Zapis odczytu wygłoszonego na XXX Szkole Matematyki Poglądowej *Osobliwości*, w styczniu 2003 roku.

Zbiory rozmyte dla początkujących

Piotr DWORNICZAK

Czy matematyka jest nauka ścisłą? Większość odpowiada na takie pytanie twierdząco.

A czy jest przydatna w życiu, w innych naukach? Na to pytanie odpowiedzi mogą być bardziej zróżnicowane. Może w technice, gdzie wymagane są dokładne przeliczenia i precyzja, ale np. w biologii czy medycynie? Dawno już wyśmiane zostały zalecenia mówiące o tym, że należy dziennie spożywać np. 57 g białka, 189 g węglowodanów itp. Obecnie wskazuje się, że zapotrzebowanie organizmu to około tyle i tyle przy umiarkowanych warunkach klimatycznych i ciężkiej pracy fizycznej. Gdzie tu ścisła matematyka? Otóż pojawiła się i tu, choć co prawda, jak na czas jej rozwoju, stosunkowo niedawno.

Od czasów Arystotelesa i Euklidesa logika, a w konsekwencji i matematyka opierała się w swoich rozważaniach na dwóch wartościach logicznych: „prawda" i „fałsz". Co prawda już wtedy twierdzono (Platon), że w pewnych przypadkach warto zauważać pewne „odcienie szarości" pomiędzy prawdą i fałszem, ale na takim stwierdzeniu poprzestawano. W czasach późniejszych pomysły te raz po raz wracały do filozoficznych rozważań, ale bez istotnych konsekwencji.

Dopingiem dla poszukiwań w tym zakresie były między innymi pewne paradoksy – jeden z nich, paradoks golibrody, przypisywany Russellowi jest następujący:

W pewnym miasteczku fryzjer goli tych i tylko tych wszystkich mężczyzn, którzy nie golą się sami. Kto goli fryzjera? (czy goli się „sam", czy goli go „fryzjer")

Na gruncie logiki klasycznej odpowiedź na to pytanie jest niemożliwa – prowadzi do sprzeczności. Rozważania mogą więc iść w kierunku uznania, że nasz fryzjer właściwie w jednakowym stopniu jest tym, który goli się „sam" jak i tym, których goli „fryzjer".

Potrzebne więc wydaje się wprowadzenie jakiegoś pośredniego orzeczenia między prawdą i fałszem.

Podwaliny pod formalną logikę uwzględniającą więcej niż dwie wartości logiczne położył polski uczony Jan Łukasiewicz. Oprócz prawdy (oznaczanej 1) i fałszu (0) zaproponował pierwotnie jeszcze trzecią wartość logiczną (1/2), interpretowaną jako możliwość. Podał przy tym zasady wykonywania operacji logicznych na zdaniach o tych wartościach logicznych. Później zajmował się również logikami wielowartościowymi oraz takimi, w których rozważa się nieskończoną ilość możliwych wartości logicznych (dokładniej mówiąc wartością logiczną zdania może być nie tylko prawda (1) i fałsz (0), lecz także dowolna liczba rzeczywista z przedziału $[0,1]$, interpretowana jako stopień prawdziwości podanego zdania).

Tego typu logikę postanowiono wykorzystać do określenia specyficznych zbiorów.

Zbiór (klasyczny) jest tzw. pojęciem pierwotnym matematyki, tzn. pojęciem którego nie można zdefiniować za pomocą pojęć prostszych. Potocznie przez zbiór rozumie się pewną zbiorowość, mnogość, zestaw obiektów (rzeczywistych lub abstrakcyjnych) w pewien sposób do siebie podobnych, jakoś ze sobą związanych. Zakłada się przy tym, że jest możliwe jednoznaczne stwierdzenie, czy dany element (obiekt) do zbioru należy, czy nie.

Czasem wygodnie jest określić zbiór za pomocą tzw. funkcji charakterystycznej.

Gdy oznaczymy zbiór przez A, to jego funkcja charakterystyczna χ (czyt. chi) przyjmuje dla danego elementu x wartość 1, gdy x należy do A, natomiast wartość 0, gdy x nie należy do A.

