O matematyce i fizyce przed Newtonem (część II)

Jerzy MIODUSZEWSKI, Katowice

Za przyczynę ruchu uważa się siłę, chociaż szczegółowe poglądy mogą się tu zasadniczo różnić. Obserwując wioślarza, skłaniamy się do poglądu, według którego dla utrzymania danego stopnia prędkości potrzebny jest stały dopływ siły. Ale obserwując rzucony pocisk, można dojść do innego przekonania: impet nadany pociskowi utrzymuje się mimo braku kontaktu ze sprawcą ruchu, a narasta, jak to jest przy spadku swobodnym, kiedy siła-ciężar – działa stale.

W *Fizyce* (księga VIII, w polskim wydaniu, PWN, 1968, odpowiedni tekst znajduje się na str.299) czytamy: „Co do ruchu w przestrzeni, dobrze będzie zacząć od pewnej trudności. Otóż, jeśli jest prawdą, że wszystko, co się porusza ... jest poruszane przez coś, to jak się to dzieje, że pewne ciała poruszają się nadal, chociaż ten kto wprawił je w ruch, nie ma już z nimi kontaktu?". Tu następują arystotelowskie za i przeciw.

Arystoteles brał pod uwagę oba tłumaczenia, ale jego racje przeważyły za pierwszym, bo miał trudności z pomyśleniem ruchu bez stałego działania sprawcy. Poza tym, świat podksiężycowy – sceneria fizyki Arystotelesa – zdawał się być zapełniony bez reszty gęstym środowiskiem, więc ruch pocisku próbował Arystoteles tłumaczyć tym, że sprawca wprawia w ruch nie pocisk lecz środowisko, a rozprzestrzeniające się zaburzenie środowiska przenosi się na pocisk przejmując w ten sposób rolę sprawcy ruchu będącego stale w kontakcie z pociskiem. To tłumaczenie było częścią szerszego systemu nauki o ruchu, w którym ruch w próżni był nie do pomyślenia. Ale, według wynikającego skądinąd przekonania, próżnia fizyczna w świecie podksiężycowym się nie pojawiała.

Niewyobrażalność ruchu w próżni nie jest obca i nam. Chodzenie polega na stałym odpychaniu się od szorstkiego podłoża, po całkiem gładkim jest niemożliwe. Lot ptaka jest możliwy dzięki oporowi, jaki stawia jego skrzydłom powietrze. Temu samemu celowi służą płetwy, a mogą być mniejsze, bo ośrodek wodny jest gęstszy.

Wyobrażamy sobie świat podksiężycowy Arystotelesa jako gęste środowisko pokrywające Ziemię na kształt oceanu i które na pewnej wysokości się urywa. Nad taflą tego oceanu jest miejsce dla sfer nieba, w których tkwią księżyc, planety i gwiazdy. Sfery wykonują ruchy idealne – jednostajne. W systemie Arystotelesa świat sfer nieba i świat podksiężycowy nie łączą się z sobą fizycznie i rządzą się odrębnymi prawami.

My nie uznajemy dziś tej odrębności, ale samej jej idei nie odrzucamy. Nie mamy i my jednolitej fizyki. Inna obowiązuje makrokosmos, a inna świat subatomowy. Moglibyśmy je połączyć w jeden system za pomocą jakiejś spekulacji myślowej, ale nie chcemy tego robić za każdą cenę.

Jan Filopon (lub Jan Gramatyk) żył na przełomie wieków V i VI w Aleksandrii.

Awicenna – Ibn Sina (980 - 1037).

Jean Buridan (1300 - 1358) - twórca paryskiej szkoły filozofii przyrody.

O Mikołaju z Oresme była już mowa w części (I) artykułu. Prekursor Kopernika w dwu wielkich teoriach: teorii pieniądza i teorii planetarnej.

Autorytatywny wykład teorii impetu można znaleźć w rozdziale 8 (John Burdian and the Impetus Theory of Projectile Motion) książki Marshalla Clagetta, *The Science of Mechanics in the Middle Ages*, Madison, The University of Wisconsin Press, 1961. Popularne ujęcia: Michael McCloskey, *Intuitive Physics*, Scientific American, April 1983, str. 122 – 130, oraz Wojciech Sady, *Narodziny współczesnej fizyki*, Problemy Nr 10, 1987.

Co do ruchu sfer nieba, to filozofowie chrześcijańscy, a potem filozofowie islamu, dopowiadali: impet nadany sferom nieba przez Sprawcę w dniu stworzenia utrzymuje się. Dlaczego więc – zapytywali – ruch pocisku ma nie podlegać temu prawu zachowania? Teologia upominała się w ten sposób o jednolite prawa dla obu części kosmosu. Ale zasadnicza argumentacja pochodząca od Filopona z Aleksandrii nie miała charakteru teologicznego i polegała na doprowadzeniu do zgodności teorii z obserwacją. Ruch pocisku tłumaczyła prościej: impet ma się zachowywać, a środowisko stawiając opór, prowadzi do wytracania się impetu. Tego zdania był później Awicenna i wielu innych filozofów arabskiego Wschodu. Zmiana poglądu wynikała również i z tego, że w obrębie systemu Arystotelesa napotykano niepokonywalne trudności w wytłumaczeniu sposobu, w jaki zaburzenie środowiska miało się przenosić na pocisk. W teorii Filipona próżnia była myślowo dopuszczalna. Oczywiście, czymś innym było jej istnienie fizyczne.

