Co każdy o matematyce wiedzieć powinien

Wygłoszona 25 stycznia 2003 r. na XXX Szkole Matematyki Poglądowej w Grzegorzewicach.

(gawęda historyczna)

Roman DUDA, Wrocław

Matematyka jest elementem kultury, a przeto szukając jej źródeł rozsądną wydaje się rzeczą zacząć od dziejów kultury i tam starać się odkryć pierwotne źródła matematycznego myślenia. Jak wskazują badacze tych dziejów, najstarsze kultury pojawiły się w okresie paleolitu górnego (młodszego), tj. jakieś 40 000 lat temu. Zanurzone w mroku pradziejów, z trudem poddają się one badaniom, to i owo udało się jednak opisać. Okazuje się, że wszystkie poznane kultury prehistoryczne miały pewną istotną cechę wspólną, tę mianowicie, że wszystkie były zanurzone w mitologii i przeniknięte magią. Można nawet powiedzieć, że mitologiczno-magiczne przeżywanie świata było najstarszą formą ogarniania go człowieczą myślą i pierwszym świadectwem intelektualnej refleksji nad światem.

Dla człowieka takiej pierwotnej kultury fundamentalne znaczenie miały rytmy przyrody i życie wspólnotowe. W głębokiej łączności z przyrodą przeżywał on następstwo pór roku, kolejne fazy Księżyca były jego pierwszym kalendarzem, dzienny i roczny ruch Słońca uzupełniał ten kalendarz o rytm dobowy i kalendarz wieloletni, a obserwowane nocą konfiguracje gwiazd uczyły rozpoznawania kształtów i kierowały myśl ku sprawom wyższym. Równie ważne było życie wspólnotowe, a w nim więzy rodzinne i wewnętrzne układy hierarchiczne, szyki myśliwskie i bojowe, tańce kultowe, w tym kolejność wchodzenia na scenę (ważna w rytach stwarzania) i kształt figur tanecznych, budownictwo (sakralne, domowe, grobowe, obronne), elementy zdobnicze (figurki magiczne, rysunki naskalne, wzory garncarskie, ozdoby kobiece) itd. W rezultacie rodziło się rozumienie następstwa i kolejności, różnych związków i porządków, rozróżniania niektórych kształtów i rozpoznawania ich własności, a z czasem także miary i mierzenia, liczby i rachowania, kreślenia prostych figur itp.

Dla wyrazistości obrazu, w celu odróżnienia owych pierwotnych i nieostrych jeszcze koncepcji prehistorycznych od wyrosłych z nich później, już w czasach historycznych, koncepcji o wiele bardziej wyrazistych, bardziej abstrakcyjnych i dojrzalszych – będę te pierwsze nazywał proto-matematycznymi, a obejmujący je fragment kultury – **proto-matematyką**. Będąca naszą słuszną dumą matematyka nie wzięła się z niczego, lecz jej pojawienie się poprzedzał długi okres dojrzewania koncepcji proto-matematycznych. Żeby ograniczyć się do jednego przykładu, najpierw było nazywanie kolejno po sobie następujących faz lub osób, potem emancypacja tych terminów z generującego je kontekstu i dopiero po długim okresie czasu rozumienie ich jako nazw liczb pierwszy, drugi, trzeci, ... (były to więc raczej liczby porządkowe, a nie kardynalne: jeden, dwa, trzy, ...). Wobec konserwatyzmu starych kultur, którym każda zmiana wydawała się zagrożeniem, taki proces emancypacji mógł trwać długie tysiące lat. Ciekawego przykładu takiego procesu dostarcza analiza figurek w kształcie kół, kulek, walców, stożków itp., które kupcy babilońscy przesyłali w zamkniętych naczyniach glinianych dla zaznaczenia rodzaju i ilości towaru. Figurki takie były już używane ponad 9 tysięcy lat temu i przetrwały w niemal niezmienionym kształcie aż do pojawienia się pisma klinowego jakieś 5 tysięcy lat temu, które uczyniło je zbędnymi.

