Stożkowe i konstrukcje Steinera z rzutowego punktu widzenia (część II)

Jan FRYDA i Erwin KASPAREK, Katowice

Wstęp

W pierwszej części niniejszej pracy omówiliśmy pewne własności płaszczyzny rzutowej i stożkowych oraz związki zachodzące między płaszczyzną euklidesową i płaszczyzną rzutową. W szczególności podaliśmy konstrukcje środka i średnic dowolnej stożkowej na płaszczyźnie euklidesowej; chociaż konstrukcje te są niezmiennicze względem przekształceń afinicznych, ich wykonanie wymaga użycia linijki i cyrkla. Jeśli jednakże ustalimy na płaszczyźnie euklidesowej dowolny okrąg wraz z jego środkiem, to wszelkie konstrukcje wykonalne za pomocą linijki i cyrkla mogą być wykonane za pomocą samej tylko linijki (cyrkiel zostaje zastąpiony ustalonym okręgiem wraz ze środkiem). Konstrukcje te nazywane są konstrukcjami Steinera. Zauważmy tutaj, że konstrukcje Steinera nie są uproszczeniem konstrukcji wykonywanych za pomocą linijki i cyrkla, a nawet w większości przypadków są dłuższe, jednakże stanowią one piękną ilustrację twierdzeń geometrii rzutowej, które są zarazem uzasadnieniem tych konstrukcji.

Najpierw podamy pewne klasyczne konstrukcje Steinera, takie jak kreślenie prostych równoległych i prostopadłych, które będą pomocne w konstrukcjach podstawowych, mianowicie w konstrukcjach osi, ognisk i kierownic dowolnej stożkowej właściwej na płaszczyźnie euklidesowej. Kluczową rolę w tych konstrukcjach odgrywa tutaj znajdowanie punktów stałych przekształcenia rzutowego prostej rzutowej na siebie, dlatego też problem ten potraktujemy jako osobne zagadnienie.

Pewne klasyczne konstrukcje Steinera

Jak już wspomnieliśmy samą linijką, gdy dany jest okrąg z zaznaczonym środkiem, wykonać można między innymi takie konstrukcje jak:

(a) przez dany punkt poprowadzić prostą równoległą lub prostopadłą do danej prostej,

(b) wyznaczyć środek danego odcinka.

Podstawowymi pojęciami geometrii rzutowej przydatnymi do wykonania tych konstrukcji są biegunowość względem ustalonego okręgu i czworokąt wpisany w ten okrąg (były one omówione w pierwszej części pracy). Przypomnijmy, że czworokątem zupełnym nazywamy figurę złożoną z czterech punktów (wierzchołki czworokąta), z których żadne trzy nie są współliniowe, oraz sześciu prostych łączących parami te punkty (boki czworokąta zupełnego). Dwa boki czworokąta, na których leżą wszystkie jego wierzchołki, nazywamy bokami przeciwległymi. Czworokąt zupełny ma zatem trzy pary boków przeciwległych. Punkty przecięcia boków przeciwległych nazywamy punktami przekątnymi, a proste łączące punkty przekątne – prostymi przekątnymi czworokąta zupełnego.

Czworokąt zupełny nazywamy wpisanym w stożkową, gdy wszystkie jego wierzchołki leżą na tej stożkowej. Jedno z podstawowych twierdzeń geometrii rzutowej, które będziemy tu wykorzystywać, mówi, że biegunową punktu przekątnego czworokąta zupełnego wpisanego w stożkową jest przekątna tego czworokąta przechodząca przez pozostałe dwa punkty przekątne. Warto w tym miejscu zauważyć, że twierdzenie to jest prawdziwe dla dowolnej stożkowej. Twierdzenie to pozwala nam w prosty sposób rozwiązać następujący

Problem 1. Mając dany okrąg Γ wraz ze środkiem α skonstruować biegunową danego punktu $p \neq \alpha$.

W konstrukcji tej nie jest konieczne, aby jedna z siecznych przechodziła przez środek, jednakże mogłoby się wtedy zdarzyć, że jeden z punktów przekątnych takiego czworokąta byłby punktem niewłaściwym. Wybór siecznej przechodzącej przez środek okręgu eliminuje taką sytuację.

Musimy rozważyć dwa przypadki:
(1a) $p \notin \Gamma$,
(1b) $p \in \Gamma$.

