O pokrywaniu pewnych przestrzeni metrycznych zbiorami domkniętymi

Juliusz JABŁECKI, Wrocław, Paweł KAWA, Lądek Zdrój

Praca niniejsza poświęcona jest problemowi pokrywania przestrzeni metrycznych niepustymi, rozłącznymi i domkniętymi zbiorami. Posługując się elementarnymi metodami autorzy pokazują dla jakich przestrzeni pokrycie takie nie istnieje. W pierwszej części rozważane są przestrzenie euklidesowe. Twierdzenie 1 umieszczono celem wyrobienia odpowiednich intuicji. Część druga zawiera pewne uogólnienia. Twierdzenie 3 obejmuje pozostałe jako szczególny przypadek.

Autorzy pragną wyrazić podziękowania panu profesorowi Feliksowi Przytyckiemu za cenne uwagi dotyczące problemu.

1. Przestrzenie euklidesowe

Wprowadźmy, przede wszystkim, podstawowe oznaczenia używane w dalszym ciągu.

Definicja. Kulą w $\mathbb{R}$ o środku a i promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór

$$K(a, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < r\}.$$

Analogicznie kula w topologii zrelatywizowanej do $A \subseteq \mathbb{R}$, to

$$K_A(a, r) = \{x \in A : |x - a| < r\}.$$

Przez int i bd oznaczamy odpowiednio wnętrze i brzeg zbioru w $\mathbb{R}$, zaś przez int_A i bd_A operacje te w topologii zrelatywizowanej do zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$.

Zachodzi następujące

Twierdzenie 1. *Nie istnieje pokrycie prostej przeliczalną ilością rozłącznych odcinków domkniętych.*

Dowód. Załóżmy niewprost, że istnieje takie pokrycie

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a_n; b_n], \tag{1}$$

przy czym odcinki te są rozłączne. „Wyjmijmy” z tych zbiorów wnętrza, to znaczy rozważmy zbiór

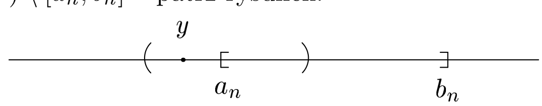
$$A = \{a_n, b_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Zauważmy, że A jest przestrzenią zupełną, jako domknięty podzbiór $\mathbb{R}$. Istotnie, weźmy dowolny ciąg (x_n) punktów z A zbieżny w $\mathbb{R}$ do x. Chcemy wykazać, że $x \in A$, tzn. jest końcem któregoś z powyższych odcinków. Ze względu na (1) $x \in [a_m; b_m]$ dla pewnego m. Gdyby $x \in (a_m; b_m)$, to także prawie wszystkie wyrazy ciągu (x_n) znalazłyby się w tym przedziale, czyli pewien a_k (względnie b_k) należałby do $(a_m; b_m)$. To zaś przeczyłoby rozłączności przedziałów w (1) – A jest więc zupełny.

Pokażemy teraz, że zbiory $\{a_n, b_n\}$ są w A domknięte i brzegowe dla dowolnego n, skąd łatwo wyniknie sprzeczność z twierdzeniem Baire'a. Domkniętość jest trywialna. Dla pokazania brzegowości załóżmy niewprost, że dla pewnego n mamy $\mathrm{int}_A\{a_n, b_n\} \neq \emptyset$, tzn. któryś z a_n, b_n jest w $\mathrm{int}_A\{a_n, b_n\}$. Bez straty ogólności niech $a_n \in \mathrm{int}_A\{a_n, b_n\}$, tzn. istnieje pewna kula $K_A(a_n, r)$ całkowicie zawarta w $\{a_n, b_n\}$, tj.

$$K_A(a_n, r) \subseteq \{a_n, b_n\}. \tag{2}$$

Niech $y \in K(a_n, r) \setminus [a_n; b_n]$ – patrz rysunek.



