3A_4 \ldots A_{n+1}$, która jest przeciwległa do A_1A_2. To dowodzi twierdzenia w przypadku $k = 1$. Ciąg dalszy dowodu jest zrozumiały.

Punkt wspólny wysokości sympleksu nazywamy jego ortocentrum. Można też stosunkowo nietrudno zauważyć, że jeżeli sympleks ma ortocentrum, to istnieje w nim „sfera $3(n + 1)$ punktów" – sfera przechodząca przez spodki wysokości, środki ciężkości ścian i środki odcinków wysokości od ortocentrum do wierzchołków. Taka sfera jest odpowiednikiem okręgu dziewięciu punktów (okręgu Feuerbacha).

Kula i sfera. Pasjonująca jest opowieść o n-wymiarowej kuli i jej sferze. Najbardziej podoba to się właśnie humanistom. Trudności rachunkowe są tak duże, że należy je zostawić i skupić się na (quasi)-filozoficznym aspekcie sprawy. Dla porządku musimy kulę wymiaru n określić, na przykład jako zbiór punktów odległych od środka nie więcej niż o wartość promienia. Można też napisać równanie. Duże zainteresowanie wzbudza w słuchaczach wiadomość, że sfera niższego wymiaru leży na równiku sfery o większym wymiarze. Ja porównuję to do rosyjskich „bab": jedna w drugiej, ta w trzeciej i tak dalej.

Spójrzmy na tablicę objętości i pola powierzchni kul. Wyniki te przepisuję z podręcznika Fichtenholza do analizy. Otrzymano je tam obliczając odpowiednie całki wielokrotne:

$$|V_n| = \iiint\limits_{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\le r^2} \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\ldots\mathrm{d}x_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} r^n = \\ = \begin{cases} \dfrac{\pi^n}{m!} r^{2m} & \text{gdy } n = 2m, \\ \dfrac{2\cdot(2\pi)^n}{(2m+1)!!} r^{2m+1} = \dfrac{2\cdot(2\pi)^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2m+1)} & \text{gdy } n = 2m+1. \end{cases}$$

Pole powierzchni kuli n-wymiarowej

$$|S_n| = \iiint\limits_{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\le r^2} \frac{\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\ldots\mathrm{d}x_n}{\sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2}} = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} r^{n-1}$$

Ujęte w tabelkę, dane są następujące:

Wymiar	Objętość V_n kuli n-wymiarowej o promieniu r	Pole S_n powierzchni kuli n-wymiarowej o promieniu r	Stosunek objętości do pola powierzchni
3	$\frac{4}{3}\pi r^3 \approx 4{,}18r^3$	$4\pi r^2 \approx 12{,}57r^2$	$\frac{1}{3}r$
4	$\frac{1}{2}\pi^2 r^4 \approx 4{,}93r^3$	$2\pi^2 r^3 \approx 19{,}74r^3$	$\frac{1}{4}r$
5	$\frac{8}{15}\pi^2 r^5 \approx 5{,}26r^3$	$\frac{8}{3}\pi^2 r^4 \approx 26{,}32r^4$	$\frac{1}{5}r$
6	$\frac{1}{6}\pi^3 r^6 \approx 5{,}18r^3$	$\pi^3 r^5 \approx 31{,}01r^5$	$\frac{1}{6}r$
8	$\frac{1}{24}\pi^4 r^8 \approx 4{,}65r^8$	$\frac{1}{3}\pi^4 r^7 \approx 32{,}47r^7$	$\frac{1}{8}r$
9	$\frac{32}{945}\pi^4 r^9 \approx 3{,}30r^9$	$\frac{32}{105}\pi^4 r^8 \approx 29{,}69r^8$	$\frac{1}{9}r$
10	$\frac{1}{120}\pi^5 r^{10} \approx 2{,}54r^{10}$	$\frac{1}{12}\pi^5 r^9 \approx 25{,}50r^9$	$\frac{1}{10}r$
...			
25	$\frac{8192}{7905853580625}\pi^{12} r^{25} \approx \approx 0{,}00096r^{25}$	$\frac{8192}{316234143225}\pi^{12} r^{24} \approx \approx 0{,}02394r^{24}$	$\frac{1}{25}r$

Spójrzmy na te dane. Uderza nas, że w ostatniej kolumnie mamy wzór $\frac{1}{n}r$. Słuchacze to pojmą, jeżeli wytłumaczymy im, że kulę wymiaru n można traktować jako „zakrzywiony ostrosłup”, którego podstawą jest powierzchnia kuli, a wysokością – promień. Do wzoru na objętość ostrosłupa przekonaliśmy ich już wcześniej. Zatem druga kolumna tabelki jest równa trzeciej razy $\frac{1}{n}r$. Da się zauważyć jeszcze jedna inna prawidłowość, a mianowicie

$$S_n = 2\pi r V_{n-2} \qquad (*)$$

Co ona oznacza? Zgodzimy się łatwo, że pole powierzchni bocznej walca (dowolnego wymiaru) powinno być równe iloczynowi długości obwodu podstawy i wysokości walca. Skoro tak, to ze wzoru $(*)$ wynika od razu, że

pole powierzchni bocznej walca opisanego na kuli jest równe polu kuli!