Kiedy po wielu tysiącach lat z mroków prehistorii wyłoniły się pierwsze cywilizacje historyczne, a były to cywilizacje wielkich rzek – Egipt (Nil), Babilonia (Tygrys i Eufrat), Indie (Hindus), Chiny (Huang-ho) – wszystkie miały już stosunkowo wysoko zaawansowaną proto-matematykę. W szczególności umiały zapisywać liczby i wykonywać na nich pewne działania (ich proto-arytmetyka, z jej odmiennym od naszego rozumieniem liczb i działań na tych liczbach, była oczywiście różna od naszej arytmetyki) oraz znały niektóre proste figury i ich własności, np. umiały wytyczać kąt prosty w terenie, obliczać powierzchnię poletka o kształcie kwadratu czy pojemność naczynia w kształcie walca (proto-geometria).

Czym była ta proto-matematyka w najstarszych cywilizacjach? Nie mając jeszcze własnej nazwy, była ona częścią wiedzy tajemnej, traktowaną jako wielki dar przodków czy bogów. Nikt oczywiście już nie znał początków tej wiedzy i nikt nie chciał i nie śmiał jej zmieniać. Trwała więc tak przez wieki, w stanie właściwie niezmiennym, mimo wojen, wstrząsów i zmian etnicznych. Ten wielki dar przekazywano nielicznym wybrańcom w sposób autorytarny, przez przerabianie wielkiej ilości konkretnych zadań. Wobec braku wyróżnionych w niej pojęć i sformułowań ogólnych, umysł ucznia przyswajał ją sobie przez obcowanie z konkretem, podobnie jak dzisiaj dziecko przyswaja sobie pojęcie konia czy sztukę chodzenia. Wiedza ta była jednak użyteczna, służyła bowiem kwatermistrzom wojskowym, poborcom podatków, nadzorcom wielkich robót, kupcom itp. I potrafiła bawić, o czym świadczą zadania, których znaczenie praktyczne jest żadne, natomiast treść zaciekawia i wciąga do zabawy.

Z taką wiedzą zetknęli się Grecy po zakończeniu podboju półwyspu greckiego i wybrzeży Azji Mniejszej, który miał miejsce w wiekach XV–VIII a.Ch.n. I poczynając od VII wieku a.Ch.n. dokonali w niej przełomu, którego zewnętrznym wyrazem było przejście od konkretu do ogólności i od zdań jednostkowych do zdań ogólnych. Prawdziwa wiedza, zdaniem Greków, kryje się w pojęciach ogólnych i zawierających je sądach ogólnych. Nie należy więc do takiej wiedzy zdanie, że w trójkącie o podstawie 2 i pozostałych dwóch bokach równych $\sqrt{5}/2$ kąty przy podstawie są równe $30°$, ale należy zdanie, że w każdym trójkącie równoramiennym kąty przy podstawie są równe. Największa trudność przy przejściu od konkretu do ogólności kryje się w tym, że pierwsze zdanie można zwyczajnie sprawdzić, np. rysując trójkąt o bokach 2, $\sqrt{5}/2$ i $\sqrt{5}/2$, natomiast w przypadku drugiego zdania taka metoda oczywiście kompletnie zawodzi.

Chcąc zrozumieć, skąd się taka zmiana wzięła, należy przypomnieć szerszy kontekst kulturowy. Otóż tak się jakoś stało, że kilku greckim „miłośnikom mądrości”, czyli filozofom (termin pochodzi od słów $\varphi\iota\lambda\varepsilon\iota\nu$ – kochać i $\sigma o\varphi\iota\alpha$ – mądrość), mitologiczny obraz świata przestał wystarczać. Pojawiła się mianowicie u nich obrazoburcza idea, że zjawiska przyrody nie zależą od wolnych (i kapryśnych) decyzji bóstw, od Zeusa gromowładnego, machającego młotem Hefajstosa czy innych mieszkańców Olimpu, lecz że są one koniecznym rezultatem samej przyrody. Było to tak całkowite zaprzeczenie mądrości poprzednich epok i wprowadzało taki ferment intelektualny, że w porównaniu z tym wszystkie późniejsze „rewolucje” naukowe są jak drobne fale na oceanie myśli.

