Zapis odczytu wygłoszonego na XXX Szkole Matematyki Poglądowej *Osobliwości*, w styczniu 2003 roku.

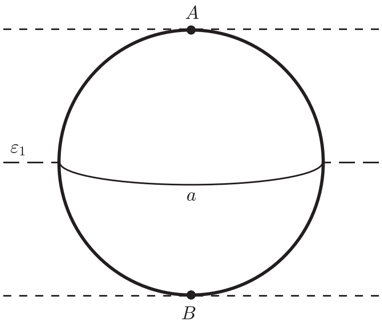
Teoria Morse'a według Möbiusa

Zdzisław POGODA, Kraków

Teoria Morse'a jest ważną i oryginalną teorią pozwalającą badać pewne obiekty matematyczne, rozmaitości (w szczególności powierzchnie) wykorzystując tzw. punkty krytyczne. Okazuje się, że bardzo podobne pomysły pojawiły się już prawie sto lat przed teorią Morse'a. Autorem ich był August Ferdinand Möbius.

W świecie matematycznym nazwisko Möbiusa kojarzy się przede wszystkim z powierzchnią jednostronną noszącą jego nazwisko. Została ona odkryta w 1858 roku i opisana w pracy przygotowanej na konkurs ogłoszony przez Paryską Akademię dotyczący uściślenia w różnych aspektach teorii wielościanów. Praca zatytułowana *Mémoire sur les polyèdres*, napisana słabą francuszczyzną, nie została doceniona przez oceniająca komisję, chociaż zawierała szereg bardzo ciekawych i ważnych pomysłów. Zawartość tej rozprawy została opublikowana w dwóch częsciach. Jedna ukazała się w 1863 roku pod tytułem *Theorie der elementaren Verwandtschaft*, a druga *Über die Bestimmung des Inhaltes eines Polyeders* w 1865 roku – obie w Lipsku.

Jednym z najciekawszych rezultatów topologii pierwszej połowy XX wieku było twierdzenie o klasyfikacji rozmaitości dwuwymiarowych, czyli powierzchni. Okazało się, że w tym nieskończonym mnóstwie kształtów można wprowadzić ład i zgrabnie je uporządkować. Próby klasyfikacji powierzchni podejmowano już w XIX wieku. Najciekawszą i najbardziej bliską doskonałości propozycję dał Möbius w pierwszej ze wspomnianych prac. Właśnie w tej pracy możemy doszukać się korzeni teorii Morse'a. Przyjrzyjmy się dokładniej tym pomysłom.



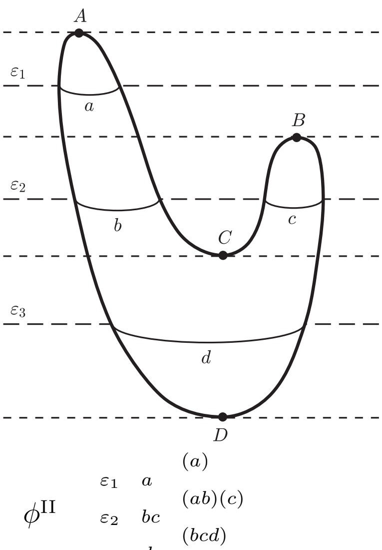
ϕ^{I} ε_1 a (a) (a)

Praca *Theorie der elementaren Verwandtschaft* zawiera pierwszą systematyczną próbę klasyfikacji powierzchni (orientowalnych) z dokładnością do homeomorfizmu. Naturalnie termin „homeomorfizm" jeszcze nie był użyty. Zamiast niego Möbius posłużył się wprowadzonym przez siebie elementarnym powinowactwem (ew. elementarną korelacją – tak można przetłumaczyć „elementare Verwandtschaft").

