Jest to zapis odczytu wygłoszonego na XXIX Szkole Matematyki Poglądowej „Przestrzeń”, Grzegorzewice, sierpień 2002.

Przestrzeń metryczna

Jerzy MIODUSZEWSKI, Katowice

Dziękując za zaproszenie umożliwiające mi wygłoszenie odczytu na temat Uniwersalium umieszczonego w tytule odczytu, zastrzegam się od razu na początku, że będzie mowa jedynie o przestrzeniach metrycznych z osobna i to w dodatku niedużych. Wydaje się, że na liczbę pojedynczą, a więc na godność, jaką jest Uniwersalium, zasłużyła w matematyce jedynie prawdziwa Przestrzeń, nazywana Euklidesową, z tym jeszcze zastrzeżeniem, że jest wymiaru 3. Innymi uniwersaliami są jeszcze Płaszczyzna i Prosta, mające jednak swoje oddzielne nazwy.

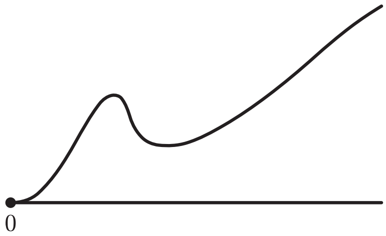
1. Przestrzenie metryczne powstają w wyniku zmetryzowania przestrzeni topologicznych, tj. przez przypisanie każdej parze $\{u, v\}$ punktów przestrzeni topologicznej T liczby nieujemnej $d(u, v)$ nazywanej *odległością* punktów u i v, równej 0, jeśli $u = v$, i tylko wtedy. Zbiory $K(a, r)$ złożone z punktów odległych od a o mniej niż r nazywane są kulami o środku a i promieniu r. Wymaga się by każdy zbiór otwarty tej przestrzeni zawierał wraz z każdym swoim punktem kulę o środku w tym punkcie, i żeby tę własność miały tylko zbiory otwarte. Funkcja d przyporządkowująca parom $\{u, v\}$ odległości nazywana jest *metryką*. Od funkcji d wymaga się, by spełniała umotywowany praktyką geometryczną *warunek trójkąta*, tj. by dla dowolnych trzech punktów przestrzeni każda między nimi odległość nie była większa od sumy dwu pozostałych. Dzięki warunkowi trójkąta, kule okazują się zbiorami otwartymi, stanowiąc bazę dla zbiorów otwartych przestrzeni, których zakres nazywany jest *topologią* przestrzeni.

Mieści się wśród nich także normalność i istnienie baz pewnego typu, którymi to własnościami daje się scharakteryzować topologie metryzowalne.

Nie każda przestrzeń topologiczna daje się zmetryzować, co widać chociażby stąd, że w podanych wymaganiach mieści się oddzielalność w sensie Hausdorffa. Jeśli jednak daje się zmetryzować, to na ogół na wiele sposobów.

2. Metryki odpowiadające danej przestrzeni topologicznej nie muszą być z sobą związane jakimś wzorem arytmetycznym. Na przykład, płaszczyznę można zmetryzować przyjmując za odległość jej punktów pierwiastek z sumy kwadratów różnic współrzędnych (odległość euklidesowa), jak i przyjmując za odległość maksimum wartości bezwzględnych różnic współrzędnych. W pierwszym przypadku kulami są koła bez brzegu, w drugim kwadraty bez brzegu o bokach równoległych do osi. Można pomyśleć wiele innych metryzacji płaszczyzny, dla których wzory na odległość nie mają między sobą – podobnie jak w podanych dwu przykładach – naturalnych związków arytmetycznych.