Chcąc tę ideę wyrazić, potrzebowali Grecy pojęć, których nie było. Zaczęli więc te pojęcia mozolnie tworzyć, pojęcia takie jak materia i forma, przyczyna i skutek, substancja i właściwość, możność i akt, i inne, i przy pomocy tych pojęć wyrażać nowego rodzaju poglądy na świat. Wyrosła na tej drodze ogólna wiedza „miłośników mądrości” na temat świata nazywa się **filozofią**. Ale od samego początku obecna była także droga druga, matematyczna, która oczywiście także wymagała pojęć ogólnych. Tu jednak sprawa była prostsza, ogólne pojęcia matematyczne istniały już bowiem w formie utajonej w konkrecie proto-matematyki i wystarczyło tylko je wydobyć.

Grecka tradycja ten przełom od mitologii do filozofii przypisywała „siedmiu mędrcom”, różne zresztą wymieniając tu nazwiska, ale zawsze był wśród nich Tales z Miletu (624–547) i zawsze na pierwszym miejscu. Odwiedził on Egipt, a może i Babilonię, i poznał tamtejszą wiedzę, a po powrocie do macierzystej Jonii dokonał intelektualnego przewrotu. Był filozofem i stworzył pierwszą teorię o pochodzeniu świata, którą można nazwać naukową (była to teoria naiwna, że świat pochodzi z wody, ale była to pierwsza próba niemitologicznego objaśnienia świata), a jednocześnie zmienił oblicze proto-matematyki. W niezgodzie ze swoimi egipskimi i babilońskimi nauczycielami zaczął budować wiedzę opartą na wydobytych z niej pojęciach ogólnych, takich jak trójkąt, okrąg itp. i na sądach ogólnych, takich jak „w trójkącie równoramiennym kąty przy podstawie są równe” czy „średnica dzieli koło na dwie równe części”. Dostrzegł też potrzebę nowej metody dochodzenia do prawdy, zapoczątkował bowiem dowodzenie. Było to odważne i wyraźne przekroczenie znaków granicznych, jakimi są pojęcia ogólne i dowodzenie, przy przejściu od proto-matematyki jako pewnej umiejętności praktycznej, wiedzy bezrefleksyjnej, bez wyraźnych pojęć ogólnych i bez dowodzenia, do matematyki jako wiedzy abstrakcyjnej, posługującej się wyłącznie pojęciami ogólnymi i operującej dowodami jako podstawową metodą dochodzenia do prawdy.

Za Talesem poszli inni filozofowie. Był wśród nich Parmenides (około 540 – około 450) i jego eleaci, którzy swoją wiedzę filozoficzną wywodzili z kilku podstawowych zasad wyłącznie drogą dedukcji, przy czym często stosowali rozumowanie przez sprowadzenie do niedorzeczności (*reductio ad absurdum*). I jednocześnie z eleatami wystąpił Pitagoras (572–497) i jego następcy, tzw. pitagorejczycy, którzy skoncentrowali się na samej matematyce, a dostrzegłszy jej ślady nie tylko w liczbach i figurach, ale także w muzyce i astronomii, uznali ją za najbardziej podstawową wiedzę o świecie. Kto chciał poznać świat, musiał się tej wiedzy uczyć, po grecku $\mu\alpha\nu\tau\alpha\nu\epsilon\iota\nu$ i od tamtych czasów upowszechnia się nazwa $\tau\alpha\ \mu\alpha\tau\eta\mu\alpha\tau\alpha$, czyli **matematyka**, na jej oznaczenie. Posługując się metodą redukcji *ad absurdum* pitagorejczycy dokonali niezwykłego odkrycia, całkowicie sprzecznego nie tylko z potocznym doświadczeniem, ale będącego wręcz poza zasięgiem metod obserwacyjnych czy doświadczalnych: wykazali, że bok kwadratu i jego średnica nie mają wspólnej miary. Matematyka wykazała w ten sposób swoją moc i pitagorejczycy wydzielili ją z filozofii, rozumiejąc jej zakres tak, jak to pokazuje poniższy diagram:

MATEMATYKA

wielkości ciągłe | wielkości dyskretne

ruchome | stałe | absolutne | względne

ASTRONOMIA | GEOMETRIA | ARYTMETYKA | MUZYKA

Zaczął się burzliwy okres rozwoju matematyki, już jako autonomicznej dziedziny wiedzy. Tego rozwoju nie będziemy tu opowiadać, odnotujmy jedynie, że w IV wieku a.Ch.n. Arystoteles (384–322) w swoich *Analitykach* pierwszych podał opis struktury wiedzy pewnej w postaci **systemu aksjomatyczno-dedukcyjnego**, zaś w wieku następnym Euklides dokonał w swoich *Elementach* syntezy całego dotychczasowego dorobku matematyki greckiej, ubierając ten dorobek w jednolitą szatę geometryczną i nadając mu ową strukturę aksjomatyczno-dedukcyjną z *Analityk.* Ta świetna synteza ugruntowała czołową pozycję matematyki wśród innych nauk filozoficznych jako tej ich dziedziny, która zawiera abstrakcyjną wiedzę o świecie i posiada niezwykły walor pewności.

Powstanie, rozwój i ukształtowanie się matematyki w postaci pitagorejskiego quadrivium miało ogromny wpływ na dzieje myśli. W czasach greckich wpływ ten przejawiał się przede wszystkim w prymacie czystej racjonalności nad doświadczeniem i wysunięciu na plan pierwszy w poszukiwaniu wiedzy o świecie ideału wiedzy pewnej, której matematycznym wcieleniem były *Elementy* Euklidesa. Ideał okazał się więc osiągalny i do dzisiaj w naszej kulturze funkcjonuje. Doceniano też walor kształcący matematyki, np. Platon zalecał, by przyszłych kierowników państwa uczyć jej zasad. Elitaryzm matematyki miał jednak niewątpliwy wpływ i na to, że pomijano jej stronę ludyczną. Jeszcze bardziej istotnym czynnikiem ograniczającym wpływ matematyki na dzieje myśli był jej anty-empiryczny i, by tak rzec, nazbyt idealny charakter, nie pozwalający jej na zajmowanie się sprawami praktycznymi. W rezultacie zaniedbano stronę rachunkową i arytmetyka pojawi się dopiero w okresie dekadencji starożytnego świata (Diofantos w II wieku, Nikomachos w V wieku po Chrystusie). Nie zastosowano też matematyki do opisu ziemskiego świata. Opisywano natomiast z jej pomocą niebo, ale niebo należało do sfery ponadksiężycowej, którą uważano za idealną (Ptolemeusz, który w II wieku po Chrystusie zbudował system geocentryczny ruchu ciał niebieskich, posłużył się geometrią Euklidesa i arytmetyką Babilończyków).