A zatem odkrycie Archimedesa jest prawdziwe w dowolnym wymiarze!!!. Możemy zatem wprowadzić następujące „aksjomaty” dla objętości:

1) Dla $n = 2$ i $n = 3$ pole i objętość są określone tak, jak w szkole,

2) jeśli figurę powiększymy r razy, to objętość wzrośnie razy r^n,

3) objętość kuli $= \frac{1}{n}$promień $\times$ pole $(n-1)$-wymiarowej kuli,

4) pole powierzchni bocznej walca opisanego na kuli jest równe polu kuli!

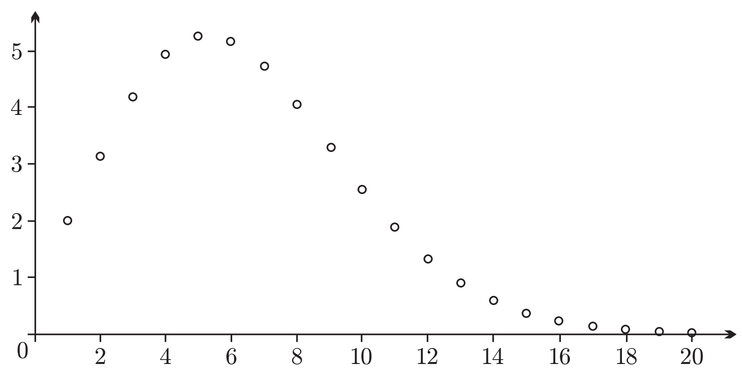
Objętości kolejnych kul możemy teraz wygenerować choćby i za pomocą Excela, ku radości uczniów, przerażeniu nauczycieli i podziwie humanistów.

W teorii literatury jest modna teoria światów możliwych. Specjaliści próbują tam napisać to, co dla matematyka jest chlebem codziennym: każda przestrzeń jest swego rodzaju „światem możliwym”. Tym chętniej wdają się w dyskusję, prawie taką, jak ta oto:

– by się żyło w takiej przestrzeni wymiaru n, gdzie n jest większe niż 3? Łatwiej czy trudniej? Chyba trudniej, tak jak latanie samolotem jest trudniejsze niż prowadzenie samochodu. Więcej wymiarów to większe kłopoty z orientacją.
– może, ale możliwie, że mielibyśmy jakieś dodatkowe zmysły.

Ale powieść o życiu z dodatkowym wymiarem, jednym, dwoma czy nawet dziesięcioma, to już nie moja sprawa. Istota czterowymiarowa mogła by nas wyjąć z domu pozostawiając nietknięte drzwi i ściany, mogłaby zabrać nam prawy but, obrócić go względem tej osi, której u nas nie ma (tej czerwonej) i zwrócić jako lewy. *Tam* każdy węzeł da się rozwiązać, a właściwie to w ogóle nie ma węzłów, bo każdy się natychmiast sam rozwiązuje, podobnie jak sznurowadła w butach przedszkolaka. A Karol Borsuk tak skomentował własne odkrycie, że przestrzeń trójwymiarowa da się zwinąć w coś w rodzaju kulki dowolnie małej średnicy w przestrzeni czterowymiarowej: „No, to teraz dziennikarze będą mogli pisać, że UFO przybywa do nas z przestrzeni czterowymiarowej".

– czy w czterech wymiarach dało by się grać w tenisa albo pchać kulą? Czy tam są w ogóle kule, takie równe, okrąglutkie?
– W każdej przestrzeni kula o promieniu r to zbiór punktów odległych od środka nie więcej niż o liczbę r. My piszemy na to nierówność... no $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq 1$.
– nawet w czterech wymiarach kula jest okrągła?
– Okrąglutka. Gładziutka. Taka sama w każdym punkcie. To wynika z jednorodności formy kwadratowej. Krzywizna odwrotnie proporcjonalna do promienia. Im większy promień, tym mniejsza krzywizna. Ale o prawa fizyki w przestrzeni czterowymiarowej proszę mnie nie pytać. Może są zupełnie inne?
– Może liczba π jest tam zupełnie inna?
– Nie, liczba π jest wszędzie taka sama.
– I jest tam $2\pi r$ i πr^2?
– Jest, oczywiście, a $\frac{4}{3}\pi r^3$ też. Ale czterowymiarowa objętość czterowymiarowej kuli to już $\frac{1}{2}\pi^2 r^4$.



