Geometria i kosmologia – historia wzajemnych związków (I)

Michał HELLER (Specola Vaticana) i Zdzisław POGODA, Kraków

Początki

Rozmyślania ludzi o Wszechświecie i otaczającej ich przestrzeni mają tradycje tak stare jak stara jest w ogóle myśl ludzka, jak stary jest widok gwiazd na niebie w bezchmurną letnią lub zimową noc. Kosmologię należy zaliczyć do nauk bardzo młodych, lecz spośród dyscyplin naukowych ma ona chyba najdłuższą historię. Nazwa „kosmologia" pochodzi od Christiana Wolfa (1679-1754), który tym mianem określił partie filozofii traktujące o świecie materialnym. Obecnie kosmologia jest działem fizyki, którego zadaniem jest opis Wszechświata jako całości. Można też krótko określić kosmologię jako fizyczną teorię globalnej struktury czasoprzestrzeni.

Geometrię, również jedną z najstarszych dziedzin nauki stworzonych przez człowieka, trudno scharakteryzować jednym zdaniem. Można by powiedzieć, że geometria bada matematyczne właściwości przestrzeni albo, posługując się definicją encyklopedyczną, uznać geometrię za dział matematyki, zajmujący się pierwotnie badaniem figur i stosunków przestrzennych, obecnie obejmujący różne teorie matematyczne związane z bądź tradycyjnym zakresem bądź podobieństwem tematyki badań. Pierwsze oryginalne wyniki z matematyki uzyskano właśnie w dziedzinie geometrii. Cywilizacje, które mogły pochwalić się osiągnięciami w astronomii, niemałe rezultaty posiadały także w geometrii. Choć wyraźnie należy zaznaczyć – zainteresowanie jedną i drugą dziedziną wynikało głównie z przyczyn praktycznych. Mimo ciekawych wyników uzyskanych przez Babilończyków, a także starożytnych Egipcjan, prawdziwy, abstrakcyjny kształt geometria uzyskała dopiero w starożytnej Grecji między 800 a 300 rokiem przed Chrystusem. Sporo twierdzeń pochodzi ze szkoły pitagorejczyków: to tu narodziła się myśl, że matematyka jest prawidłową interpretacją przyrody.

Związki między geometrią i kosmologią sięgają początków, ale żeby nie poruszać się w mglistych obszarach raczej domysłów niż wiedzy, zacznijmy od starożytnej Grecji. Geometria była wówczas, praktycznie rzecz biorąc, całą znaną matematyką, a cała ówczesna filozofia przyrody była właściwie kosmologią. Geometria powstała z pomiarów gruntów rolnych, ale u Greków bardzo prędko wyswobodziła się ze swoich pierwotnych związków z ziemią i osiągnęła wysoki stopień abstrakcji. Celem filozofii przyrody było dociekanie natury Wszechświata, ale doświadczenie (które dla Greków znaczyło przede wszystkim – doświadczenie życiowe) zmuszało filozofów do odwracania wzroku od sfer niebieskich i spoglądania ku ziemi. Spotkanie geometrii z kosmologią było nieuniknione.

Grecki Wszechświat i grecka geometria

Nastąpiło ono w myśl Platona. Nie tylko dlatego, że pytanie „jak istnieją obiekty geometryczne?" doprowadziło do platońskiej metafizyki (idee, których pierwowzory stanowią pojęcia geometryczne, są pierwotne; świat dostrzegalny zmysłami to tylko cienie idei). Platońska teoria brył foremnych stała się częścią jego filozofii przyrody. Trzeba było aż współczesnej fizyki oddziaływań elementarnych, by docenić tę zadziwiającą doktrynę Platona.