Przypominamy, że jeśli $p = \alpha$, to jego biegunową jest prosta niewłaściwa.

W przypadku (1a) z punktu p prowadzimy dwie różne sieczne okręgu Γ, z których jedna przechodzi przez środek α. Punkty przecięcia tych siecznych z okręgiem tworzą czworokąt zupełny wpisany w okrąg Γ, którego jednym punktem przekątnym jest punkt p. Prosta łącząca pozostałe dwa punkty przekątne jest szukaną biegunową.

W przypadku (1b) prowadzimy dowolną sieczną L okręgu Γ przechodzącą przez punkt p i nie przechodzącą przez środek okręgu Γ. Na prostej L wybieramy dowolne dwa różne punkty nie leżące na Γ i konstruujemy ich biegunowe (jak w (1a)). Prosta łącząca punkt p z punktem przecięcia się tych biegunowych jest biegunową punktu p.

Zagadnieniem odwrotnym do poprzedniego jest

Problem 2. Skonstruować biegun prostej L nie przechodzącej przez środek okręgu Γ.

Przypominamy, że biegunem prostej przechodzącej przez środek okręgu Γ jest punkt niewłaściwy.

Rozważmy również dwa przypadki:
(2a) L jest styczna do Γ,
(2b) L nie jest styczna do Γ.

W przypadku (2a) ustalamy dowolny punkt $p \in L \setminus \Gamma$ i konstruujemy jego biegunową K (jak w (1a)). Punkt wspólny prostych L i K (czyli LK) jest biegunem prostej L.

W przypadku (2b) wyznaczamy biegunowe dowolnych dwóch różnych punktów $p, q \in L \setminus \Gamma$ (jak w (1a)), których punkt wspólny jest biegunem prostej L.

Przypominamy teraz dalsze pojęcia, które wykorzystamy w konstrukcjach. Dwie proste rzutowe nazywamy sprzężonymi względem stożkowej, gdy każda z nich przechodzi przez biegun drugiej. Analogicznie dwa punkty na płaszczyźnie rzutowej nazywamy sprzężonymi, gdy każdy z nich leży na biegunowej pozostałego punktu. W szczególności dwie średnice K, L okręgu Γ są sprzężone wtedy i tylko wtedy, gdy ich kierunki $[K]$, $[L]$ (punkty niewłaściwe) są sprzężone względem Γ. Ponadto dwie proste mają kierunki sprzężone względem Γ, gdy są równoległe do średnic sprzężonych okręgu Γ. Wyznaczanie zatem średnicy o kierunku sprzężonym z kierunkiem danej prostej umożliwia konstruowanie prostych równoległych, a ponieważ średnice sprzężone w okręgu są prostopadłe, więc również konstruowanie prostych prostopadłych.

Problem 3. Wyznaczyć średnicę okręgu Γ o kierunku sprzężonym z kierunkiem danej prostej K.

Musimy rozważyć dwa przypadki:
(3a) prosta K nie przechodzi przez środek α okręgu Γ,
(3b) prosta K przechodzi przez środek α okręgu Γ (jest średnicą okręgu Γ).

W przypadku (3a) wyznaczamy biegun p prostej K (Problem 2) i szukaną średnicą jest prosta $p\alpha$.

W przypadku (3b) wybieramy dowolny punkt p nie leżący na K i kreślimy proste $p\alpha$, pa_1, pa_2, gdzie a_1, a_2 są punktami przecięcia prostej K z okręgiem Γ. Na odcinku o końcach p, α wybieramy dowolny punkt q różny od p i α, i wyznaczamy punkty $b_1 = (pa_1)(qa_2)$ i $b_2 = (pa_2)(qa_1)$. Ponieważ α jest środkiem odcinka o końcach a_1, a_2, więc proste K i $R = b_1b_2$ są równoległe (korzystamy tutaj z podanych w części pierwszej własności i konstrukcji środka odcinka). Szukaną średnicą jest prosta $r\alpha$ przechodząca przez biegun r prostej R (Problem 2) i środek α okręgu Γ.

Problem 4. Skonstruować prostą równoległą do danej prostej P przechodzącą przez dany punkt q.

Jeżeli q leży na P, to szukaną prostą jest oczywiście P. Zakładamy zatem dodatkowo, że q nie leży na P i rozważamy dwa przypadki:
(4a) $q \neq \alpha$,
(4b) $q = \alpha$.