Symbolicznie notuje się to następująco

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x \in A \\ 0 & \text{gdy } x \notin A \end{cases}$$

Pomyślmy tymi kategoriami o paradoksie golibrody. Mężczyzn w naszym miasteczku można przypisać do zbioru S – tych, którzy golą się sami, albo do zbioru F – tych, których goli fryzjer. Do którego z nich należy fryzjer?

Dla dowolnego golącego się mężczyzny x prawdą jest, że $\chi_S(x) + \chi_F(x) = 1$ (co znaczy, że mężczyzna na pewno goli się sam **albo** goli go fryzjer). Ponadto można się zgodzić, że fryzjer (f) w takim samym stopniu należy do tych, którzy golą się sami jak i do tych których goli fryzjer, a to znaczy, że $\chi_S(f) = \chi_F(f)$.

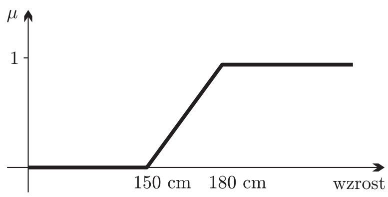
Ostatecznie z powyższych dwóch równości otrzymujemy wniosek, że $\chi_S(f) = \chi_F(f) = 1/2$.

Paradoks można więc rozwiązać wprowadzając pośredni, ułamkowy stopień „należenia" do zbioru.

W języku naturalnym często występują określenia zbiorów, dla których właściwie niezbędne jest wprowadzenie, podobnie jak powyżej, pośrednich stopni przynależności elementów. Popularnym przykładem takiego zbioru jest zbiór W ludzi wysokich.

Czy człowiek, mający 170 cm wzrostu jest wysoki?, a 169 cm?, a 168 cm? Gdzie leży granica między „wysokimi", a „nie wysokimi" ludźmi? Próba ustalenia takiej granicy jest śmieszna i nie może skończyć się zadowalającym rezultatem, usiłujemy bowiem przejść w tym miejscu z wygodnego naturalnego opisu świata przy pomocy pojęć jakościowych do opisu przy pomocy pojęć ilościowych.

Nie należy tego problemu w tym momencie porzucać, lecz przyjąć, że każdy człowiek jest wysoki, ale w pewnym stopniu! Stopień ten jest podany za pomocą liczby z przedziału $[0,1]$. Może to wyglądać następująco: ludzi o wzroście poniżej 150 cm nie uważamy za wysokich, więc przypisujemy im stopień 0 przynależności do zbioru ludzi wysokich W, natomiast ludzi o wzroście powyżej 180 cm za takich uważamy – przypisujemy im stopień przynależności równy 1. Osoby o wzroście między 150 a 180 cm mogą być również uznane za „wysokie", przy czym stopień przynależności jest pośredni między 0 a 1. Dość oczywiste jest, że wyższy człowiek powinien mieć co najmniej taki stopień przynależności co niższy. Przedstawmy to graficznie (rys. 1).



Rys. 1 Funkcja przynależności zbioru rozmytego ludzi „wysokich"

Z punktu widzenia matematyki jest to wykres pewnej funkcji, tzw. funkcji przynależności zbioru rozmytego. Wartość $\mu(x)$ w danym punkcie x (tzn. dla danego wzrostu x) interpretowana jest jako stopień, w jakim osoba o wzroście x należy do zbioru W ludzi wysokich. Można zauważyć, że funkcja przynależności jest uogólnieniem funkcji charakterystycznej (która nie dopuszcza częściowej przynależności).

Tego typu koncepcję opisu nieostro określonych zbiorów podał po raz pierwszy, w artykule *Fuzzy sets* w czasopiśmie *Information and Control* w 1965 roku, Lotfi A. Zadeh nazywając je zbiorami rozmytymi.

Formalnie zbiór rozmyty A określony w pewnej przestrzeni X to zbiór

$$A = \{(x, \mu(x)) : x \in X\},$$

gdzie $\mu : X \to [0,1]$ jest funkcją przynależności zbioru rozmytego A.

Wartość $\mu_A(x)$ jest więc liczbą z przedziału $[0,1]$, a nazywana jest stopniem przynależności elementu x do zbioru A.