Po upadku świata starożytnego kulturę matematyczną przechowali Arabowie, a niektóre jej dzieła, w tym późne i mierne, ale ważne kompilacje Boecjusza (480–524) i Kasjodora (480–575) – przechowały klasztory łacińskiego Zachodu i cesarstwa bizantyjskiego. Pod koniec średniowiecza matematyka odrodziła się w zachodniej Europie w kształcie przekazanym przez starożytność grecką i stopniowo odkrywanym dzięki kontaktom ze światem arabskim, przekładom łacińskim z arabskiego i greki oraz oryginałom greckim. Od początku powstania uniwersytetów matematyka odgrywała tam dużą rolę, na wydziale filozofii bowiem (a wydział ten był traktowany jako wstępny i obowiązkowy dla wszystkich) najpierw uczono trivium (gramatyka, retoryka, dialektyka), potem zaś quadrivium (geometria, astronomia, arytmetyka, muzyka). I chociaż zakres tego quadrivium bywał więcej niż skromny, np. w zakresie geometrii ograniczano się czasem zaledwie do dwóch pierwszych ksiąg *Elementów* Euklidesa, to jednak każdy student musiał się jakiejś matematyki uczyć, a w konsekwencji rosła jej znajomość i świadomość znaczenia. Nie zaniedbywano też elementu ludycznego. Jeszcze w VIII wieku Alkuin (735–804) napisał dziełko *Propositiones ad acuendos juvenes* (Tematy dla ćwiczenia młodzieńców), w którym układał rozmaite zadania matematyczne w formie zagadek. Wiele takich zadań umieścił Leonardo z Pizy, zwany Fibonaccim (ok. 1180–1250), w swojej *Liber abaci* i innych dziełach. We Włoszech dochodziło do turniejów matematycznych z udziałem Nicolo Tartaglii (1500–1557), Geronimo Cardano (1501–1576) i innych. Ta wczesna matematyka europejska służyła także prostym potrzebom życiowym, takim jak obliczanie kalendarza (już Beda Czcigodny, ok. 673–735, napisał na ten temat dzieło) czy prowadzenie ksiąg kupieckich i bankowych. Tym ostatnim zajmowali się zawodowo *maestri d'abaco* we Włoszech i *Rechenmeistern* w Niemczech, pisujący także kalendarze i podręczniki rachunkowości, a nadto z reguły prowadzący swoje szkółki.

Upowszechnia się system dziesiętny (w wiekach XV i XVI jest już powszechnie używany na monetach w całej Europie środkowej, w Polsce od roku 1502, ale do Rosji dotrze dopiero w roku 1654), odkrycie zaś ułamków dziesiętnych i logarytmów niepomiernie zwiększyło jego siłę rachunkową. Ta siła bardzo się przydaje astronomom, jednakże pojawiają się także inne bodźce, takie jak malarskie zagadnienie perspektywy (z czego wyrośnie geometria rzutowa) czy problem rysowania dokładnych map morskich, szczególnie ważny w owej epoce wielkich odkryć geograficznych. Nadal jednak fizyka i technika obywają się bez matematyki.

Czas około roku 1500 jest okresem wielkich zmian. Po odkryciu Ameryki następuje jej podbój, wystąpienie Lutra w Wittemberdze zapoczątkowuje Reformację, wynalazek druku pozwala na upowszechnienie książek, upadek Konstantynopola i przybycie greckich uczonych wraz z ich rękopisami umożliwia Europie poznanie całej spuścizny cywilizacji starożytnej, rozwija się technika, a wraz z nią pojawia się dużo dodatkowej energii, którą dostarczają młyny wodne i wiatraki itd.

W takiej atmosferze, gdzieś na peryferiach ówczesnego wielkiego świata, zrodziła się skromna z pozoru myśl, by matematykę zastosować także do fizyki ziemskiej. Myśl skromna, przypomnijmy wszakże, że ówczesna fizyka, której ojcem i pierwszym mistrzem był Arystoteles, była jakościowa i obywała się bez matematyki. Uważano (idąc w tym za filozofią Arystotelesa), że celem poznania jest dotarcie do „istoty rzeczy”. Oznaczało to, że badając jakieś zjawisko najważniejsze dla ówczesnego uczonego było pytanie „co to jest?”, ewentualnie „do czego to zmierza?”, o wiele zaś mniej istotne było pytanie „jak to dokładnie jest?". Ważniejsze było więc pytanie „co sprawia, że kamień wyrzucony w górę spada?" (na które fizyka arystotelesowska odpowiadała, że dąży on do zajęcia swojego naturalnego miejsca), niż pytanie „jak on spada?".