W przypadku (4a) wyznaczamy średnicę L o kierunku sprzężonym z kierunkiem prostej P (Problem 3) oraz biegunową K punktu q (Problem 1). Biegunowa punktu przecięcia prostych K, L jest szukaną prostą.

W przypadku (4b) kostruujemy średnicę L o kierunku sprzężonym z kierunkiem prostej P, a następnie średnicę K o kierunku sprzężonym z kierunkiem prostej L (Problem 3), która jest szukaną prostą.

Problem 5. Skonstruować prostą prostopadłą do danej prostej P i przechodzącą przez dany punkt q.

Szukaną prostą jest przechodząca przez q prosta równoległa (Problem 4) do średnicy o kierunku sprzężonym z kierunkiem prostej P (Problem 3).

Ponieważ potrafimy już wyznaczyć proste równoległe, więc możemy teraz rozwiązać, analogicznie jak w części pierwszej, następujący

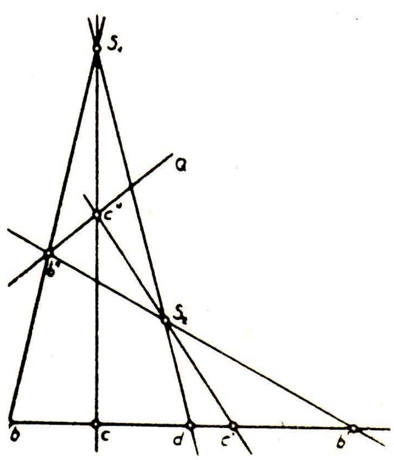
Problem 6. Dane są dwa różne punkty p i q. Wyznaczyć środek odcinka o końcach p, q.

Wybieramy dowolny punkt r nie leżący na prostej pq, a następnie dowolny punkt p' na prostej pr, różny od punktów p i r. Przez punkt p' prowadzimy prostą K równoległą do prostej pq (Problem 4) i wyznaczamy punkt $q' = K(qr)$, a następnie punkt $t = (pq')(p'q)$. Punkt $s = (pq)(rt)$ jest wówczas środkiem odcinka o końcach p, q.

Wyznaczanie punktów stałych przekształcenia rzutowego prostej rzutowej na siebie

Niech $\overline{P}$ będzie prostą rzutową, f zaś przekształceniem tej prostej na siebie. Wiadomo, że przekształcenie f jest jednoznacznie wyznaczone przez trzy różne punkty a, b, c i ich obrazy $a' = f(a)$, $b' = f(b)$, $c' = f(c)$. Ponadto, jeśli f nie jest identycznością, to może mieć najwyżej dwa punkty stałe.

Problem 7. Dane są punkty a, b, c, a', b', c' leżące na prostej P, $a \neq b \neq c \neq a$ oraz $a' \neq b' \neq c' \neq a'$. Wyznaczyć punkty stałe takiego przekształcenia rzutowego $f : \overline{P} \to \overline{P}$ prostej $\overline{P}$ na siebie, że $f(a) = a'$, $f(b) = b'$, $f(c) = c'$.

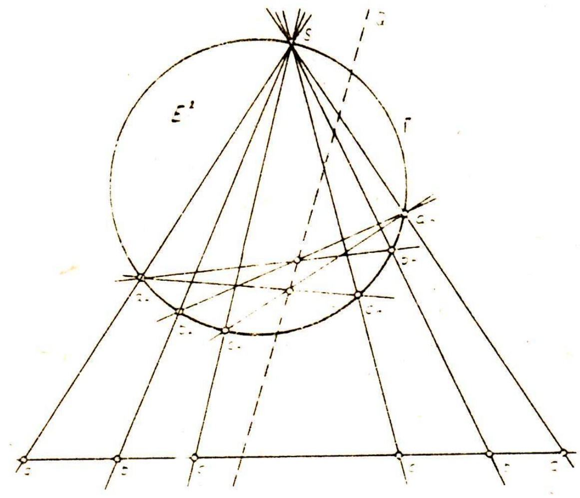


Rozróżniamy cztery przypadki:
(7a) $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$,
(7b) $a = a'$, $b = b'$, $c \neq c'$,
(7c) $a = a'$, $b \neq b'$, $c \neq c'$,
(7d) $a \neq a'$, $b \neq b'$, $c \neq c'$.

W przypadku (7a) f jest identycznością i wszystkie punkty prostej $\overline{P}$ są punktami stałymi przekształcenia f.