Por. M. Heller, *Timaios filozoficzny mit o pochodzeniu i naturze świata*, Analecta Cracoviensiae 17, 1985, 111-123

Źródeł platońskiej myśli należy szukać u pitagorejczyków. Ich twierdzenie, że „liczba jest zasadą ($\alpha\rho\chi\eta$) wszystkiego" i pierwotne próby geometrycznej interpretacji liczb (liczba $\sqrt{2}$ jako przekątna kwadratu o boku 1) otworzyły drogę do traktowania matematyki, a zwłaszcza geometrii, jako narzędzia w badaniach przyrodniczych. Wprawdzie Arystoteles zdołał narzucić wielu następnym stuleciom przekonanie, że tylko jakościowe analizy są w stanie stawić czoła skomplikowaniu i bogactwu form występujących w świecie, ale znaczący wyłom w tym myślowym reżimie uczynił Archimedes, który nie tylko sam z powodzeniem stosował metody geometryczne do rozwiązywania wielu zagadnień z dziedziny statyki, ale zapoczątkował pewien trwały styl badania przyrody, polegający na tym, by nie pytać „dlaczego?", lecz dociekać „jak?". A odpowiedzią na to „jak?" jest znalezienie geometrycznego schematu, według którego zjawisko zachodzi. Historycy nauki twierdzą, że styl archimedejski nigdy całkowicie nie został zapomniany. W jego nurcie należy umieścić astronomię Ptolemeusza i on to potem wydał Kopernika, Keplera i Galileusza.

Geometria Euklidesa jest niewątpliwie największym osiągnięciem greckiej matematyki. Jej waga wykracza daleko poza horyzonty samej geometrii. W swoich *Elementach* Euklides nie tylko zebrał i logicznie uporządkował niemal całą dotychczasową wiedzę geometryczną, ale zamienił rzemiosło matematyki w sztukę matematyki i ustalił standard racjonalności dla całej „Zachodniej Kultury".

Wprawdzie *Elementy* były dziełem „czystej matematyki", ale nie mogły nie wywrzeć wpływu na grecką filozofię przyrody. Gdy późniejsi perypatetycy utożsamili ciało z rozciągłością, w ich wypowiedziach słychać echo „definicji" z XI księgi *Elementów*: ciałem jest to, co ma długość, szerokość i głębokość. Można się w tym dopatrzeć przybierającej potem na sile tendencji do geometryzacji nauki o przyrodzie. Ale i odwrotnie, grecka filozofia przyrody w doniosły sposób zaciążyła nad dalszym losem geometrii. Grecy odznaczali się swoistym *horror infiniti*. Dla Arystotelesa to, co nieskończone jest nieokreślone, jakby niewykończone, a więc wymykające się (albo wręcz nie podlegające) regułom myślenia. Greckim myślicielom łatwiej było wyobrazić sobie nicość poza Wszechświatem niż Wszechświat nieskończony, toteż zamknęli Wszechświat sferą gwiazd stałych, nie tylko ograniczając w ten sposób jego rozmiary, ale także ściśle zawężając teren wszelkim racjonalnym dociekaniom: nicość „otaczająca" świat jest dosłownie niczym (nie ma jej), nie można więc stawiać żadnych pytań pod jej adresem.

Pojęcia nieskończoności unikano zarówno w filozofii jak i w geometrii. Wszystkie rozważania matematyczne, w których w taki czy inny sposób pojawiła się nieskończoność, prowadziły Greków do paradoksów i różnego rodzaju aporii (απορια – trudność). Dlatego w miarę możliwości eliminowano z matematyki wszystkie takie „podejrzane" sytuacje. Jeśli przypatrzymy się dokładniej *Elementom*, natychmiast zauważymy, że nieskończoność jest z nich wyeliminowana całkowicie. Linia prosta jest ograniczona - kończy się punktami, podobnie powierzchnia ograniczona jest liniami itp. Figury nieograniczone są wytworem czasów znacznie późniejszych („Figura jest to, co jest zawarte jedną lub kilkoma granicami"). Konsekwencją ograniczoności prostej jest zawiła postać tzw. piątego postulatu o równoległych.

Sam Euklides używa tego postulatu tylko w ostateczności, omijając go, gdzie to tylko możliwe. I nie tylko on. Greków niepokoiła rozbudowana forma tego postulatu, a także ukryte w nim pojęcie nieskończoności prostej. Greckie poczucie myślowej estetyki domagało się „zneutralizowania" piątego postulatu. Wiemy, jakie znaczenie miało to dla dalszego rozwoju geometrii.