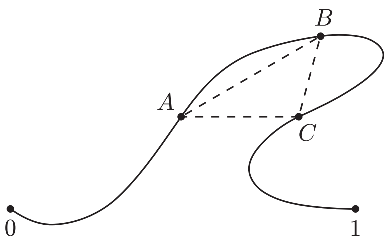
Zbiór wartości funkcji d, tj. zbiór liczb, które są odległościami punktów w metryce d, jest podzbiorem półprostej $P = \{x : x \geq 0\}$ zawierającym zero. Mając dany wzór d na odległość można przestrzeń *przemetryzować* (tj. wykorzystać daną odległość dla określonia nowej, przy tym samym zakresie zbiorów otwartych, tj. topologii), przyjmując nowy wzór na odległość między punktami u i v w postaci $f(d(u, v))$, gdzie f jest funkcją odwzorowującą półprostą P w siebie spełniającą pewne warunki, wśród których jako minimum wymieńmy na razie wymaganie, by funkcja f była równa 0 punkcie 0 i tylko wtedy, oraz ciągłość funkcji f w punkcie 0. Funkcja f powinna jeszcze spełniać pewne warunki zapewniające warunek trójkąta dla funkcji $f \circ d$. Wystarczy w tym celu wymagać, by z tego, że trójki a, b, c, będące odległościami w metryce d spełniają nierówności wymagane dla warunku trójkąta, wynikało, że spełniają te nierówności także trójki $f(a), f(b), f(c)$.



Rys. 1. Funkcja f

Ze wstępnego kursu topologii – p. K. Kuratowski, *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, Warszawa 1977, str. 149, ćw. 6 – dobrze znane jest przemetryzowanie dane wzorem $f(d) = \frac{d}{1+d}$, zastępujące daną metrykę d metryką ograniczoną (przez 1).

3. Wcale nietrywialną ilustracją wprowadzanych tu pojęć jest *odcinek liczb rzeczywistych* – dla ustalenia uwagi odcinek $[0, 1]$ – z odległością między punktami u i v równą wartości bezwzględnej $|u - v|$ różnicy liczb u i v.



Rys. 2. Łuk dziedziczący metrykę z płaszczyzny

Odcinek $[0,1]$ można przemetryzować zanurzając go w płaszczyznę w postaci łuku krzywoliniowego takiego jak np. na rys. 2. Odległości punktów są teraz takie, jakie te punkty mają jako punkty płaszczyzny. Pojawiają się na tym łuku trójki punktów tworzących istotne trójkąty (tj. trójkąty, których trójka wierzchołków nie leży na jednej prostej, których nie może być na odcinku), np. trójka ABC na rys. 2.

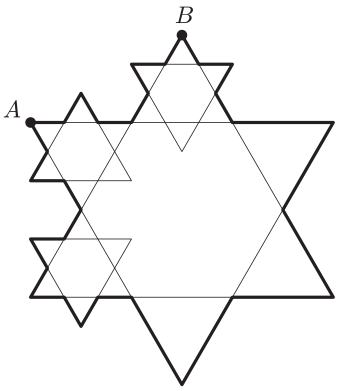
Zmieniła się struktura odległości, ale jeśli na łuku przyjmiemy za zbiory otwarte przekroje tego łuku ze zbiorami otwartymi płaszczyzny, to są one (poprzez dokonane zanurzenie) w odpowiedniości wzajemnie jednoznacznej ze zbiorami otwartymi na odcinku $[0,1]$. Inaczej: topologie łuku i odcinka są – modulo dokonane zanurzenie – te same. Używając ogólnie przyjętej terminologii, odcinek i nasz łuk są *homeomorficzne*. Biorąc pod uwagę bogactwo położeń łuków na płaszczyźnie (dotyczy to także położeń w przestrzeni trójwymiarowej oraz w innych przestrzeniach) można zapytać o to, jak dalece można zdeformować metrycznie odcinek nie zmieniając jego topologii.

R. H. Bing (1914–1986) – wybitny topolog amerykański.

4. R. H. Bing pokazał, że można tak przemetryzować odcinek, by każde dwa jego punkty były wierzchołkami pewnego trójkąta równobocznego.

Helge v. Koch – matematyk niemiecki znany z prac z teorii funkcji. Słynny *płatek* pochodzi z pracy z roku 1906, Acta Mathematica 30, str. 145–174, *Une méthode géométrique élémentaire par l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes*; cytowanie według W. W. Gołubiewa, *Odnoznacznyje analiticzeskije funkcji. Awtomorfnyje funkcji*, Moskwa 1961.