Podanie zbioru rozmytego jest inaczej mówiąc podaniem klasycznego zbioru elementów, których przynależność rozważamy, wraz z ich stopniami przynależności.

Powyższe rozważania ukazują pierwszą osobliwość zbiorów rozmytych : funkcja przynależności, tzn. funkcja określająca zbiór rozmyty jest subiektywna (!), podawana przez człowieka.

Zbiór X nazywany jest przestrzenią albo uniwersum, na którym określamy zbiór rozmyty.

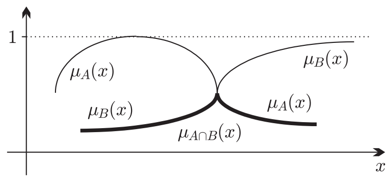
W przykładzie o „wysokich" osobach uniwersum to zbiór ludzi (dokładniej – wzrostu ludzi).

Rozważmy inny przykład.

Mamy cztery pralki oznaczone p, r, s, t, o podanych cenach 1000, 1100, 1300, i 1700 zł i klasach energetycznych D, C2, B, C1.

Zbiór T – tanich pralek może być określony następująco:
$T = \{(p; 1), (r; 0{,}9), (s; 0{,}7), (t; 0{,}4)\}$, co oznacza, że pralkę p uznajemy za tanią; w stopniu 1, pralkę r w stopniu 0,9 itd. Inaczej zbiór T zapisuje się w postaci $T = \{p/1, r/0{,}9, s/0{,}7, t/0{,}4\}$. W tym przypadku uniwersum to zbiór tylko tych czterech rozważanych pralek. Jest to zbiór skończony i dlatego wygodnie zapisywać zbiór rozmyty w jednej z powyższych postaci. Określmy jeszcze (np. na podstawie pewnych danych fabrycznych) zbiór pralek energooszczędnych $E = \{p/0{,}3, r/0{,}5, s/0{,}7, t/0{,}4\}$.

Pojawia się teraz naturalne pytanie o wybór pralki, która będzie tania i energooszczędna. Z punktu widzenia algebry zbiorów chodzi o wyznaczenie części wspólnej dwóch zbiorów rozmytych. Najczęściej stosowane podejście zostało wprowadzone przez Zadeha.



Rys. 2 Funkcja przynależności (typu minimum) iloczynu zbiorów rozmytych A i B: grubsza kreska.

Stopień przynależności danego elementu x do zbioru $A \cap B$ jest minimum ze stopni przynależności do zbioru A i do zbioru B.

Powyższe zdanie symbolicznie notuje się w postaci

$$(*) \qquad \mu_{A\cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$$

W przykładzie z pralkami $T \cap E = \{p/0{,}3, r/0{,}5, s/0{,}7, t/0{,}4\}$.

Zatem najbardziej „tania i energooszczędna” pralka to s.

Widać w tym momencie przewagę zbiorów rozmytych nad klasycznymi.

Przy wyborach na podstawie kilku kryteriów w przypadku zbiorów klasycznych najczęściej dochodzi się do wniosku, że nie ma elementu spełniającego jednocześnie wszystkie postulowane warunki. W przypadku stosowania zbiorów rozmytych każdy (!) element spełnia wszystkie warunki, aczkolwiek w pewnym stopniu.

Należy następnie znaleźć taki, dla którego stopień ten jest największy.

Wybory podobne do wyboru naszych pralek mogą dotyczyć wielu poważnych zagadnień. Pozostaje sztuka umiejętnego przełożenia na język zbiorów rozmytych choćby problemu *szybkiego* przewozu *dużych* ilości *łatwo psującego się* towaru przy *stosunkowo niewielkich* kosztach, wyznaczenia portfela papierów wartościowych o *dużym* oczekiwanym *zysku* i *niewielkim ryzyku*, w którym będzie *około* 50% obligacji itp.

Powyżej przedstawione wyznaczenie iloczynu zbiorów nie jest jednoznaczne. Najczęściej stopień przynależności określany jest formułą $(*)$. Ale innym sposobem wyznaczenia tego stopnia jest np. tzw. iloczyn algebraiczny lub probabilistyczny: $\mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$.