Dziś może nas dziwić, że grecka kosmologia nie zrobiła użytku z „przestrzeni euklidesowej". Dojrzewanie idei (nawet takich, które potem wydadzą się całkiem proste) w historii nauki wymaga czasu. Grecy mieli bardzo mgliste pojęcie przestrzeni (można nawet zaryzykować stwierdzenie, że go nie mieli). Strefa gwiazd stałych niejako zdusiła to pojęcie, dopuszczając jedynie do głosu zastępcze miejsca, które w starożytnej i średniowiecznej filozofii przyrody odgrywało znaczącą rolę.

Ku nowożytnym naukom

Średniowieczny obraz świata był całkowicie jakościowy. Gdyby ktoś chciał zabawić się w myślowe ćwiczenie, jak mógłby wyglądać świat zbudowany

Por. np. E. Mach, *The Science of Mechanics*, Open Court, La Salle 1974, rozdz. I – Należy jednak pamiętać, że Mach swoiście traktował historię nauki: raczej jako laboratorium dla swojej filozofii nauki niż jako samodzielny przedmiot zainteresowań.

Por. np. O. Pedersen, *Interactions between Science and Theology*, 1988, rozdz. I (manuskrypt książki udostępniony przez autora).

Interesujące uwagi na temat por. w końcowych partiach IV rozdziału książki: M. Kline, *Mathematics in Western Culture*, Penguin Books, Harmondsworth – N. York 1977.

Por. M. Jammer, *Concepts of Mass*, Harvard University Press, Cambrige – Mass. 1961, rozdz. 2.

Por. M. Heller, *Ewolucja pojęcia masy*, w: *Filozofować w kontekście nauki*, red. M. Heller, A. Michalik, J. Życiński, Polskie Towarzystwo Teologiczne, Kraków 1987, s. 152-163.

Dla porządku należy dodać, że w powszechnie znanej obecnie wersji postulat o równoległych został wprowadzony przez J. Playfaira pod koniec XVIII wieku.

bez pomocy matematyki, powinien studiować średniowieczne wyobrażenia kosmologiczne. Średniowieczni astronomowie traktowali system Ptolemeusza raczej jako algorytm do obliczania pozycji planet (jako „hipotezę", jak wówczas mówiono) niż jako „system rzeczywistego świata". Świat średniowiecznych był dziełem sztuki a nie nauki (nic dziwnego, że daje się go zrekonstruować z *Boskiej Komedii* Dantego). Wyobraźnia przestrzenna odgrywała w nim oczywiście znaczną rolę, ale hierarchiczny porządek wzorowany na architekturze (gotyckie katedry) wyparł w nim porządek geometryczny. Kosmologia stała się, w pewnym sensie ukoronowaniem średniowiecznej syntezy, przejęła na siebie funkcję symbolizowania harmonii osiągniętej gigantycznym wysiłkiem teologów, filozofów i artystów.

> Na temat średniowiecznych wyobrażeń kosmologicznych warto przeczytać piękne dziełko C.S. Lewisa, *Odrzucony Obraz*, Pax, Warszawa 1986.

Związki pomiędzy kosmologią a geometrią stawały się coraz ściślejsze w miarę zbliżania się do czasów nowożytnych. Aleksander Koyré twierdzi, że wielka rewolucja myślowa w XVII wieku polegała nie tylko na stworzeniu nauk empirycznych, ale również na zburzeniu starego świata i zastąpieniu go nowym. Jego zdaniem ten proces transformacji świata składał się z dwu, przeplatających się ze sobą, nici ewolucyjnych. Pierwsza z nich wiodła od starożytnej koncepcji miejsca poszczególnych ciał, czy też „miejsca świata" do pojęcia geometrycznej przestrzeni; druga prowadziła od greckiego, zamkniętego i raczej ograniczonego świata do nieskończonego w przestrzeni i całkowicie mechanicznego świata nowożytnych. Droga tych transformacji była długa i wyboista. Mikołaj z Kuzy, Palingenius, Giordano Bruno – to tylko niektóre z jej ważniejszych etapów.