Żeby mieć rozeznanie co do trudności zadania i jednocześnie mieć pewne przewidywania co do rozwiązania, przypomnijmy stary przykład, jakim jest okrąg topologiczny znany jako *płatek Kocha*. Płatek Kocha jest stanem granicznym konstrukcji, której punktem wyjścia jest trójkąt równoboczny (p. rys. 3). Trójkąt ten przecinamy przystającym do niego trójkątem tak, że powstaje gwiazda mająca sześć ramion w postaci trójkątów równobocznych zmniejszonych w stosunku 1: 3. Na każdym z tych trójkątów powtarzamy opisaną operację i postępowanie kontynuujemy, za każdym razem odnotowując obwiednie powstających figur. Przez płatek Kocha rozumie się granicę tych obwiedni.



Rys. 3. Płatek Kocha

Płatek Kocha jest homeomorficzny z okręgiem, a jego łuki z odcinkiem. Wymaga to dowodu, który pomijamy, ale nie ze względu na trudności, lecz z powodu konieczności podania szczegółowej konstrukcji odwzorowania (homeomorfizmu), którego opis zależy od szczegółów opisu geometrycznego płatka Kocha, który był jedynie z grubsza naszkicowany.

Na płatku Kocha nietrudno zobaczyć trójki tworzące trójkąty równoboczne (są dowolnie małe tego rodzaju trójkąty). Natomiast są pary punktów, dla których nie znajdzie się trzeciego dopełniającego parę do trójkąta równobocznego. Taka parą jest np. para A, B sąsiednich wierzchołków gwiazdy pierwszego przybliżenia, p. rys. 3. Płatek Kocha nie daje więc rozwiązania zadania Binga.

W przestrzeniach bogatszych, w których dwa punkty mogą być łączone więcej niż jednym łukiem, przez odległość wewnętrzną rozumie się długość najkrótszego łuku. Przymiotnik „wewnętrzna" w nazwie bierze się stąd, że odległość między punktami określona jest wyłącznie przy pomocy wielkości związanych z samym łukiem. Na temat metryk wewnętrznych p. W. Rinow, *Die innere Geometrie der metrischen Räume*, Springer, Grundlehren d. Math. Wiss. 105, 1961.

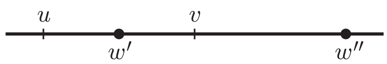
Metryczną osobliwością płatka Kocha jest to, że jego łuki nie mają długości (długości ich przybliżeń łamanymi rosną nieograniczenie, czego dowód wymaga pewnego rachunku). Z tego powodu nie można na łuku płatka Kocha wprowadzić tak zwanej *metryki wewnętrznej*, w której odległości punktów mierzone byłyby długościami łuków o końcach w tych punktach.

R. H. Bing, *An equilateral distance*, Amer. Math. Monthly 58 (1951), 380–383; p. również *The Collected Papers of R. H. Bing*, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island 1998, str. 107–110.

5. *Łuk równoboczny Binga* – tak go nazwijmy – powstaje z odcinka $[0,1]$ przez przemetryzowanie za pomocą odpowiednio dobranej funkcji f spośród tych, które były opisane w punkcie 1.

Wartościom a będącym odległościami punktów na odcinku $[0,1]$ przypiszmy liczby $f(a)$. Przyjmijmy – co jest konieczne – że $f(0)=0$, oraz – co jest naturalnym uproszczeniem – że $f(1)=1$. Wartości funkcji f poza $a=0$ będą – zgodnie z wymaganiami z 1. – dodatnie. Funkcja będzie tak budowana, by było stale $f(a)\leq 1$.

Aby uzyskać dla każdej pary punktów u i v odcinka trzeci punkt w tworzący w metryce $f\circ d$ (przypomnijmy, że przez d oznaczamy zwykłą metrykę na $[0,1]$) wraz z punktami u i v trójkąt równoboczny, Bing proponuje rozważyć dwu kandydatów na w , a mianowicie punkt w' będący środkiem odcinka $[u,v]$, oraz



Rys. 4.

punkt w'', taki że v jest środkiem odcinka u, w'' – p. rys. 4 (nie musimy żądać zaistnienia punktu w'', który może wypaść poza odcinkiem $[0, 1]$).