Łukasiewicz z kolei podał formułę $\mu_{A\cap B}(x) = \max\{0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1\}$, która nazywana bywa w literaturze właśnie t-normą Łukasiewicza lub różnicą ograniczoną.

Najogólniej, aby wyznaczyć stopień przynależności elementu do części wspólnej stosuje się operację nazywaną t-normą albo normą trójkątną.

t – norma to funkcja $t : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$ spełniająca warunki

1) funkcja t jest niemalejąca względem obu argumentów tzn.

$$a \le b \text{ i } c \le d \Rightarrow t(a, c) \le t(b, d),$$

2) funkcja t jest przemienna tzn.

$$t(a, b) = t(b, a),$$

3) funkcja t jest łączna tzn.

$$t(t(a, b), c) = t(a, t(b, c)),$$

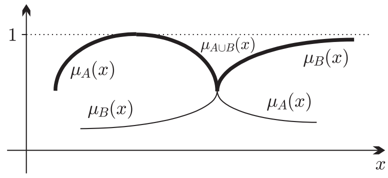
4) funkcja t spełnia warunek początkowy

$$t(a, 1) = a;$$

bywa, że postulowany jest jeszcze warunek $t(a,0)=0$, ale wynika on z poprzednich.

Warunki 1)–4) oczywiście nie pozwalają na jednoznaczne wyznaczenie postaci funkcji t.

Podobne, jak przy iloczynie, problemy występują przy wyznaczaniu sumy zbiorów rozmytych. Najczęściej stopień przynależności wyznaczany jest formułą podaną przez Zadeha



Rys. 3 Funkcja przynależności (typu maksimum) sumy zbiorów rozmytych A i B: grubsza kreska.

$$\mu_{A\cup B}(x)=\max\{\mu_A(x),\mu_B(x)\}.$$

Innym sposobem wyznaczenia tego stopnia jest tzw. suma algebraiczna lub probabilistyczna

$$\mu_{A\cup B}(x)=\mu_A(x)+\mu_B(x)-\mu_A(x)\cdot\mu_B(x).$$

Łukasiewicz natomiast podał formułę

$$\mu_{A\cup B}(x)=\min\{1,\mu_A(x)+\mu_B(x)\},$$

która nazywana bywa w literaturze właśnie s-normą Łukasiewicza lub sumą ograniczoną.

Najogólniej, aby wyznaczyć stopień przynależności elementu do sumy dwóch zbiorów stosuje się operację nazywaną s-normą albo t-konormą trójkątną.

s – norma to funkcja $s:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ spełniająca warunki

1) funkcja s jest niemalejąca względem obu argumentów tzn.

$$a\le b \text{ i } c\le d \Rightarrow s(a,c)\le s(b,d),$$

2) funkcja s jest przemienna tzn.

$$s(a,b)=s(b,a),$$

3) funkcja s jest łączna tzn.

$$s(s(a,b),c)=s(a,s(b,c)),$$

4) funkcja s spełnia warunek początkowy

$$s(a,0)=a;$$

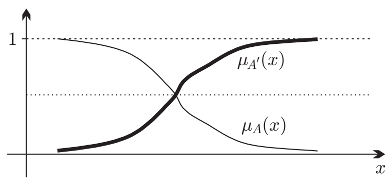
bywa, że postulowany jest jeszcze warunek $s(a,1)=1$, ale wynika on z poprzednich.

Warunki 1)–4) również nie pozwalają na jednoznaczne wyznaczenie postaci funkcji s.

Tak naprawdę t-normy i s-normy wiążą się z określeniem wartości logicznej koniunkcji i alternatywy zdań, a ponieważ w logice wielowartościowej operacje te określane są różnie, zatem wartości logiczne zdań „x należy do A i x należy do B" oraz „x należy do A lub x należy do B" są również różnie określone.

Oprócz sumy i iloczynu zbiorów podstawowym pojęciem jest także dopełnienie, zbioru rozmytego.