W przypadku (7b) punkty a, b są jedynymi punktami stałymi f.

W przypadku (7c) przez punkt $a = a'$ prowadzimy dowolną prostą $Q \neq P$ i wybieramy dowolny punkt s_1 nie leżący ani na P, ani na Q. Z punktu s_1 rzutujemy punkty b, c na prostą Q, otrzymując punkty b'', c'' (rys. 1). Wyznaczamy punkt $s_2 = (b'b'')(c'c'')$ i przez π_1 oznaczamy rzut z punktu s_1 prostej $\overline{P}$ na prostą $\overline{Q}$, a przez π_2 - rzut z punktu s_2 prostej $\overline{Q}$ na prostą $\overline{P}$.



Rys. 2

Jeżeli dany jest pęk a^* i prosta P nie należąca do a^*, to każde przekształcenie rzutowe φ pęku a^* na siebie wyznacza jednoznacznie takie przekształcenie rzutowe f_φ prostej $\overline{P}$ na siebie, że jeżeli a leży na prostej L i $\varphi(\overline{L}) = \overline{L'}$, to $f_\varphi(\overline{L}\,\overline{P}) = \overline{L'}\,\overline{P}$, i odwrotnie, jeżeli $f_\varphi(p) = p'$, to $\varphi(\overline{ap}) = \overline{ap'}$. Istotnie, jeżeli $\varphi : a^* \to a^*$, to $f_\varphi(p) = \overline{P}\varphi(\overline{ap})$. Wynika stąd, że wyznaczanie prostych stałych przekształcenia rzutowego danego pęku sprowadza się do wyznaczenia punktów stałych pewnego przekształcenia rzutowego prostej rzutowej na siebie.

Wówczas $f = \pi_2 \circ \pi_1$ (złożenie przekształceń) i punkt $d = \overline{P}\,(\overline{s_1 s_2})$ jest drugim punktem stałym przekształcenia f (może on być identyczny z punktem a).

W przypadku (7d) wykorzystujemy ustalony okrąg Γ. Wybieramy na nim dowolny punkt s nie leżący na prostej P i przez λ_s oznaczamy rzut z punktu s prostej $\overline{P}$ na okrąg Γ. Otrzymujemy wówczas punkty a_Γ, b_Γ, c_Γ, a'_Γ, b'_Γ, c'_Γ (rys. 2). Gdy dla jakiegoś punktu x prostej P prosta sx jest styczna do Γ, przyjmujemy $x_\Gamma = \lambda_s(x) = s$. W przeciwnym przypadku $x_\Gamma = \lambda_s(x)$ jest różnym od s punktem przecięcia prostej sx z okręgiem Γ.

Weźmy teraz pod uwagę pęki a_Γ^* i $(a'_\Gamma)^*$ i określmy odwzorowanie $\varphi : a_\Gamma^* \to (a'_\Gamma)^*$ następująco:

$$\varphi(a_\Gamma p_\Gamma) = a'_\Gamma p'_\Gamma\,,$$

gdzie dla dowolnego punktu p_Γ okręgu Γ

$$p'_\Gamma = (\lambda_s \circ f^{-1} \circ \lambda_s^{-1})(p_\Gamma)\,.$$

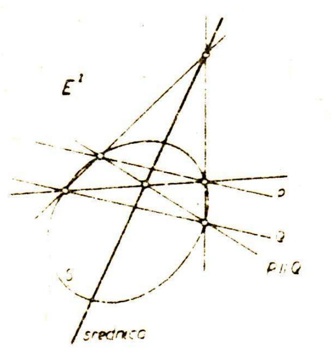
Ponieważ φ jest złożeniem przekształceń rzutowych (wykorzystujemy tu podane w części pierwszej twierdzenie Steinera), więc φ jest również przekształceniem rzutowym. Zauważmy, że jeśli $a_\Gamma = p_\Gamma$, to $a_\Gamma a_\Gamma$ oznacza prostą styczną do Γ w punkcie a_Γ. Zauważmy ponadto, że $\varphi(a_\Gamma a'_\Gamma) = a'_\Gamma a_\Gamma$, co oznacza, że φ jest rzutem perspektywicznym. Istnieje zatem oś tego rzutu, tzn. prosta na której przecinają się odpowiadające sobie (poprzez φ) proste pęków a_Γ^* i $(a'_\Gamma)^*$. Oś ta jest wyznaczona przez punkty przecięcia odpowiadających sobie prostych $a_\Gamma b'_\Gamma$ i $a'_\Gamma b_\Gamma$, oraz $a_\Gamma c'_\Gamma$ i $a'_\Gamma c_\Gamma$. Oznaczmy tę oś przez Q. Zauważmy teraz, że jeżeli punkt x leżący na prostej $\overline{P}$ jest punktem stałym przekształcenia f, to zgodnie z określeniem odwzorowania φ, punkt x_Γ leży na prostej Q. Odwrotnie, jeżeli x_Γ leży na Q, to punkt $(a_\Gamma x_\Gamma)(a'_\Gamma x'_\Gamma)$ również leży na Q, a to zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x'_\Gamma = x_\Gamma$, tzn. $(\lambda_s \circ f^{-1} \circ \lambda_s^{-1})(x_\Gamma) = x_\Gamma$, skąd wynika, że $\lambda_s^{-1}(x_\Gamma)$ jest punktem stałym przekształcenia f. Widzimy zatem, że przekształcenie f ma tyle punktów stałych, ile punktów wspólnych ma prosta Q z okręgiem Γ i punkty stałe f (o ile istnieją) są rzutami z punktu s punktów wspólnych Q i Γ na prostą $\overline{P}$.

Wyznaczanie osi, ognisk i kierownic za pomocą konstrukcji Steinera

Teraz konstrukcje osi, ognisk i kierownic stożkowych sprowadzimy do wcześniej rozwiązanych problemów.

Przypominamy, że środkiem stożkowej nazywamy punkt właściwy (o ile taki istnieje), który jest biegunem prostej w nieskończoności względem tej stożkowej; średnicą zaś – prosta właściwa, która jest biegunową punktu niewłaściwego. Wynika stąd prosty sposób konstrukcji środka, jako punktu przecięcia dwóch różnych średnic. Jeżeli średnice te są równoległe, to stożkowa jest parabolą. Powstaje zatem naturalny

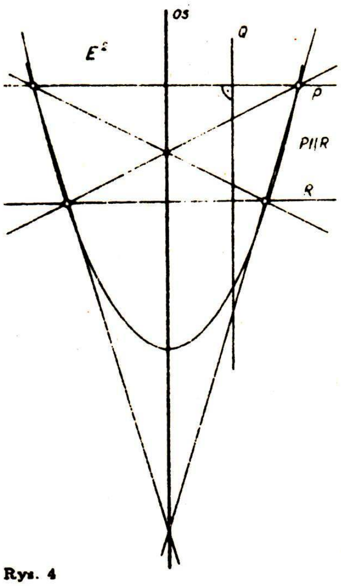
Problem 8. Mając daną stożkową S skonstruować dowolną jej średnicę.



Rys. 3

Aby rozwiązać to zadanie skorzystamy z podanego wcześniej twierdzenia o czworokącie zupełnym wpisanym w stożkową. Czworokąt ten nie może być jednak dowolny, gdyż jedna z par jego boków przeciwległych musi być równoległa, aby punkt przekątny leżący na nich był punktem niewłaściwym. Wówczas jego biegunowa, czyli średnica S, będzie prostą przechodzącą przez pozostałe dwa punkty przekątne tego czworokąta (rys. 3). Zaznaczmy tutaj, że jeśli S będzie parabolą, to wszystkie średnice będą równoległe.

Obecnie zajmiemy się osiami stożkowych. Osią stożkowej S nazywamy każdą taką średnicę S, że proste z nią sprzężone są do niej prostopadłe.



Rys. 4

Ponieważ wszystkie średnice paraboli są równoległe, więc parabola ma tylko jedną oś. W celu jej wyznaczenia wybieramy dowolną średnicę Q paraboli (Problem 8) i wykreślamy dowolne dwie prostopadłe do Q sieczne P i R paraboli (rys. 4). Otrzymujemy wówczas czworokąt zupełny, którego jeden punkt przekątny jest punktem niewłaściwym. Punkt ten jest biegunem prostej przechodzącej przez pozostałe dwa punkty przekątne (właściwe). Prosta ta jest średnicą paraboli sprzężoną z prostymi P, R. Jest to zatem oś paraboli.