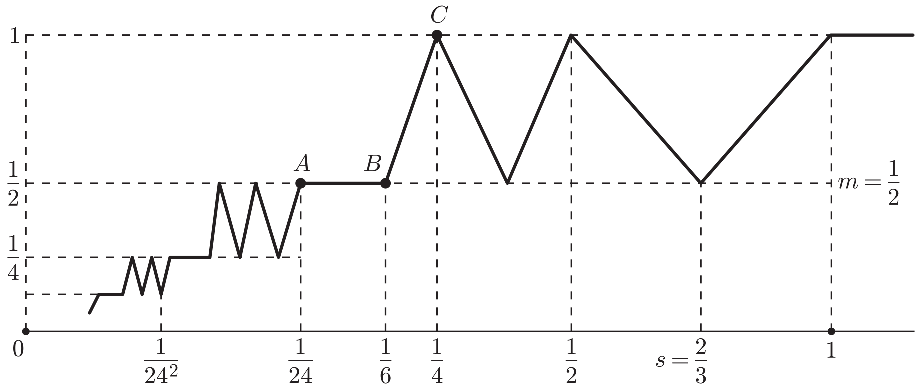
Jeśli teraz od funkcji f będziemy wymagać, by dla każdego a z odcinka odległości było

$$(1) \qquad f(a) = f(a/2) \text{ lub } f(a) = f(2a),$$

to żądany punkt w zawsze znajdziemy, biorąc za w bądź punkt w' bądź punkt w''.

Rzecz sprowadza się więc do zbudowania funkcji f mającej własność (1) dla wszelkich a.

6. Konstrukcja funkcji f. Skoro przyjęliśmy $f(1) = 1$, to wobec wymagania (1), musi być $f(1/2) = 1$. Zgodnym z warunkiem (1) będzie wtedy $f(1/4) = 1$. Przebieg funkcji na przedziale $[1/2, 1]$ wybierzmy dowolnie. Możnaby przyjąć $f(a) = 1$ stale na tym przedziale, ale ze względów, które wyjaśnią się później, przyjmiemy przebieg nietrywialny, chociaż najprostszy z możliwych, a mianowicie przebieg liniowy na przedziałach $[1/2, s]$ i $[s, 1]$ z minimum w punkcie s równym m. Dla ustalenia uwagi będziemy przyjmować za Bingiem $s = 2/3$ i $m = 1/2$, zostawiając na później uwagi o roli, jaką ma wybór tych parametrów dla własności określanej metryki. Wybór przebiegu funkcji f na odcinku $[1/2, 1]$ determinuje wobec (1) i $f(1/4) = 1$ przebieg funkcji na odcinku $[1/4, 1/2]$, a ten z kolei przebieg na odcinku $[s/4, 1/4]$, tak jak pokazuje rys. 5.



Rys. 5. Funkcja f Binga

Jest kwestią sprawdzenia, że określona dotąd – na odcinku $[s/4, 1]$ – funkcja f spełnia warunek (1).

Pokażemy – za Bingiem – że można ją przedłużyć na pozostałą część $[0, s/4]$ odcinka tak, by spełniała wymagane warunki, w tym warunek (1).

Jeśliby chodziło tylko o warunek (1), można by uzyskać takie przedłużenie określając jej przebieg na odcinku $[s/2, s]$ (z ograniczeniem górnym równym m i dolnym równym m^2) i na dalszych otrzymywanych w trakcie konstrukcji odcinkach, analogicznie do przebiegu określonego na $[s/4, 1]$, schodząc w ten sposób do punktu $(0, 0)$, przyjmując – przy zachowaniu ciągłości – $f(0) = 0$.

Jednakże, mamy zadbać również o warunek trójkąta.