Objętość kuli o promieniu 1 w przestrzeniach wielowymiarowych. Dla $n = 5$ objętość ta jest największa! Potem dąży do zera!!!

– Dlaczego?
– Tak już jest. Wyraża to całka poczwórna po objętości, względem formy różniczkowej $\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4$.
– formy różniczkowej? Czy coś podobnego do formy do ciasta? A bez całki nie da rady ?
– i się da, ale nasza ułomna, trójwymiarowa wyobraźnia może nam spłatać figle. Lepiej obliczać.
– ale lepiej by było w tych czterech wymiarach, czy gorzej?
– dociec. Szybciej byśmy marzli, ale bylibyśmy zwinniejsi.
– to ciekawe. Dlaczego. Jak to można sprawdzić?
– ani udowodnić się nie da, to tylko czyste spekulacje, zabawa intelektualna. Ale pouczająca. Spójrzmy na wzory. Stosunek objętości kuli do pola jej powierzchni jest gorszy niż w naszym świecie. Ponieważ ciepło ucieka z ciała (albo wnika do niego) całą powierzchnią, więc im gorszy ten stosunek, tym łatwiej upiec jabłko w piekarniku i tym szybciej tracimy ciepło na mrozie.
– A co z tą zwinnością?

– To samo. Mięśnie są blisko powierzchni ciała. Zatem im więcej ciała jest bliżej powierzchni, tym zwierzę jest zwinniejsze. Starczy porównać słonia i mysz. W przestrzeni czterowymiarowej ten stosunek działałby na naszą korzyść.

Być może fajnie by było żyć w przestrzeni o 25 wymiarach, ale proszę tylko spojrzeć na tabelkę, jakie wzory na objętość kuli musiały by wkuć dzieci!! Toż to były by narzekania na reformę edukacji! Tylko z wielościanami foremnymi było by lepiej. Wprawdzie w przestrzeni czterowymiarowej jest sześć „brył" foremnych (o 5, 8, 16, 24, 120 i 600 „ścianach" trójwymiarowych), ale począwszy od piątego wymiaru są tylko trzy!

* * *

N-wymiarowe zadania.

Zadanie 1. W pewnym n-wymiarowym kraju mamusia kupiła dzieciom jabłka i zaczęła obierać ze skórki. – Nie rób tego, mamusiu – zawołał Janek, a był on dobrym matematykiem. Skórka to wprawdzie tylko jedna setna grubości, ale przecież jest w niej aż

$$\frac{972991451417011951}{4882812500000000000}$$

zawartości jabłka. To prawie jedna piąta! W iluwymiarowym kraju to było?

Zadanie 2. Każdy zna grę w kółko i krzyżyk, popularną szubienicę. W tej prostej grze gracze stawiają na dziewięciopolowej szachownicy na przemian swoje znaki (kółka i krzyżyki), a zwycięzcą zostaje ten, kto pierwszy zdoła ustawić swoje trzy znaki w jednym rzędzie: pionowym, poziomym lub na przekątnej. Ta gra staje się szybko nieciekawa, bo już po kilku partiach można się zorientować, jak grać, żeby... nie przegrać. W podobną grę można grać w przestrzeni. Wyobraźmy sobie sześcian o wymiarach $4 \times 4 \times 4$. W każdej z 64 kostek tego sześcianu każdy z graczy może postawić swój znak (pionek), jeżeli oczywiście pole nie jest już zajęte. Wygrywa ten, kto pierwszy ustawi swoje cztery znaki na jednej linii prostej: pionowej, poziomej lub w dowolnej płaszczyźnie ukośnej. W tę przestrzenną grę można grać i na dwuwymiarowej kartce pokratkowanego papieru. Wyobraźmy sobie, że nasz sześcian został pocięty na plasterki. Narysujmy je obok siebie, zaczynając na przykład od dolnego, albo od lewego, zależnie od sposobu tego myślowego rozcięcia. Na otrzymanych kratkach możemy teraz stawiać swoje kółka i krzyżyki i przenosić je w myśli na sześcian. Ta gra nie znudzi się tak szybko jak jej płaski prototyp. Nasze zadanie polega na przeniesieniu tej gry do czwartego wymiaru. Kostkę czterowymiarową $5 \times 5 \times 5 \times 5$ tniemy na 5 sześcianów, każdy z tych sześcianów na 5 kwadratów. Plansza do gry gotowa. Naucz się grać i wygraj z kolegą. Napisz program komputerowy, który będzie grał za Ciebie.