> Aleksander Koyré analizie tego zjawiska poświęcił znakomitą część swojej działalności jako historyk nauki. Niemal wszystkie jego prace historyczne dotyczą jakiegoś aspektu lub jakiegoś szczegółu tego procesu. Książką, która wprost dotyczy omawianego przez nas tematu jest: *Du monde clos a l'univers infini*, Presses Universitaires de France, Paris 1962. Warto również przeczytać artykuł, który jest jakby podsumowaniem badań Koyrégo w tej dziedzinie: *De l'influence des conceptions philosophiques sur l'evolution des théories scientifiques*, w: *Etudes d'histoire de la pensée philosophique*, Gallimard 1971, s. 153-269.

Skąd brały się nowe idee? Były one wynikiem – jak się wydaje – oddziaływania ludzkiej wyobraźni z wiedzą przyrodniczą danej epoki, ale w jeszcze większym stopniu z filozofią i teologią. Koncepcje Boga, jego stosunku do świata, dzieła stworzenia itp. w nie mniejszym stopniu otwierały nowe tereny dla twórczej wyobraźni niż z trudem i stopniowo gromadzone dane doświadczalne dotyczące ruchu wystrzelonych pocisków czy swobodnego spadku.

> Ważna pozycją opisującą wpływ idei teologicznych na powstanie nowożytnych nauk jest dzieło: A. Funkenstein, *Theology and the Scientific Imagination from the Middle Ages to the Seventeenth Century*, Princeton University Press, 1986.

Zanim geometria stała się ostatecznie nowożytną kosmologią, sama przeszła poważne przeobrażenie. Pod piórem Kartezjusza dostojne krzywe Apoloniusza stały się algebraicznymi równaniami. Straciły coś z majestatycznego piękna greckiej architektury, ale ożyły: bogactwo równań przeniosło się na bogactwo tworów geometrycznych; geometria dała algebrze nową interpretację, algebra zrewanżowała się geometrii skutecznością rachunków. Również w dziełach Kartezjusza geometria stała się kosmologią: świat jest przestrzenią geometryczną szczelnie wypełnioną ciałami, a istotą ciał jest ich rozciągłość, czyli cecha czysto geometryczna. Nauki nie można uprawiać inaczej, jak tylko *more geometrico*.

Geometryczny wszechświat Kartezjusza nie ostał się długo. Nie wytrzymał konkurencji ze światem Galileusza i Newtona. Zniszczyły go jego własne braki. Mimo całej jego rygorystycznej – w deklaracjach – geometryczności, było w nim za dużo elementów jakościowych. Tam, gdzie Kartezjuszowi zabrakło środków matematycznych lub cierpliwości do przeprowadzenia rachunków, piękny tekst (odwołujący się do „jasnych i wyraźnych" wyobrażeń) wypełniał luki. A środków matematycznych najczęściej brakowało Kartezjuszowi do analizy ruchu. Kinematyczne recepty na konstruowanie pewnych krzywych znane już były starożytnym Grekom (np. spirala Archimedesa), ale było to za mało do stworzenia poprawnej mechaniki.

> Komentarz na ten temat por.: D. Dubrale, *Galileo's Methodology of Natural Science* w: *Galileo Man of Science*, red. E. McMullin, Basic Brooks, New York – London 1967, s. 295-314.

Geometryczna maszyna świata

Do Galileusza należy powiedzenie, że „księga przyrody napisana jest językiem matematyki, a literami tego języka są trójkąty, okręgi i inne figury geometryczne". A więc znowu geometria. Ale świat Galileusza jest w równej mierze geometryczny co i mechaniczny. Mechanika niejako wyłamuje się za ubogim środkom geometrycznym, staje się dla geometrii konkurencją. Widać to wyraźnie w dziele Newtona. Dopiero rachunek różniczkowy i całkowy umożliwił pełną matematyczną analizę ruchu. Po raz pierwszy ruch pojawił się w matematycznym świecie.

> Rzecz interesująca, że w swoich *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* Newton jakby ukrywał narzędzie, jakim był dla niego rachunek różniczkowy i całkowy: przedstawiając wyniki osiągnięte za jego pomocą, tradycyjnymi środkami geometrycznymi. Wynikało prawdopodobnie z chęci nie komplikowania lektury czytelnikom.