Galileusz (1564–1642) miał poprzedników, a szczególnie dużo zawdzięczał późnym scholastykom i ich badaniom zjawiska ruchu, jednakże jego wpływ był największy. Odwrócił on mianowicie opisaną przed chwilą postawę i jest to główny powód, dla którego uważamy go za jednego z wielkich pionierów nowożytnej nauki. Od jego czasów fizyka i inne nauki, przede wszystkim tzw. ścisłe, zajmują się dokładnym opisywaniem samych zjawisk, wnikanie w istotę rzeczy pozostawiając innym. Sam Galileusz podał dokładny opis, jak ciała spadają pod działaniem siły ciążenia, wysuwając na plan pierwszy takie pojęcia jak czas, odległość, prędkość, przyspieszenie, pęd, masa, bezwładność itp., których w fizyce Arystotelesa nie było, bądź odgrywały tam rolę podrzędną, zupełnie natomiast pominął drogie dla arystotelików pytanie, czym jest owa siła ciążenia?

Tak zaczął się trzeci wielki okres w dziejach matematyki: po proto-matematyce czasów prehistorycznych i najstarszych cywilizacji i po matematyce klasycznej starożytnych Greków następuje okres matematyki nowożytnej, charakteryzującej się zarówno pojawieniem się nowych narzędzi matematycznych jak i matematyzacją całej fizyki, a w ślad za nią i techniki. Tak się szczęśliwie złożyło, że niemal współcześnie z Galileuszem nastąpiło odkrycie metody analitycznej przez Kartezjusza (1596–1650) oraz rachunku różniczkowego i całkowego przez Newtona (1642–1727) i Leibniza (1646–1716), które otworzyły niezwykłe perspektywy przed matematyką i fizyką. Pierwszym spektakularnym sukcesem na tej drodze był opis mechaniki całego świata, dany przez Newtona w jego epokowym dziele *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1686). Matematyka przeniknęła mechanikę, za którą poszły hydrodynamika, teoria ciepła, teoria sprężystości, teoria potencjału, elektromagnetyzm i inne działy fizyki, tak że w XIX wieku cała już fizyka znalazła się w jej zasięgu, a za fizyką poszła i technika.

W wyniku tego procesu w XIX wieku wyłonił się **paradygmat**: najlepszym sposobem opisywania świata są **równania różniczkowe**. Paradygmat ten pociągał za sobą przekonanie, że świat jest **deterministyczny**, ale miał on też swoją cenę. Stosunkowo łatwe jest wyprowadzanie tych równań, natomiast ich rozwiązywanie stanowi dziś obszerną dziedzinę matematyki.

Dzięki imponującym zdobyczom matematyki, fizyki i astronomii udało się trochę przeniknąć świat i uchwycić w nim pewien porządek. Ale świat nadal był pełen zjawisk nieuporządkowanych. Na przykład, co począć z jednym miligramem gazu, zawierającym sto trylionów (10^{20}) cząsteczek, gdzie samo zapisanie równań ich ruchu wymagałoby powierzchni porównywalnej z obszarem ograniczonym przez orbitę Księżyca. Ruch ten wydaje się deterministyczny, lecz jego opis i analiza tego opisu przekraczają nasze możliwości.

Z ratunkiem przyszła nauka o przypadku, czyli rachunek prawdopodobieństwa, który również rodził się gdzieś na marginesie „oficjalnej" nauki, w tymże samym zresztą wieku XVII. Okazało się, że przypadek nie jest – by tak rzec – całkiem przypadkowy. Jeśli wziąć pod uwagę szerszą klasę doświadczeń, wyrażając je przez wartości średnie, to przypadek ma pewne cechy regularne. Odkrywaniem tych cech i metodami ich obliczania zajmuje się **teoria prawdopodobieństwa** oraz jej utylitarny kuzyn – **statystyka**. W ten sposób nauka zdobyła drugi ważny paradygmat modelowania matematycznego, **paradygmat probabilistyczno-statystyczny**. O ile paradygmat równań różniczkowych jest w zasadzie stosowalny do całego świata, lecz praktyczne jego znaczenie ogranicza się do zjawisk stosunkowo prostych i dobrze uporządkowanych, to paradygmat statystycznej analizy wielkości uśrednionych reprezentuje z kolei przybliżone cechy układów bardzo złożonych.