Dokładniej elementarne powinowactwo zostało zdefiniowane następująco:

> Dwie figury są w relacji elementarnego powinowactwa, gdy każdemu nieskończenie małemu elementowi jednej figury odpowiada nieskończenie mały element drugiej figury w taki sposób, że dwóm graniczącym ze sobą elementom jednej figury odpowiadają dwa graniczące ze sobą elementy drugiej.

Möbius tłumaczy definicję jeszcze inaczej: dwóm różnym nieskończenie bliskim punktom odpowiadają dwa nieskończenie bliskie punkty. W tym określeniu daje się rozpoznać intuicję homeomorfizmu.



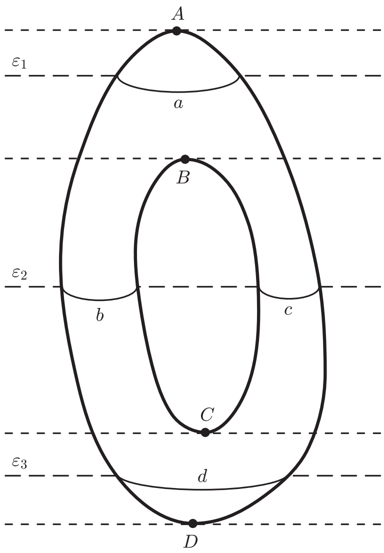
ϕ^{II} ε_1 a, ε_2 bc, ε_3 d; (a) $(ab)(c)$ (bcd) (d)

Nie będziemy dokładnie analizować całej pracy Möbiusa, zaznaczmy tylko, że jej plan w skrócie przedstawia się następująco:
– klasyfikacja płaskich obszarów (płaskich powierzchni) ze względu na elementarne powinowactwo,
– przypisanie każdej powierzchni odpowiednio skonstruowanych schematów,
– przedstawienie sposobów redukcji schematów z wykorzystaniem form podstawowych,
– sformułowanie i dowód twierdzenia podstawowego,
– wnioski wypływające z twierdzenia podstawowego.

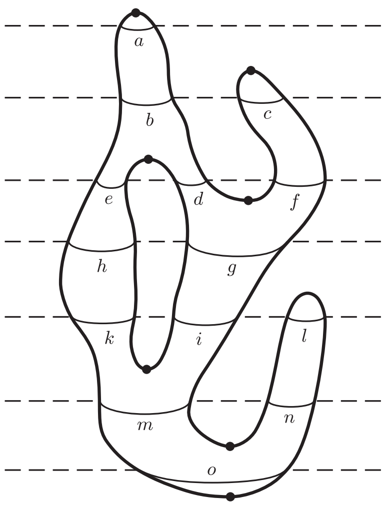
Na wstępie udowodnione jest, wykorzystywane w dalszym ciągu, twierdzenie:

> Dwie powierzchnie płaskie są elementarnie powinowate wtedy i tylko wtedy, gdy są ograniczone przez taką samą liczbę linii.

Należy wyjaśnić, że pod pojęciem powierzchni płaskiej, kryje się współczesne pojęcie spójnej i zwartej dwuwymiarowej rozmaitości z brzegiem, zawartej



$$\phi^{\mathrm{III}} \quad \begin{array}{ll} & \\ \varepsilon_1 & a \\ \varepsilon_2 & bc \\ \varepsilon_3 & d \end{array} \quad \begin{array}{l} (a) \\ (abc) \\ (bcd) \\ (d) \end{array}$$



$$\phi^{\mathrm{IV}} \quad \begin{array}{l} a \\ bc \\ def \\ gh \\ ikl \\ mn \\ o \end{array} \quad \begin{array}{l} (a) \\ (ab)(c) \\ (bde)(cf) \\ (eh)(dfg) \\ (hk)(gi)(l) \\ (ikm)(ln) \\ (mno) \\ (o) \end{array}$$

w płaszczyźnie. Ciekawe, że Möbius pojmując te obiekty bardzo intuicyjnie, uzyskał precyzyjne rezultaty dotyczące ich klasyfikacji.