Dla danego zbioru rozmytego A określonego przez funkcję przynależności μ_A dopełnienie A' określone jest przez funkcję przynależności $\mu_{A'}(x)=1-\mu_A(x)$. Przykładowo gdy w przestrzeni $X=\{a,b,c,d\}$ określimy zbiór A postaci



Rys. 4 Funkcja przynależności dopełnienia zbioru rozmytego A: grubsza kreska.

$$A=\{a/0{,}4,b/0{,}5,c/1,d/0{,}1\}$$

to

$$A'=\{a/0{,}6,b/0{,}5,c/0,d/0{,}9\}.$$

W większości źródeł nie podaje się innego sposobu wyznaczenia dopełnienia zbioru rozmytego. Nie znaczy to jednak, że jest to niemożliwe.

Ogólnie, dopełnienie związane jest z operatorem logicznym negacji, czyli funkcją $n:[0,1]\to[0,1]$ spełniającą warunki

1) $a\le b\Rightarrow n(a)\ge n(b)$,

2) $n(n(a))=a$,

3) $n(0)=1$.

Warunki 1)–3) także nie pozwalają jednak na jednoznaczne wyznaczenie postaci funkcji n.

Mamy zatem drugą osobliwość zbiorów rozmytych: część wspólna i suma zbiorów rozmytych oraz dopełnienie zbioru rozmytego mogą być określone poprawnie na różne sposoby (!).

W klasycznym rachunku zbiorów występuje jeszcze różnica zbiorów $A - B$, ale ponieważ zachodzi równość $A - B = A \cap B'$, więc korzysta się z niej również w rachunku zbiorów rozmytych, wykorzystując oczywiście różne t-normy i negacje.

Z definiowaniem iloczynu, sumy i dopełnienia zbiorów rozmytych związana jest kolejna osobliwość. Zanim do niej przejdziemy zdefiniujmy równość zbiorów rozmytych, rozmyty zbiór pusty i rozmyty zbiór pełny.

Zbiory rozmyte A i B określone na uniwersum X są równe, gdy $\mu_A(x) = \mu_B(x)$, dla każdego $x \in X$.

Rozmytym zbiorem pustym $\emptyset$ w przestrzeni X nazywamy zbiór o funkcji przynależności $\mu_\emptyset(x) = 0$, dla każdego $x \in X$.

Rozmytym zbiorem pełnym F w przestrzeni X nazywamy zbiór o funkcji przynależności $\mu_F(x) = 1$, dla każdego $x \in X$.

Po tych definicjach zauważmy kolejną osobliwość: znane prawa logiki klasycznej $A \cup A' = X$ oraz $A \cap A' = \emptyset$ nie są w ogólności dla zbiorów rozmytych prawdziwe.

Łatwo zobaczyć to na przykładzie.

W przestrzeni $X = \{3, 4, 5, 6\}$ zbiór $A = \{3/0{,}4, 4/0{,}5, 5/1, 6/0{,}1\}$. Wtedy

$$A' = \{3/0{,}6, 4/0{,}5, 5/0, 6/0{,}9\}$$

oraz

$$A \cap A' = \{3/0{,}4, 4/0{,}5, 5/0, 6/0{,}1\} \neq \emptyset \quad \text{(iloczyn typu min)}$$
$$A \cup A' = \{3/0{,}6, 4/0{,}5, 5/1, 6/0{,}9\} \neq X \quad \text{(suma typu max)}$$

Można by było rozważać, czy te zbiory, nie będąc równe odpowiednio zbiorowi pustemu i pełnemu, są tym zbiorom „prawie równe" ?

Istotnie, w zbiorach rozmytych rozważa się stopnie równości i stopnie nierówności zbiorów, tzn. można mówić, że zbiory są równe w pewnym stopniu $e(A = B)$. Pełna równość jest równością ze stopniem 1.

Podobnie, różnie może być określone zawieranie się zbiorów rozmytych, klasycznie definiowane

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \quad \forall x \in X.$$

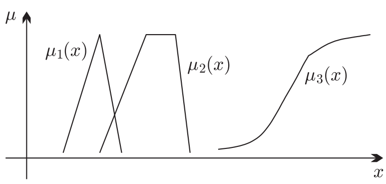
Jest to tzw. ostra definicja ale podobnie jak w przypadku równości można mówić o pewnym stopniu $c(A \subseteq B)$ zawierania się zbioru A w zbiorze B.

Zainteresowanych odsyłam do literatury.