Ze względu na (1) $y \in [a_m, b_m]$ dla pewnego $m \neq n$, i wobec rozłączności przedziałów w (1) mamy $b_m \in K(a_n, r)$, więc oczywiście $b_m \in K_A(a_n, r)$. Otrzymaliśmy sprzeczność z (2), co daje brzegowość $\{a_n, b_n\}$.

Ostatecznie A jest przestrzenią zupełną pokrytą przeliczalną ilością zbiorów w niej domkniętych i brzegowych, co jest sprzeczne z twierdzeniem Baire'a. Otrzymana sprzeczność dowodzi prawdziwości twierdzenia. □

Przejdziemy teraz do przypadku pokrywania przestrzeni euklidesowych. Definicje kul $K(a,r)$ oraz $K_A(a,r)$ należy przeformułować w oczywisty sposób. Analogiczna uwaga tyczy się operacji int, bd, int_A i bd_A, gdzie $A \subseteq \mathbb{R}^q$.

Twierdzenie 2. *Nie istnieje pokrycie przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^q$ przeliczalną ilością rozłącznych i niepustych zbiorów domkniętych.*

Dowód. Załóżmy niewprost, że istnieje rzeczone pokrycie

$$\mathbb{R}^q = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n. \tag{3}$$

Z każdego ze zbiorów F_n wyjmijmy wnętrza, tj. rozważmy zbiór

$$O_n = F_n \setminus \mathrm{int}\, F_n, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

zwany dalej obwódką; O_n jest więc brzegiem zbioru F_n. Niech wreszcie

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n.$$

Jak w twierdzeniu 1 naszym celem jest pokazanie, że
(i) A jest zupełna i niepusta,
(ii) każda obwódka O_n jest domknięta w A,
(iii) każda obwódka O_n jest brzegowa w A.

Istotnie.

(i) Weźmy ciąg (x_n) punktów z A zbieżny w $\mathbb{R}^q$ do x. Chcemy mieć, że $x \in A$, tj. x należy do pewnej obwódki. Ze względu na (3) $x \in F_n$ dla pewnego n. Gdyby $x \in \mathrm{int}\, F_n$, to prawie wszystkie wyrazy (x_n) leżałyby w $\mathrm{int}\, F_n$, tzn. pewien $x_k \in \mathrm{int}\, F_n$. Ponieważ x_k jest elementem obwódki np. O_m, więc

$$O_m \cap \mathrm{int}\, F_n \neq \emptyset,$$

czyli

$$(F_m \setminus \mathrm{int}\, F_m) \cap \mathrm{int}\, F_n \neq \emptyset.$$

To jednak przeczy rozłączności zbiorów w (3) w przypadku $n \neq m$, natychmiastowo zaś daje sprzeczność gdy $n = m$.

Zatem A jest przestrzenią zupełną jako domknięty podzbiór $\mathbb{R}^q$. Spójność $\mathbb{R}^q$ oznacza, że jedynymi zbiorami otwarto-domkniętymi są $\emptyset$ oraz cała $\mathbb{R}^q$. Z tego względu zbiory F_n nie są otwarto-domknięte, więc obwódki, jako ich brzegi, są niepuste. Tym bardziej A jest niepusta.

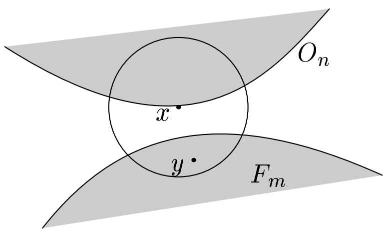
(ii) Wynika w jednej chwili z określenia obwódki.