Nie ma żadnych przeszkód przy utrzymaniu warunku (1), by na przedziale $[s/4^2, s/4]$ przyjąć $f(a) = m$ stale, co zostało uwzględnione na rys. 5, na którym za Bingiem przyjęliśmy $s = 2/3$ i $m = 1/2$, przez co zbudowany fragment funkcji f określony jest na przedziale $I = [1/24, 1]$ z ograniczeniami wartości od $1/2$ w lewym końcu przedziału do 1.

Przedział I – oznaczany dalej przez I_1 – jest pierwszym z ciągu przedziałów $I_1, I_2, \ldots$, gdzie $I_j = [1/24^j, 1/24^{j-1}]$, na których wartości funkcji f określa się tak jak na przedziale I, z ograniczeniami dolnymi równymi $1/2^j$ i górnymi równymi $1/2^{j-1}$. Mamy $\lim_{a \to 0} f(a) = 0$ przy a dążącym do 0, skąd ciągłość funkcji f w punkcie 0. Ale, zwróćmy uwagę na osobliwość funkcji f, jaką ma w początku układu. Jest mianowicie

$$\lim_{a\to 0}\frac{f(a)}{a}=\infty, \tag{2}$$

co znaczy, że pochodna funkcji f w zerze jest równa nieskończoności.

7. Funkcja $f\circ d$ spełnia warunek trójkąta. Dla sprawdzenia tego warunku, wystarczy, wobec uwagi poczynionej w punkcie 3., wziąć trzy odległości a,b,c metryki d spełniające nierówności wymagane w warunku trójkąta, i wykazać, że te warunki będą spełniały również liczby $f(a),f(b),f(c)$.

Przyjmijmy dla ustalenia uwagi, że dane liczby a,b,c są w relacji

$$a\le b\le c. \tag{3}$$

Warunek trójkąta dla a,b,c redukuje się do nierówności

$$c\le a+b, \tag{4}$$

bo pozostałe dwie nierówności mieszczą się w (3).

Przyjmijmy, że środkowa odległość b leży na odcinku I_j.

Nierówność

$$f(a)\le f(b)+f(c) \tag{5}$$

jest łatwo widoczna, bo nawet jeśli $f(a)$ ma maksymalnie możliwą wartość, którą jest 2^{j-1}, to dwie pozostałe wartości $f(b)$ i $f(c)$, nie mogąc być mniejsze niż 2^j, przeważą w sumie wartość $f(a)$.

Pozostaje dowieść dwu pozostałych nierówności:

$$f(b)\le f(a)+f(c) \tag{6}$$

i

$$f(c)\le f(a)+f(b). \tag{7}$$

Dostaje się je dość prosto, jeśli a leży (wraz z b) na odcinku I_j. Wtedy $f(a)$ jest co najmniej 2^j. Nierówności (6) i (7) stają się jasne, jeśli zauważyć, że różnica między $f(b)$ i $f(c)$ nie przekracza tej liczby. To zaś wynika z (4). Istotnie, z $c\le a+b$ wynika, że c – jeśli nie leży na I_j – leży na pododcinku odcinka I_{j-1}, na którym funkcja f ma wartość stałą, równą swojej maksymamalnej wartości na I_j. To wyjaśnia sprawę, bo wahanie funkcji f na I_j jest 2^j.

Trudność pojawia się w przypadku, kiedy $f(a)$ jest małe, tj. kiedy a leży na lewo od I_j, tj. na pewnym odcinku I_k, gdzie $k>j$. Również i teraz punkt c leży bądź na I_j, bądź na przedziale stałości funkcji f na I_{j-1}.

Pokażemy – za Bingiem – że

$$f(a)/a\ge|f(c)-f(b)|/|c-b|, \tag{8}$$

tj., że cięciwy nad $[c,d]$ są nie bardziej strome niż cięciwy nad $[0,a]$. Nierówność (8) sprawdzimy w szczególnym przypadku, kiedy punkt b leży na I_1. Wtedy a leży na pewnym I_k, $k<1$,a punkt c leży bądź na I_1 bądź na przedłużeniu tego odcinka w prawo, na którym funkcja f ma stała wartość 1. Ten szczególny przypadek wystarcza, bo stromość po lewej stronie nierówności wzrasta szybciej niż stromość po prawej ze wzrostem wskaźnika j, przy którym b leży na I_j.