To ostatnie polecenie autor książki dał jako zadanie uczniom - stypendystom Krajowego Funduszu na Rzecz Dzieci, na obozie naukowym w Jadwisinie koło Warszawy. Po dwóch dniach programy były gotowe i ... zaczęły grać same ze sobą...

Zadanie 3. Wykaż, że jeżeli znamy wzór na objętość kuli o parzystym wymiarze n, to objętość kuli wymiaru n da się łatwo obliczyć za pomocą podzielenia kuli na „poziome" plasterki i zsumowanie odpowiednich szeregów.

Zadanie 4. Jak, Twoim zadaniem, grało by się w piłkę nożną w przestrzeni 25-wymiarowej? Dyskusja na ten temat może być bardzo żywa.

Zadanie 5. Czy w przestrzeniach wysokich wymiarów jest łatwiej, czy trudniej ugotować jajko?

Zadanie 6. Wyobraź sobie Wszechświat wymiaru 25, w którym działa siła ciążenia odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości między ciałami. Masa rośnie gwałtownie z promieniem, więc Słońce mogło by mieć prawie rozmiar Ziemi. Słońce nasze ma bowiem masę 333400 razy większą niż Ziemia. Pierwiastek 25 stopnia z 333000 to 1,6625 . Zatem w przestrzeni 25-wymiarowej Słońce miało by promień 1,6625 razy Ziemia, a naprawdę ma 109,3.

Dygresja: Dlaczego zakładamy, że siła grawitacji działa odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu odległości, a nie do potęgi $n-1$? To tak na wyczucie autora. Wiadomo, że inna stała grawitacji = inny Wszechświat... i gdy to zrozumieją teoretycy literatury, zrobi im się żal, ze nie potrafią całkować, bo *stworzyliby sobie nowy, wspaniały Wszechświat, w którym na przykład Władca Pierścieni była by to pogodna opowieść dla dorastających panienek, a nie pełna horroru mroczna historia, jak zekranizowana wersja słynnego dzieła Tolkiena.*

Co komu to daje?

Czy umiecie się dziwić?, książka wydana przez Deltę, 1977.

Co zyskują słuchacze z takich zajęć? Sprawa jest skomplikowana. Najłatwiej odpowiedzieć na to pytanie w odniesieniu do uczniów. Pokazujemy im nowy, wspaniały świat. Takiej matematyki w szkole nawet nie poliżą, a tutaj są w stanie zrozumieć i rozwiązać wiele zadań. Przekazujemy im jedną z podstawowych zasad rozwoju intelektualnego: czy umiecie się dziwić. Nauczyciele są bardzo konkretni i niechętnie słuchają tego, o czym nie będą uczyć. Ich trzeba podejść, zadziwić i potraktować wszystko jako okazję do powtórzenia sobie rzeczy znanych: indukcja, zasada Cavalieriego, geometria czworościanu. Im mniejsze wycieczki poza program szkolny, tym lepiej (przynajmniej takie jest ich nastawienie). Najtrudniej z „humanistami". Wielu z nich chce na siłę „matematyzować" swoją dyscyplinę i wyniki są na ogół żałosne. Pisują często: jak wiadomo z matematyki . . . i dalej zamieszczają jakąś bzdurę albo banał. Po usłyszeniu o zbiorach rozmytych i chaosie myślą, że to to samo i nie wiedząc zupełnie o co chodzi, stosują wymyśloną przez siebie teorię. Szczególnie złą sławę przynosi stosowanie „rachunku" prawdopodobieństwa oraz topologii (te otoczenia, te zbiory otwarte, ta operacja domykania. . . .). Ale tak jest zawsze, zawsze znajdą się ludzie, którzy mając tylko powierzchowną wiedzę na dany temat, będą się wypowiadać tak, jak by byli pierwszej wody fachowcami. Prawdziwemu humaniście kontakt z matematyką przyczyni się do wzbogacenia jego *toposu.* Pierwotne znaczenie tego terminu to „zbiór wątków myślowych". Tylko tyle i aż tyle. Courant i Robbins piszą, że tylko czynne doświadczenie w dziedzinie matematyki pozwoli zrozumieć, czym ona jest. Dlatego ich słynna książka zatytułowana „Co to jest matematyka?" jest li tylko podręcznikiem. Czy zwróciliście uwagę, drodzy Czytelnicy, na dwuznaczność zawartą w tytule artykułu? Podstawowym problemem w zajęciach z niespecjalistami jest to, czy potrafimy przekazać im prawdziwy obraz naszej wiedzy, nie oszukując po dziennikarsku. Niektórzy z nas (matematyków) sądzą, że to niemożliwe, że tylko mącimy w głowach, albo dajemy do ręki ostre narzędzie, którym „oni" nie będą się umieli posługiwać.