Szczególnie interesujący jest pomysł Möbiusa klasyfikacji dowolnych powierzchni dwuwymiarowych zwartych bez brzegu.

Każdej powierzchni przypisany jest algebraiczny schemat będący czymś w rodzaju formy powierzchni, który jednoznacznie charakteryzuje powierzchnie.

Möbius rozważa położenia względem powierzchni płaszczyzn równoległych i analizuje powstałe przekroje. Można sobie wyobrazić, że przesuwamy płaszczyznę równolegle i analizujemy typy przekrojów powierzchni. Zmieniające się typy wyznaczają schemat opisujący powierzchnię.

Na przykładach przedstawimy ideę konstrukcji tych schematów. Zastosujemy oznaczenia przyjęte w oryginale przez Möbiusa.

Najprostszą powierzchnia zamkniętą jest sfera, oznaczmy ją ϕ^{I}. Niech ε_0 będzie płaszczyzną rozłączną ze sferą. Płaszczyzny równoległe do ε_0 będą albo rozłączne ze sferą, albo styczne, albo wreszcie będą przecinać sferę wzdłuż jednego okręgu.

Schemat przekrojów dla sfery przedstawia się następująco.

$$\begin{array}{lll} & & (a) \\ \varepsilon_1 & a & \\ & & (a) \end{array}$$

Symbol ε_1 oznacza płaszczyznę przecinającą sferę wzdłuż okręgu a. Symbole (a) pokazują, że od punktu styczności dochodzimy przekrojami do krzywej a (okręgu) i dalej od krzywej znów dochodzimy do punktu styczności. W skrócie schemat możemy zapisać

$$\phi^{\mathrm{I}} = (a) + (a)$$

Sens tego zapisu jest następujący: za pomocą cięć płaszczyznami sfera rozpada się na dwie powierzchnie (półsfery) ograniczone krzywą a.

Rozważmy teraz powierzchnię ϕ^{II}, która według współczesnej terminologii jest homeomorficzna ze sferą.

W tym przypadku, pomijając położenia ekstremalne (na przykład w punktach styczności), mamy trzy typy przekrojów:
– przekrój płaszczyzną wyznaczający krzywą a,
– przekrój płaszczyzną wyznaczający krzywe b i c,
– wreszcie przekrój płaszczyzną wyznaczający krzywą d.

Za pomocą tych przekrojów powierzchnia rozpada się na pięć części. Trzy z nich ograniczone są pojedynczymi krzywymi a, c i d, dlatego oznacza się je odpowiednio (a), (c) i (d). Jedna część jest ograniczona dwiema krzywymi a i b, którą oznaczamy (ab). Jedna wreszcie z części ograniczona jest przez trzy krzywe b, c i d – ją oznaczamy konsekwentnie (bcd). W skrócie schemat dla tej powierzchni możemy zapisać

$$\phi^{\mathrm{II}} = (a) + (ab) + (c) + (bcd) + (d)$$

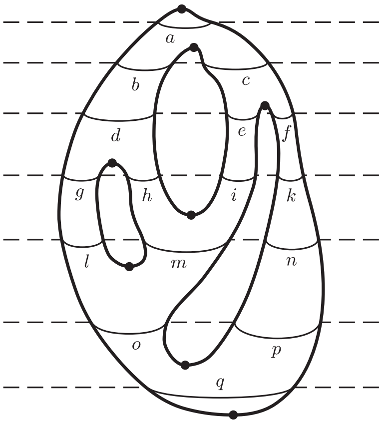
Rozważmy jeszcze przykład torusa i powierzchni z nim homeomorficznej.