Niech więc b leży na I_1. Nietrudno zauważyć – ilustruje to rys. 6(a) – że stromość cięciw nad $[0,a]$ jest nie mniejsza niż $1/4:1/24=6$; jest realizowana na odcinku OA, p. rys. 5. Stromość cięciw nad $[b,c]$ nie przekracza stromości wykresu funkcji f na przedziałach jej liniowości, a najbardziej stromym spośród nich jest odcinek nad $[1/6,1/4]$ oznaczony jako BC na rys. 5, a jego stromość jest równa $1/2:(1/6-1/4)=1/2:1/12$, a więc też 6.

Z dowiedzionej w ten sposób nierówności (8) dostajemy

$$f(a)\ge(a/|c-b|)|f(c)-f(b)|.$$

Ponieważ czynnik $a/|c-b|$ jest – wobec (4) – nie mniejszy niż 1, więc dostajemy $f(a)\ge|f(c)-f(b)|$, skąd, obie nierówności (6) i (7).

8. Łuk równoboczny Binga nie może dziedziczyć swojej metryki z płaszczyzny. Ogólniej, jeśli zbiór mający więcej niż 3 punkty jest zwarty, to jego metryka dziedziczona z płaszczyzny nie może być równoboczna.

D o w ó d. Niech AB będzie jakąkolwiek parą punktów łuku Binga. Niech C będzie punktem zbioru tworzącym z punktami A i B trójkąt równoboczny. Jeśli zbiór ma jeszcze jakieś punkty, to nietrudno stwierdzić, że jest wśród nich punkt D leżący na zewnątrz trójkąta ABC. Weźmy spośrod punktów A, B, C punkt najbardziej odległy od D. Powiedzmy, że jest to punkt C. Oczywiście, punkt D nie jest żadnym z punktów A i B. Z kolei dla pary C, D weźmy punkt E uzupełniający tę parę do trójkąta równobocznego. Wtedy jeden z boków AE lub BE okaże się dłuższy od boku trójkąta ABC; w istocie, ta większa długość – AE lub BE – jest co najmniej $\sqrt{7}/2$ długości boku trójkąta ABC (to minimum osiągnie się biorąc jako D środek boku AB). Iterując postępowanie dostajemy dowolnie duże odległości. Sprzeczność ze zwartością.

P. S. Urysohn, *Sur un espace métrique universel*, Bull. de Sciences Mathématiques 51 (1927), 1 – 38; p. także *Trudy po topologii i drugim oblastjam matiematiki* Urysohna, tom II, str. 747–777, Moskwa–Leningrad 1951.

Oczywiście, zamiast zwartości wystarczyłoby zakładać ograniczoność.

Czy zbiór ograniczony może dziedziczyć metrykę równoboczną z położenia w przestrzeni euklidesowej E^n przy $n > 2$, nie wiemy; przeprowadzony dowód wykorzystywał płaskość, poprzez rozważanie punktu leżącego *nazewnątrz* trójkąta.

Przykład jest wyjątkowo prosty: już pewna czwórka punktów położona na pewnym łuku metrycznym nie da się zanurzyć izometrycznie w l_2; p. podobne przykłady w książkach Sierpińskiego, np. W. Sierpiński, *General Topology*, Toronto 1952; nowe wydanie Dover 2000.

Powtórzmy to pytanie dla produktu E^ω przeliczalnie wielu prostych np. z metryką przewidzianą dla przestrzeni Hilberta l_2 i odnotujmy odpowiedź Urysohna na pytanie Frécheta: czy każdy łuk metryczny można zrealizować jako podzbiór przestrzeni l_2? Odpowiedź Urysohna była negatywna. Nie wykluczone więc, że łuk Binga będzie wymagał dla swojej realizacji zanurzenia dopiero w przestrzeń uniwersalną dla przestrzeni metrycznych ośrodkowych.