Te dwa paradygmaty są dwoma różnymi sposobami patrzenia na świat. Determinizm równań różniczkowych dla układów prostych, z kilkoma tylko stopniami swobody, stochastyka dla układów złożonych, z wieloma stopniami swobody. Paradygmaty równoprawne, lecz całkowicie odmienne. W XX wieku matematyka procesów deterministycznych rozkwitała razem z matematyką procesów stochastycznych. Wielkim sukcesem tej pierwszej był opis struktury czaso-przestrzennej całego Wszechświata, podany przez Einsteina (1879–1955) w jego **ogólnej teorii względności**, ale porównywalnym z tym sukcesem drugiej była **teoria kwantów** Plancka (1858–1947), podająca opis świata subatomowego. Są to dwa różne sposoby opisywania jednego i tego samego świata i takie jest dziedzictwo, jakie pozostawił nam wiek XX.

Co będzie w wieku XXI? Jeśli popatrzeć na próby oceny stanu i perspektyw matematyki w latach 1700, 1800 i 1900, to wszystkie były chybione, niektóre nawet bardzo. Mimo to, jak sądzę, można zaryzykować pogląd, że będą trwały wysiłki na rzecz pogodzenia obu paradygmatów. W tej chwili ambicje takie zgłasza **teoria strun**, której główna idea polega na rozmyciu pojęcia punktu, by stał się „struną" niosącą bogatą strukturę matematyczną, oraz **teoria chaosu**, będąca ciekawą próbą uchwycenia stochastycznego zachowania układów deterministycznych. Obie teorie przyniosły ciekawe wyniki, a że matematycznie są bardzo pociągające, to zapewne najbliższe lata będą okresem ich szybkiego rozwoju. W każdym razie wiek XXI rysuje się dla matematyki wielce obiecująco.

Co z tego wynika dla „każdego", a ściślej, „co każdy o matematyce wiedzieć powinien"? Jest to pytanie ważne, bo od trafnej na nie odpowiedzi zależy przyszłość naszej kultury matematycznej, a może i przyszłość naszej cywilizacji. Jedną z konsekwencji odpowiedzi na to pytanie będzie przecież stanowisko w sprawie fundamentalnej: jakiej matematyki i kogo mamy uczyć w szkole?

Nie znam odpowiedzi. Pozwolę sobie jednak zwrócić uwagę na dwa wnioski, które zdają się płynąć z kończącej się gawędy. Jeśli zgodzić się na przedstawiony w niej pogląd, że dzieje matematyki dzielą się na trzy wielkie okresy (proto-matematyka, matematyka klasyczna, matematyka nowożytna), to zauważmy, że umysł przeciętnego dziecka był w stanie nadążyć za jej rozwojem tylko w dwóch pierwszych. Proto-matematyka mówiła językiem potocznym, a matematyka klasyczna językiem bliskim potocznemu. W matematyce nowożytnej natomiast mamy już rozziew, który z każdym rokiem staje się większy, a próby nadążania (jak „nowa matematyka" z lat 1960.) kończyły się dramatycznymi klęskami szkoły. Szkoła musi więc wybierać, a to oznacza dramatyczne rozchodzenie się elity (nazwijmy ją, nieściśle, uniwersytecką), która będzie wiedzieć, a ogółem społeczeństwa, które poprzestało na wykształceniu szkolnym i tej elitarnej wiedzy z zasady będzie pozbawione. Optymistyczny wariant rozwoju, to społeczeństwo „gry szklanych paciorków" (tytuł powieści H. Hesse'a, napisanej pod wpływem rozmów z H. Weylem). I drugi wniosek, wiążący się zresztą z pierwszym: matematyka nowożytna utraciła charakter ludyczny. Nie bawi, bo do zabawy może zaprosić tylko nielicznych, ale nawet dla tych nielicznych jest ona na to zbyt poważna.