Dla torusa oznaczonego w pracy Möbiusa symbolem ϕ^{III} schemat przedstawia się następująco

$$\phi^{\mathrm{III}} = (a) + (abc) + (bcd) + (d)$$

Tu mamy rozkład na cztery części: dwie ograniczone przez pojedyncze krzywe (a) i (d) oraz dwie ograniczone trzema krzywymi każda, co zapisujemy (abc) i (bcd). Dla powierzchni homeomorficznej z torusem schemat jest już bardziej skomplikowany

$$\begin{aligned} \phi^{\mathrm{IV}} = & (a) + (ab) + (c) + (bde) + (cf) + (eh) + (dfg) + (hk) \\ & (gi) + (l) + (ikm) + (ln) + (mno) + (o) \end{aligned}$$



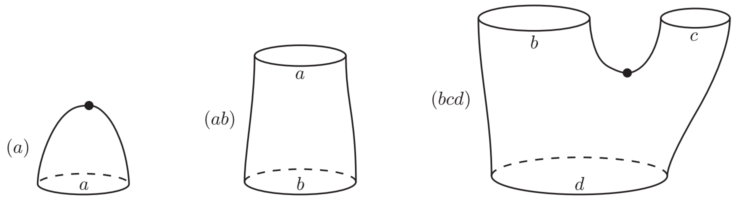
ϕ^{V}		(a)
	a	
		(abc)
	bc	
		$(bd)(cef)$
	def	
		$(dgh)(ei)(fk)$
	$ghik$	
		$(gl)(him)(kn)$
	lmn	
		$(lmo)(np)$
	op	
		(opq)
	q	
		(q)

Na koniec opiszmy jeszcze jedną powierzchnię, której forma jest również mocno rozbudowana.

Schemat tej powierzchni ma postać

$$\phi^{\mathrm{V}} = (a) + (abc) + (bd) + (cef) + (dgh) + (ei) + (fk) + (gl)$$
$$(him) + (kn) + (lmo) + (np) + (opq) + (q)$$

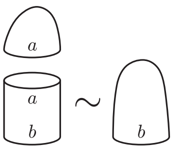
Konstruując schemat dla danej powierzchni dokonuje się również rozkładu tej powierzchni na pewne elementarne fragmenty – powierzchnie ograniczone jedną, dwiema, trzema i większą liczbą krzywych. Möbius nadał im nazwy odpowiednio union, binion i ternion. W ogólnym przypadku taka „cegiełka” ograniczona n krzywymi nazywana jest formą podstawową (prymitywną) klasy n.



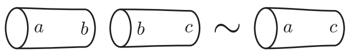
Każda forma podstawowa klasy n jest w elementarnym powinowactwie z powierzchnią płaską ograniczoną przez n krzywych, czyli dwie formy podstawowe różnych klas nie są homeomorficzne.

Möbius podaje sposoby redukcji schematów do prostszej postaci. Oto najważniejsze reguły:

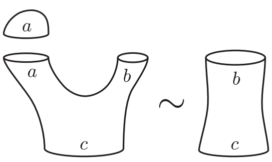
$$(a) + (ab) = (b)$$
$$(ab) + (bc) = (ac)$$
$$(a) + (abc) = (bc)$$
$$(ab) + (bcd) = (acd)$$
$$(abc) + (cde) = (abde)$$