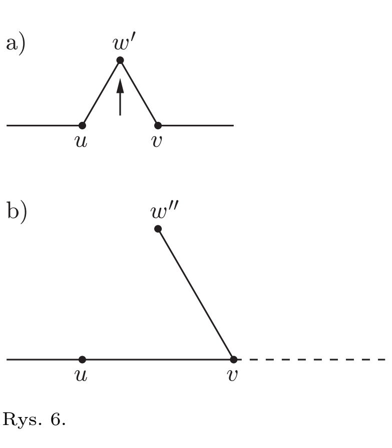
Jedną z takich przestrzeni, co pokazał Banach, jest przestrzeń (C) funkcji ciągłych na $[0, 1]$ z metryką supremum; S. Banach, *Théorie des opérations lineaires*, Warszawa 1932, str. 187. Inną przestrzeń uniwersalną zbudował Urysohn, loco cit.

Metryka równoboczna była budowana na odcinku, ale po dokładniejszym wejrzeniu w konstrukcję – p. motywacje w p. 4. – widać, że da się przeprowadzić na każdej przestrzeni o strukturze liniowej, a więc np. można tą drogą uzyskać metrykę równoboczną płaszczyzny. Teraz wyraźniej widać problemy z realizacjami tego rodzaju przemetryzowań w znanych przestrzeniach.

9. Własność funkcji f wyrażona wzorem (2) $\lim_{a\to 0} f(a)/a = \infty$ – implikuje jeszcze jedną osobliwość metryki Binga, polegającą na tym, że przy tej metryce odcinek $[0, 1]$, ani żaden jego pododcinek, nie ma długości skończonej. Inaczej – używając terminologii ogólnie przyjętej - żaden podłuk łuku Binga nie jest prostowalny.

Istotnie, niech N będzie dowolną liczbą naturalną. Wobec (2), istnieje $\delta > 0$ takie, że jeśli pododcinek ma długość nie przekraczającą δ, to długość tego odcinka w metryce $f \circ d$ jest co najmniej $N \cdot \delta$. Jeśli teraz odcinek $[0, 1]$ podzielimy na skończenie wiele odcinków o długości $\le \delta$, to suma ich długości w metryce $f \circ d$ będzie co najmniej N (bo suma długości odcinków podziału jest równa 1). Zatem długość odcinka $[0, 1]$ w metryce $f \circ d$ będzie co najmniej N, a wobec dowolności N długość odcinka nie może być skończona. To samo dotyczy każdego pododcinka odcinka $[0, 1]$.

Widzimy więc, że łuk Binga – podobnie jak łuk na płatku Kocha – nie ma metryki wewnętrznej.



Rys. 6.

Nie wiemy, czy to jest własność konieczna dla metryk równobocznych odcinka. Nie wiemy nawet, czy jest to własność, która musi towarzyszyć przeprowadzonej konstrukcji. Nie wszystkie elementy tej konstrukcji są konieczne, np. parametr s, który za Bingiem przyjęliśmy jako równy 2/3. Ale, wartość 1/2 parametru m była w dość istotny sposób wykorzystana w dowodzie warunku trójkąta.

Dwie operacje $(*)$ wypychania punktu środkowego – rys. 6(a) – i $(**)$ zginania odcinka wokół końca odcinka przedłużonego dwukrotnie – rys. 6(b) – jak można zinterpretować geometrycznie alternatywę (1), są istotą konstrukcji.