W istocie okazuje się, że przestrzeń zakładana przez mechanikę klasyczną jest znacznie bardziej skomplikowanym tworem matematycznym, por. D.J. Reine, M. Heller, *The Science of Space-Time*, Pachart, Tucson 1981, rozdz. 3–6.

Jednakże geometria pozostała trwałym elementem tego świata. Newton i jego następcy byli przekonani o tym, że sceną dla mechaniki jest rozciągająca się w nieskończoność przestrzeń Euklidesa – absolutna przestrzeń mechaniki klasycznej. To ostatnie przekonanie było tak silne, że faktycznie ufizyczniło ono geometrię. *Elementy* Euklidesa zaczęto traktować jako podręcznik, z którego można nauczyć się praw rządzących fizyczną przestrzenią, tą jedyną przestrzenią będącą elementem świata, prawie jego synonimem. Wprawdzie pozostał dualizm ruchu i przestrzeni, mechaniki i geometrii, ale z czasem tak przyzwyczajono się do niego, że uznano go za „konieczny", to znaczy taki, który nie niepokoi ludzkiej dociekliwości. Kant zbudował nawet cały subtelny system filozoficzny, by uzasadnić, że tylko jedna geometria (euklidesowa) i jedna mechanika (newtonowska) jest możliwa. Są to nauki *a priori*, więc jedynie możliwe, ale syntetyczne – to znaczy odnoszą się do rzeczywistego świata. Ideał wiedzy został osiągnięty. Bardziej jednak dzięki ciągowi nieprzerwanych sukcesów niż dzięki wyrokowi Kanta mechanika klasyczna na blisko trzy wieki ustaliła obowiązujący obraz widzenia świata. Był to obraz czysto matematyczny. Geometria dostarczała sceny, a akcję dramatu wyznaczały równania mechaniki.

Rewolucja w geometrii

Gdy Kant przekonywał, że możliwa jest tylko jedna geometria, od prawie pięćdziesięciu lat istniało dzieło, które było zapowiedzią później mających nastąpić przemian. Oto w 1733 roku Girolamo Saccheri napisał rozprawę pod tytułem *Euclides ab omni naevo vindicatus*, czyli *Euklides oczyszczony ze wszystkich zarzutów*. Saccheri, jak wielu innych chciał wykazać niepodważalność postulatów (w szczególności V postulatu) przyjętych przez Euklidesa. Jego rozumowanie było wyjątkowo oryginalne. Zaprzeczył on mianowicie piątemu postulatowi i otrzymał, jego zdaniem, twierdzenia sprzeczne ze zdrowym rozsądkiem. Były to pierwsze twierdzenia geometrii nieeuklidesowej. Jednak nowa gałąź geometrii miała narodzić się prawie sto lat później.

W międzyczasie doskonalono metody geometrii powszechnie uznawanej. Po rewolucji dokonanej przez Kartezjusza, a także po narodzinach rachunku różniczkowego i całkowego, geometria uzyskała potężne narzędzia pozwalające jej na wkroczenie w różne dziedziny matematyki i fizyki. Szczególnie szybko rozwijała się geometria różniczkowa. Metody różniczkowe, zastosowane do krzywych i powierzchni, w rękach mistrzów XVIII wieku dawały zdumiewające rezultaty. Co przez wieki było nieuchwytne, teraz prosto i elegancko dało się wyjaśnić. Do triumfu metod różniczkowych dołączył triumf mechaniki Newtona, która opierając się na kilku podstawowych zasadach (potwierdzonych doświadczalnie) była w stanie wytłumaczyć wszystkie znane zjawiska fizyczne. Tworzenie nowych matematycznych narzędzi trwało nadal, w przekonaniu wszystkich miały one służyć lepszemu zrozumieniu i wyjaśnianiu zjawisk przyrodniczych.

Warto dodać, że Gauss był długoletnim dyrektorem obserwatorium astronomicznego w Getyndze. Funkcję tę objął wraz z katedrą matematyki na tamtejszym uniwersytecie w 1807 roku i pełnił aż do śmierci, to jest do roku 1855.