Równość zbiorów związana jest z równoważnością zdań $x \in A$ oraz $x \in B$, natomiast zawieranie związane jest z implikacją, które bywają różnie definiowane.

Pojęcia te, podobnie jak negacja, koniunkcja i alternatywa należą do obszaru zainteresowań logiki rozmytej.

Przy definicji i działaniach na zbiorach rozmytych podstawową sprawą jest określenie funkcji przynależności. Zazwyczaj funkcje te określane są przez człowieka-eksperta przy uwzględnieniu jego doświadczenia i wiedzy oraz danych opisujących rozważane obiekty. Mamy tu kolejną osobliwość: określenie funkcji przynależności zbiorów rozmytych i adekwatnych działań na nich jest bardziej sztuką niż rzemiosłem.



Rys. 5 Funkcje przynależności typu trójkątnego, trapezoidalnego i sigmoidalnego

Przy zbiorach rozmytych typu ciągłego są to funkcje trójkątne, trapezoidalne, gaussowskie i sigmoidalne. Każda z nich ma pewne zalety i wady, i mniej lub bardziej nadaje się do opisu różnych zbiorów rozmytych (rys. 5).

Czy wobec tego rodzaju trudności i osobliwości warto stosować zbiory rozmyte i je badać?

No cóż, na co dzień świetnie dajemy sobie radę z rozumieniem i przetwarzaniem informacji typu „przyjdź *około czwartej* na spotkanie w *gronie najbliższych znajomych* i przynieś *trochę* tych *dobrych* kiełbasek do grilowania".

Skoro więc często operujemy nieprecyzyjnymi jakościowymi, ludzkimi określeniami, to być może należy również przetwarzać je na „ludzki" sposób.

Niezależnie od wad i zalet teoria zbiorów rozmytych się rozwija i ma zastosowanie.

Największą osobliwością jest, moim zdaniem, właśnie to, że to wszystko działa w praktyce!

Zbiory rozmyte są z powodzeniem stosowane w technice i przynoszą wymierne, konkretne i zupełnie nierozmyte korzyści.

Coraz częściej spotykamy na urządzeniach napis *fuzzy* lub *fuzzy logic* – FL.

Tak jest na przykład w przypadku dostępnych na naszym rynku pralek: Candy – ACS 1040, ACS 100, ACS 130, ACS 840, CSBL100PL, Hoover – AI 1040, AAA 160, AI 120, AL 120, Miele – W 487 WPS, W 467 WPS, W 433E, Elektrolux – EW 1220N, EW 1267F, Siemens - WIQ 1430, chłodziarko-zamrażarek : Haier – HRF 348A, HRF 368A, HRF 368/2; kamer video: Sanyo, Sony (w tych urządzeniach chodzi o optymalizację ostrości oraz kompensację przypadkowych poruszeń kamery, związanych z drganiem ręki, i umiejętności odróżnienia ich od ruchu filmowanego obiektu i ruchu kamery przy przesuwaniu, robieniu panoramy – dzięki FL zapobiega się „bezmyślnemu" działaniu stabilizatora obrazu).

Z powodu ograniczonej objętości artykułu nie napisałem właściwie nic na temat podejmowania decyzji w warunkach rozmytości (choć wybór przykładowych pralek jest takim najprostszym podejmowaniem decyzji), wnioskowania lub sterowania rozmytego, liczb rozmytych i logiki rozmytej. Zainteresowanym polecam literaturę (tu podaję tylko wybrane pozycje po polsku):

Czogała E., Pedrycz W.: *Elementy i metody teorii zbiorów rozmytych.* PWN Warszawa 1985.

Kacprzyk J.: *Wieloetapowe sterowanie rozmyte.* WNT Warszawa 2001.

Łachwa A.: *Rozmyty świat zbiorów, liczb, relacji, faktów i decyzji.* AOW EXIT Warszawa 2001.

Ostasiewicz W.: *Zastosowanie zbiorów rozmytych w ekonomii.* PWN Warszawa 1986.

Piegat A.: *Modelowanie i sterowanie rozmyte.* AOW EXIT Warszawa 1999.

Rutkowska D., Piliński M., Rutkowski L: *Sieci neuronowe, algorytmy genetyczne i systemy rozmyte.* PWN Warszawa 1997.