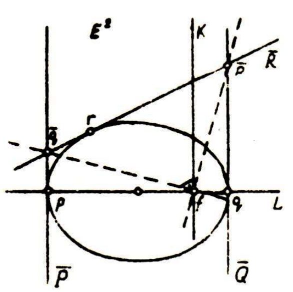
W przypadku, gdy stożkowa jest okręgiem, to każda średnica jest osią. Pozostaje zatem tylko konstrukcja osi elipsy i hiperboli. Jest to jedna (wspólna) konstrukcja, ale nieco bardziej skomplikowana.

Jeżeli L_1 jest osią stożkowej S (elipsy lub hiperboli), to L_1 jest prostopadła do wszystkich prostych sprzężonych z nią (względem S). W szczególności L_1 jest prostopadła do średnicy L_2 sprzężonej z L_1. Prosta L_2 jest zatem również osią stożkowej S. Elipsa (różnoosiowa, czyli nie będąca okręgiem) i hiperbola mają zatem po dwie osie i są one wzajemnie prostopadłymi średnicami sprzężonymi. Własność ta odgrywa kluczową rolę w konstrukcji osi stożkowej. Niech o będzie środkiem stożkowej S. W pęku o^* określamy dwa przekształcenia rzutowe ω_1 i ω_2, które średnicom stożkowej przyporządkowują średnice z nimi sprzężone (przekształcenie ω_1) i odpowiednio średnice do nich prostopadłe (przekształcenie ω_2). Każde z tych przekształceń jest inwolucją, tzn. złożone z sobą daje identyczność. Przekształcenie ω_1 nazywamy inwolucją sprzężenia średnic stożkowej S, a przekształcenie ω_2 – inwolucją ortogonalną. Osie stożkowej S (elipsy różnoosiowej lub hiperboli) są zatem prostymi stałymi przekształcenia rzutowego pęku o^* na siebie, które jest złożeniem inwolucji ω_1, ω_2. Zagadnienie poszukiwania osi zostało zatem sprowadzone do problemu 7 (patrz towarzyszący mu margines).

Na zakończenie przedstawimy jeszcze konstrukcję ognisk. W większości podręczników geometrii analitycznej znaleźć można określenia i konstrukcje ognisk stożkowej, w których występują metryczne własności stożkowej mimo że ogniska są pojęciami niezmienniczymi nie tylko ze względu na izometrie, ale i na podobieństwa płaszczyzny euklidesowej. Ognisko f stożkowej (i tylko ono) ma bowiem tę własność, że każde dwie proste z pęku f^* sprzężone względem stożkowej są prostopadłe, czyli inwolucja sprzężenia prostych w pęku f^* jest inwolucją ortogonalną. Wynika stąd w szczególności, że ognisko stożkowej S jest jej punktem wewnętrznym i leży na osi stożkowej. Pokażemy, że ogniska są punktami stałymi pewnego przekształcenia rzutowego na osi stożkowej, a zatem są konstruowalne (Problem 7). Umożliwia nam to następujący

Lemat von Staudta. Jeżeli trzy różne proste $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ są styczne do stożkowej $\overline{S}$, $a = \overline{B}\,\overline{C}$, $b = \overline{A}\,\overline{C}$, $c = \overline{A}\,\overline{B}$ i $\overline{D}$ jest biegunową punktu a, to dla dowolnego punktu p leżącego na $\overline{D}$ proste $\overline{bp}$ i $\overline{cp}$ są sprzężone względem $\overline{S}$.