Literatura a matematyka

Jeśli prowadzę zajęcia o przestrzeni (ogólniej: o matematyce) dla humanistów, to nieuniknione kwestie filozoficzne, jakie się pojawiają, staram się zepchnąć w obszar literatury. Filozoficzne rozumienie przestrzeni nie może konkurować z matematycznym i najczęściej rozmywa się w gadaniu. Co innego z literaturą, która – dokładnie jak i matematyka – sama jest fikcją.

Wśród teoretyków literatury mamy pełne spektrum poglądów na temat prawdziwości takich zdań jak „Sherlock Holmes palił fajkę". Słynne jest powiedzenie Stendhala: „powieść to zwierciadło przechadzające się po gościńcu". Podobnie wypowiadał się Prus. Chodzi oczywiście o to, że w powieści ma się wiernie odbijać świat zewnętrzny. Tak i ma być w matematyce: w końcu ma ona służyć do opisu świata rzeczywistego. Ale nie każde zwierciadło jest płaskie.

Peter F. Strawson mówi: zdania fikcji (zarówno takiej jak literacka, jak i matematyczna) nie są zdaniami w sensie logicznym. Odnoszą się do przedmiotów nieistniejących, a więc nie są ani prawdziwe ani fałszywe. . . *Deja vu*, wszystko już było, Protagoras w V wieku p.n.e wytykał, że geometria rozpatruje obiekty, których nie ma i być nie może. Nie jest więc nauką! W 2000 lat potem biskup Berkeley w podobny sposób zwalczał idee Newotna: wielkości nieskończenie małych nie ma, a wszystko jest dzieleniem zera przez zero . . . Roman Ingarden (*O tak zwanej prawdzie w literaturze*, 1937) jest bliski temu: zdania dzieła literackiego są to tak zwane quasi-sądy, ze względu na ich formalne podobieństwo do sądów, twierdzeń. Nie posiadają jednak asercji, to znaczy nie roszczą sobie prawa do prawdziwości poza obrębem utworu. Nieco podobnie wypowiada się Jerzy Pelc, utwór literacki jest samodzielny i istnieje poza życiem.

Dokładnie przeciwne ujęcie głoszą tacy teoretycy literatury jak Gerard Genette. Utwór literacki to swoista deklaracja, ustanawiająca byt przedstawionych zjawisk. *Soit, let it be*, niech się stanie. Definiując przestrzeń zwartą, ustanawiam, kreuję jej istnienie. To stanowisko szczególnie przemawia to teoretyków poezji. Poezja, mówią oni, stwarza odrębne światy, do których odbiorca wkracza razem z poetą, będącym po nich podróżnikiem. Wydaje mi się, że do każdego matematyka najbardziej przemawia koncepcja popularna w anglosaskim kręgu teoretyków literatury: koncepcja *make-believe*. Stwarzamy coś z wiarą, z nadaniem temu cech wiarygodności, ale odcienie tej wiary mogą być zróżnicowane. Stajemy się uczestnikami gry, prawie dziecinnej zabawy, gdzie udajemy, że tapczan to łódź podwodna, foremki z piaskiem to towar sprzedawany w sklepie itd. Bardziej dorosłe porównanie to teatr, umawiamy się by wierzyć w prezentowane wydarzenia, nie ingerując w nie: nie wskakujemy na scenę, by uwolnić Jasia i Małgosię z rąk czarownicy. Ale wierzymy w fikcję, bardzo wierzymy w naszą fikcję matematyczną i odczuwamy wzruszenie gdy zobaczymy ładne twierdzenie, dowód, pomysłową konstrukcję. Nicolas Boileau napisał: *L'esprit n'est point ému de ce qu'il ne croit pas* (umysł nie może się wzruszyć tym, w co nie wierzy, tłum. W Tatarkiewicz). Na nasze, to jest matematyków szczęście, nauka nasza ma zastosowania w życiu codziennym i rzeczywiście nie musimy się zastanawiać nad tym, czy powinniśmy pisać: niech X będzie przestrzenią zwartą, czy też może X oznacza przestrzeń zwartą. Filozofowie (np. Wittgenstein) bardzo starannie to rozróżniają, a dla nas ważne jest tylko, że z każdego pokrycia otwartego można wybrać pokrycie skończone. I tak trzymać.