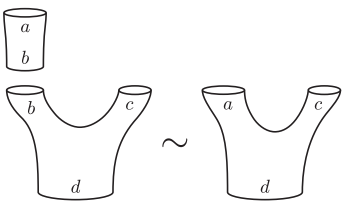
$(a) + (ab) = b$



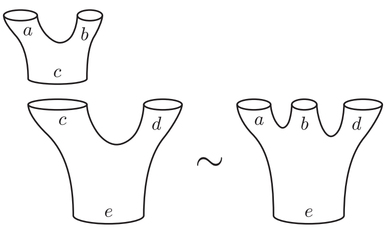
$(ab) + (bc) = (ac)$



$(a) + (abc) = bc$



$(ab) + (bcd) = (acd)$



$(abc) + (cde) = (abde)$

Za pomocą tych reguł schemat $\phi^{\mathrm{II}} = (a) + (ab) + (c) + (bcd) + (d)$ może być zastąpiony schematem $\phi^{\mathrm{II}} = (b) + (bd) + (d)$, ponieważ $(a) + (ab) = (b)$ oraz $(c) + (bcd) = (bd)$. Wreszcie $\phi^{\mathrm{II}} = (d) + (d)$ ze względu na to, że $(b) + (bd) =$ $= (d)$. Schemat został więc zredukowany do schematu sfery, co oznacza, że powierzchnia ϕ^{II} jest w elementarnym powinowactwie ze sferą. W taki sam sposób schemat $\phi^{\mathrm{III}} = (a) + (abc) + (bcd) + (d)$ redukuje się do schematu $\phi^{\mathrm{III}} = (bc) + (bc)$ i konsekwentnie do podobnego schematu redukuje się ϕ^{IV}. Wykonując analogiczne, choć nieco bardziej żmudne rachunki schemat ϕ^{V} można zredukować do postaci

$$\phi^{\mathrm{V}} = (hiln) + (hiln)$$

Oznacza to, że ϕ^{V} składa się z dwóch form podstawowych klasy czwartej. Może Czytelnik zechce sam spróbować wykonać odpowiednie rachunki albo wyznaczyć formy i ich zredukowane wersje dla jeszcze innych przykładów powierzchni.

Möbius definiuje klasę powierzchni zamkniętych następująco: powierzchnia jest klasy n, gdy może być rozłożona na dwie formy podstawowe klasy n. Zauważa jednocześnie, że powierzchnia klasy n nie może być podzielona za pomocą $n - 1$ linii.

Zgodnie z tym określeniem sfera ϕ^{I} i powierzchnia ϕ^{II} zaliczają się do klasy 1, torus ϕ^{III} i powierzchnia ϕ^{IV} są klasy 2, a powierzchnia ϕ^{V} reprezentuje powierzchnię klasy 4.

Wszystkie przedstawione rozważania prowadzą do sformułowania dwóch głównych twierdzeń:

1. Jeśli dwie powierzchnie ϕ i ψ należą do tej samej klasy, to są w elementarnym powinowactwie.
2. Dwie powierzchnie należące do różnych klas nigdy nie są w relacji elementarnego powinowactwa.

Reasumując otrzymujemy fundamentalne twierdzenie klasyfikacyjne

> Dwie powierzchnie zamknięte mogą być zaliczone do tej samej klasy wtedy i tylko wtedy, gdy są elementarnie powinowate.

W dalszej części pracy uzyskane rezultaty zostały wykorzystane do badania obiektów trójwymiarowych ograniczonych powierzchniami. Jednak brak precyzyjnego określenia pojęcia homeomorfizmu prowadzi Möbiusa do wniosków niekoniecznie prawdziwych. Na przykład twierdzenie, że dwie figury ograniczone przez powierzchnie pierwszej klasy są elementarnie powinowate, jest fałszywe. W 1924 roku J.W. Alexander podał przykład słynnej rogatej sfery będącej kontrprzykładem do twierdzenia Möbiusa.

Pomysł cięcia powierzchni płaszczyznami równoległymi przypomina metodę zastosowaną prawie sto lat później w teorii Morse'a do klasyfikacji rozmaitości za pomocą punktów krytycznych. Ciekawe, czy rezultaty Möbiusa miały wpływ na badania innych matematyków zajmujących się klasyfikacją powierzchni i, ogólniej, rozmaitości?

Warto jeszcze zwrócić uwagę na fakt, że Möbius napisał swoją pracę w wieku 68 lat łamiąc tym samym stereotyp, że nowe ważne rezultaty matematyk uzyskuje przed trzydziestym rokiem życia.

Literatura

[1] A.F. Möbius, *Theorie der elementaren Verwandtschaft*, Berichte über die Verhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, math-phys. Klasse, 1863, Bd.15, p. 18–57.

[2] J-C. Pont, *La topologie algébrique des origines a Poincaré*, Presses Univ. de France, Paris 1974.