Wielkiego dzieła dokonał w geometrii różniczkowej Carl F. Gauss, który niejako zmuszony przez pewne praktyczne problemy narzucone przez sponsorów, oderwał się od swoich ulubionych zagadnień z teorii liczb i zajął się rozwiązywaniem problemów z geodezji. Przy okazji tak rozwinął geometrię powierzchni, że następcom pozostało tylko szlifowanie wyników i dobór odpowiedniego nazewnictwa i symboliki. Jednym z najdonioślejszych dokonań Księcia Matematyków było stworzenie tak zwanej geometrii wewnętrznej powierzchni oraz udowodnienie twierdzenia, że pewna wielkość liczbowa (nazwana później krzywizną Gaussa) zależy tylko od geometrii wewnętrznej powierzchni i nie zmienia się przy zginaniu. Twierdzenie to zyskało miano *theorema egregium* (twierdzenie wyborne, wspaniałe). Ponadto Gauss wprowadził inne wielkości opisujące powierzchnię, zwane dziś pierwszą i drugą formą powierzchni.

Wszystkie te rezultaty zebrał Gauss w dziale *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (Ogólne rozważania o krzywych powierzchniach) wydanym w Getyndze w 1828 roku.

Do Gaussa należy również twierdzenie o sumie kątów trójkąta na powierzchni utworzonego z geodezyjnych. Jest to jedna z wersji twierdzenia Gaussa-Bonneta o wielokątach na powierzchni. Geodezyjne to przecież odpowiedniki prostych, tylko na pewnych powierzchniach. Jeśli więc suma kątów w trójkącie geodezyjnym nie musi być równa 180°, to na takiej powierzchni nie obowiązuje geometria euklidesowa...

Nic dziwnego, że Gauss był pierwszym, który rozważał możliwość istnienia geometrii różnych od euklidesowej. Chciał się nawet praktycznie przekonać, jaka jest rzeczywista geometria przestrzeni. Jednak wytyczone trójkąty (których wierzchołkami były szczyty górskie) były zbyt małe, a pomiary obarczone zbyt dużym błędem.

Niezależnie od Gaussa, Rosjanin Nikołaj Łobaczewski i Węgier Janos Bolyai, analizując piąty postulat o równoległych, doszli do wniosku, że zastępując tenże postulat jego zaprzeczeniem otrzyma się geometrię równie dobrą jak euklidesowa, opartą na niesprzecznym systemie aksjomatów. Paradoksalne twierdzenia otrzymane przez Saccheriego i innych okazały się równouprawnionymi z „bardziej naturalnymi", należącymi do geometrii euklidesowej.

Kant swoje tezy dotyczące między innymi jedności geometrii euklidesowej nazwał „skromnie" rewolucją kopernikańską. Prawdziwa jednak rewolucja kopernikańska dokonała się w geometrii w pierwszej połowie XIX wieku za sprawą Gaussa, Bolyaia i Łobaczewskiego. Podważono jedność geometrii euklidesowej, jej wyłączne prawo do opisywania przestrzeni fizycznej.

Natychmiast pojawiły się niepokojące pytania: jeśli znana od dwóch tysięcy lat geometria euklidesowa nie jest jedyną, to która z geometrii rządzi przestrzenią fizyczną i jak to sprawdzić? Już Łobaczewski, walcząc o uznanie swoich idei w geometrii, snuł przypuszczenia co do możliwości wykorzystania różnych geometrii do opisu rzeczywistego świata. Wiadomo nawet, że sam Łobaczewski prowadził astronomiczne obserwacje celem uzyskania odpowiedzi na pytanie: jakiej geometrii podlega przestrzeń?

Por. В.М. Верхунов, Н.И. Лобачевский и теория относительности, w: Вопросы истории физико-математических наук, Изд. Высшая Школа, Москва 1963, s. 295–306.

Myśli prekursorów nowych geometrii były zbyt rewolucyjne i szokujące, by mogły bez wahania być akceptowane przez całą społeczność matematyków. Jednak problemy raz postawione istniały i drążyły umysły matematyków XIX wieku. Znaleźli się tacy, którzy kontynuowali dzieło rozpoczęte przez Gaussa, Bolyaia i Łobaczewskiego: Cayley, Beltrami i Klein (a później Poincaré) skonstruowali modele geometrii nieeuklidesowej, dowodząc tym samym jej niesprzeczności.