(iii) Załóżmy niewprost, że któraś z obwódek O_n nie jest brzegowa w A. Oznacza to, że

$$\mathrm{int}_A\, O_n \neq \emptyset,$$

czyli istnieje $x \in O_n$ taki, że

$$x \in \mathrm{int}_A\, O_n.$$



Innymi słowy pewna kula $K_A(x,r)$ jest całkowicie zawarta w O_n:

$$K_A(x,r) \subseteq O_n. \tag{4}$$

Z drugiej strony ponieważ $x \in O_n$, czyli jest punktem brzegowym (w topologii $\mathbb{R}^q$) zbioru F_n, więc kula $K(x,r)$ zawiera jakiś punkt y spoza F_n. Ze względu na (3) mamy $y \in F_m$ dla pewnego $m \neq n$. Celem naszym będzie pokazanie, że w kuli $K(x,r)$ znajduje się jakiś punkt z obwódki O_m, co wobec (4) będzie już sprzeczne z rozłącznością obwódek.

Aby to pokazać zauważmy, że:

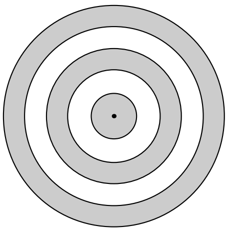
(iv) $K(x,r)$ jest spójna,

(v) $F_m \cap K(x,r)$ jest niepusty oraz nie jest całą $K(x,r)$, ze względu na punkty y oraz x, odpowiednio,

(vi) na mocy (iv) i (v) zbiór $F_m \cap K(x,r)$ nie może być otwarto-domknięty w $K(x,r)$, czyli
$$\mathrm{bd}_{K(x,r)}\big(F_m \cap K(x,r)\big) \neq \emptyset,$$
(vii) wreszcie ze względu na to, że dla dowolnych E i F zachodzi inkluzja $\mathrm{bd}_E(F \cap E) \subseteq E \cap \mathrm{bd}\, F$ mamy, że
$$K(x,r) \cap \mathrm{bd}\, F_m \neq \emptyset,$$
tj.
$$K(x,r) \cap O_m \neq \emptyset,$$
otrzymana sprzeczność kończy dowód brzegowości obwódek w A.

Otrzymaliśmy wniosek, że przestrzeń zupełna i niepusta A jest przeliczalną sumą
$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n$$
zbiorów O_n w niej nigdziegęstych, to zaś jest sprzeczne z twierdzeniem Baire'a. Tym samym twierdzenie zostało udowodnione. □

Uwaga. Zauważmy jeszcze, że żądanie niepustości zbioru A jest istotne. W tym celu wystarczy rozważyć przykład przestrzeni $X \subseteq \mathbb{R}^2$ będącej sumą przeliczalnej ilości rozłącznych pierścieni
$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{z \in \mathbb{R}^2 : 2n \leq |z| \leq 2n+1\}.$$



Z samego określenia X widać, że X jest sumą przeliczalnej ilości niepustych i rozłącznych zbiorów domkniętych. Obwódki oraz zbiór A posiadają wszystkie własności występujące w ostatnim dowodzie, oprócz właśnie niepustości.

2. Uogólnienia

Spróbujmy wskazać te własności przestrzeni euklidesowych, które były istotne dla naszych rozumowań i w ten sposób dojść do pewnych uogólnień. Zupełność wykorzystywana jest w twierdzeniu Baire'a. Ze spójności przestrzeni wynika niepustość obwódek. Wreszcie w punkcie (iv) korzystamy ze spójności kuli. Zamiast rodziny wszystkich kul wystarczy mieć jakikolwiek fundamentalny układ spójnych otoczeń.

W ten sposób dostajemy następujące

Twierdzenie 3. *Niech X będzie metryzowalną w sposób zupełny przestrzenią spójną, posiadającą w każdym punkcie bazę spójnych otoczeń. Przestrzeni X nie da się pokryć przeliczalną ilością rozłącznych i niepustych zbiorów domkniętych.*

Dowód. Jak twierdzenia poprzedniego, przy czym rodzinę kul należy zastąpić fundamentalnym układem spójnych otoczeń. □

Wniosek. *Żadna przestrzeń Banacha X nie jest sumą przeliczalnej ilości niepustych, rozłącznych zbiorów domkniętych.*

Dowód. X jako wypukła jest spójna; z tego samego względu spójne są kule, tworzące oczywiście fundamentalny układ otoczeń. □