Przyjrzyjmy się bliżej temu lematowi. Jeżeli f jest ogniskiem stożkowej S leżącym na osi L, to przez p, q oznaczmy punkty przecięcia prostej $\overline{L}$ ze stożkową $\overline{S}$. Co najmniej jeden z tych punktów musi być właściwy, np. p, bo prosta L jest prostą właściwą. Przez $\overline{R}$ oznaczmy styczną do $\overline{S}$ w różnym od p i q punkcie r stożkowej $\overline{S}$ (rys. 5), a przez $\overline{P}$ i $\overline{Q}$ – proste styczne do $\overline{S}$ w punktach p i q. Ponieważ proste P, Q są równoległe i L jest osią S, więc proste P, Q są prostopadłe do L (w przypadku, gdy punkty p, q są właściwe) proste $\overline{P}$, $\overline{Q}$, $\overline{R}$ są styczne do stożkowej $\overline{S}$ i punkt $\overline{P}\,\overline{Q}$ jest biegunem prostej $\overline{L}$, zatem zgodnie z lematem von Staudta proste $f\overline{q}$, $f\overline{p}$ są sprzężone (oznaczyliśmy $\overline{p} = \overline{R}\,\overline{Q}$, $\overline{q} = \overline{R}\,\overline{P}$), a ponieważ f jest ogniskiem, więc $f\overline{q}$, $f\overline{p}$ są prostymi prostopadłymi. Powstaje teraz problem odwrotny: jeśli $f\overline{q}$, $f\overline{p}$ są prostopadłe, to czy f jest ogniskiem S? Odpowiedź na to pytanie jest twierdząca i wynika z następującego rozumowania. Proste $f\overline{q}$, $f\overline{p}$ są prostopadłe, a na mocy lematu von Staudta są również sprzężone. Również proste L i K (K jest przechodzącą przez f prostą równoległą do P) są sprzężone i prostopadłe. Zatem w pęku f^* inwolucja sprzężenia prostych i inwolucja ortogonalna są wyznaczone przez dwie te same pary prostych ($f\overline{q}, f\overline{p}$) oraz ($L, K$), czyli inwolucje te muszą być identyczne, zatem f jest ogniskiem stożkowej S.



Rys. 5

Zauważmy, że najprościej skonstruować można ognisko paraboli. Punkt q jest wówczas punktem niewłaściwym, a prosta $\overline{Q}$ jest również niewłaściwa. Opuszczając z punktu $\overline{q}$ prostą prostopadłą do R, otrzymujemy punkt przecięcia f na osi L, który jest ogniskiem paraboli, bo proste $f\overline{q}$, $f\overline{p}$ są prostopadłe (prosta $f\overline{p}$ jest przechodzącą przez punkt f prostą równoległą do prostej R).

W celu skonstruowania ognisk elipsy i hiperboli określamy przekształcenie rzutowe η pęku $\overline{p}^*$ na pęk $\overline{q}^*$, które prostej A z pęku $\overline{p}^*$ przyporządkowuje prostopadłą do niej prostą B z pęku $\overline{q}^*$. Punkty stałe f przekształcenia rzutowego φ_η prostej $\overline{L}$ na siebie określonego wzorem

$$\varphi_\eta(a) = \overline{L}\eta(\overline{\overline{p}a})$$

mają wówczas tę własność, że prosta $f\overline{p}$ jest prostopadła do prostej $f\overline{q}$ (punkt $\overline{L}\eta(\overline{\overline{p}a})$ jest punktem wspólnym prostych $\overline{L}$, $\eta(\overline{\overline{p}a})$). Zaznaczmy tutaj, że jeżeli stożkowa jest hiperbolą, to konstrukcja ta zawsze wyznacza dwa ogniska, natomiast w przypadku elipsy może nie wyznaczać żadnego ogniska, tzn. przekształcenie φ_η może nie mieć punktów stałych (jeżeli ma dokładnie jeden punkt stały, to stożkowa jest okręgiem i jego ogniskiem jest środek okręgu). Ogniska elipsy znajdują się wówczas na drugiej „dłuższej" osi tej elipsy i powyżej opisaną konstrukcję trzeba przeprowadzić dla tej osi.

Na zakończenie zauważmy, że kierownicą stożkowej jest biegunowa jej ogniska, zatem konstrukcja kierownic stożkowej S sprowadza się do wyznaczenia jej ognisk i konstrukcji biegunowych punktów wewnętrznych stożkowej $\overline{S}$. Kierownicą okręgu jest prosta niewłaściwa i mówimy, że okrąg nie ma kierownic.

Literatura

[1] Berger, M., *Géometrié* t. 2, Cedic/Fernand Nathan, Paris 1977, (Берже, М., Геометрия, т. 2, Москва 1984).

[2] Четверухин, Н.Ф., Проективная геометрия, Москва 1953.

[3] Делоне, Б.Н., Райков, Д.А., Аналитическая геометрия, Москва 1948.

[4] Kordos, M., Włodarski, L., *O geometrii dla postronnych*, Warszawa 1981

[5] Otto, E., *Krzywe stożkowe. Zajęcia fakultatywne w grupie matematyczno-fizycznej*, Warszawa 1971.

[6] Stark, M., *Geometria analityczna z wstępem do geometrii wielowymiarowej*, Warszawa 1974 (wyd. 6).