Nie wiemy, czy dla uzyskania równoboczności wystarczyłaby jedna z tych operacji. Wydaje się, że operacja $(*)$ (tylko ona pojawia sie w konstrukcji

Kocha) odpowiada za nieprostowalność. Co dawałoby powtarzanie samej operacji (∗∗)? Przypuśćmy, że odcinek I długości a przesuwamy po odcinku $[0, 1]$. Po opisanym przemetryzowaniu długość odcinka I zmienia się w sposób ciągły. Jak zmienia się wtedy położenie wierzchołków dopełniających odcinek I do trójkątów równobocznych? Jeśli zrezygnujemy ze sposobu przemetryzowania za pomoca funkcji f, możnaby dla uzyskania trójkątów równobocznych „wypychać” z danego odcinka niekoniecznie punkt środkowy i „zginać” wokół jego końca odcinek niekoniecznie dwa razy dłuższy. Chociaż wydaje się, że operacje (∗) i (∗∗) (pomyślane wszakże nieco ogólniej) są niezbywalnym elementem konstrukcji łuku równobocznego, to jednak nie wydaje się, by dalsze elementy konstrukcji Binga (w szczególności poprzez funkcję f przekształcającą zbiór odległości) były jedynymi możliwymi.

Długość łuku zależy od przyjętej metryki d; określenie jest ogólnie znane, ale p. np. Rinow, loco cit.

10. Rozważmy przestrzeń z ustaloną metryką d. Jeśli każde dwa jej punkty można połączyć łukiem prostowalnym, to można w tej przestrzeni wprowadzić metrykę wewnętrzną d_w stowarzyszoną z d przyjmując za odległość punktów długość najkrótszego łuku łączącego te punkty (ograniczamy sie do przypadku, kiedy te najkrótsze odległości istnieją). Oczywiście, $d \leq d_w$; w przypadku podzbiorów wypukłych przestrzeni euklidesowych, a więc w przypadku odcinka prostej, mamy równość metryki i metryki wewnętrznej przez nią wyznaczonej. Ale już w przypadku łuku krzywoliniowego dziedziczącego metrykę d z płaszczyzny, różnica między d i d_w może być duża, co można zobaczyć na rys. 2. Przypomnijmy, że topologie łuku krzywoliniowego i odcinka są te same.

Rozważmy łuk prostowalny na płaszczyźnie. Homeomorfizm tego łuku z odcinkiem $[0, 1]$ można tak dobrać, by odległości dowolnych dwu punktów w metryce wewnętrznej na łuku były te same co odległości odpowiadających im punktów na odcinku. Używając ogólnie przyjętej terminologii, tak dobrany homeomorfizm jest *izometrią* między odcinkiem $[0, 1]$ i rozważanym łukiem z jego metryką wewnętrzną. Jest to prawdą dla każdego łuku prostowalnego na płaszczyźnie, a więc w szczególności dla łuków tak małych jak chcemy.

K. Borsuk, *On intrinsic geometries*, Bull. Acad. Polon. Sci. 29 (1981), 83–90.

Wynik był wcześniej przedstawiony w *Delcie* 11/1980. *Red.*

Ograniczenie ogólności do obszarów nie jest konieczne, lokalna spójność – zakładając zwartość – wystarczy, ale po wyjaśnienie trzeba sięgnąć do pracy Profesora Borsuka na str. 1351 (*The Collected Papers*).

Profesor Karol Borsuk dowiódł, że dla każdego obszaru przestrzeni euklidesowej E^n i każdego dodatniego ε istnieje zanurzenie tego obszaru w przestrzeń euklidesową E^{2n} takie, że obraz tego obszaru ma w metryce przestrzeni E_{2n} rozmiar nie większy niż ε, i które jest izometrią obszaru i jego obrazu w ich metrykach wewnętrznych. Według Profesora Borsuka, całą naszą Przestrzeń Trójwymiarową można zapakować w przestrzeń E^6 tak , by miała tam rozmiar „epsilonowy” i by odległości wewnętrzne zanurzonej w ten sposób Przestrzeni – tj. długości ścieżek, po których chodzimy – pozostały takie jakie były. Dopowiedzmy, że my – mieszkańcy Przestrzeni – moglibyśmy tej transformacji nie zauważyć.

J. Olędzki i St. Spież wykazali, że liczbę $2n$ można zastąpić przez $n + 1$. *Red.*

W tej swojej ostatniej publikowanej pracy Profesor Borsuk zostawia jako otwarte pytanie co do możliwości zastąpienia liczby $2n$ mniejszą.