Dla europejskiej nauki nowożytnej teorię impetu odkryli filozofowie scholastyczni XIV wieku, wśród których na pierwszym miejscu wymienia się Jana Buridana z Uniwersytetu Paryskiego, poprzedzającego tam znanego już nam Mikołaja z Oresme.

Prześledźmy pewne ilościowe aspekty teorii impetu mniej więcej w ten sposób, w jaki ją mogli widzieć jej twórcy.

*

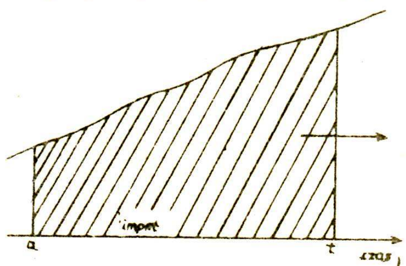
Masa – jedno z najkłopotliwszych pojęć fizyki: mylona z ciężarem, bo według ogólnego przekonania, stosunek $\frac{Q}{m}$, ciężaru ciała do jego masy, jest dla danego miejsca na Ziemi ten sam dla wszelkich ciał, niezależnie od ich wielkości i rodzaju. To przekonanie ma potwierdzenie w obserwacji. Einstein oparł na nim swoją ogólną teorię względności. Nie jest natomiast konieczne dla ugruntowania systemu fizyki Newtona. Mimo to, Newton był pierwszym, który zauważył logiczną potrzebę rozróżniania ciężaru i masy (ilości materii): słowo „masa" pojawiające się w jego prawie grawitacji i mające związek z ciężarem, nie musi znaczyć tego samego, co słowo „masa" z jego drugiego prawa dynamiki.

Przez kręt rozumie się tzw. moment ogólny pędu układu punktów materialnych; w ruchu obrotowym jest równy $I\omega$, jeśli liczyć względem osi obrotu (przez I oznaczony jest moment bezwładności względem osi obrotu, a przez ω prędkość kątowa). Zdaje się, że jedynie w języku polskim istnieje skrót – kręt – dla momentu ogólnego pędu; wprowadzony był przez Banacha w jego *Mechanice teoretycznej*.

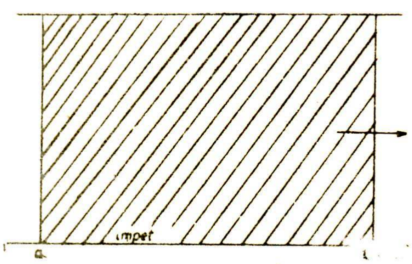
Impet jest pojęciem niedefiniowanym. Ma być proporcjonalny do stopnia prędkości i do masy poruszającego się pocisku. Ale przypisywany jest również ruchom obrotowym, takim jak obrót koła szlifierskiego; wtedy jest proporcjonalny do prędkości obrotowej i do czegoś, co reprezentuje w tym przypadku masę, a co my teraz nazywamy momentem bezwładności, bezwładnością nazywając samą masę. Impet odpowiada więc temu, co my nazywamy pędem, lub krętem (to drugie, w ruchu obrotowym).

To, że raz nadany impet ma się zachować, jeśli nie wytraca się na skutek oporu środowiska i innych sił przeciwdziałających ruchowi, miało najpełniejsze potwierdzenie właśnie w obserwacji swobodnie obracającego się koła szlifierskiego – kiedy oporu środowiska praktycznie się nie zauważa.

Obserwacja przemawia również za tym, że narastanie impetu jest powodowane wtłaczaniem siły w poruszające się ciało. Jeśli na odcinku czasowym liczonym od chwili a ciało poddane jest działaniu siły równej $f(t)$ w chwili t, to impet narasta tak jak pole pod wykresem funkcji f.

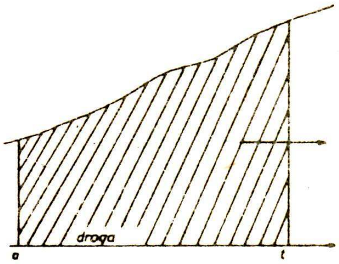


Rys. 1



Rys. 2

Najwyraźniej potwierdza to obserwacja ciała poddanego sile stałej wtłaczanej w nie w każdej chwili. Impet narasta wtedy jak pole pod wykresem funkcji stałej, a więc jednostajnie.

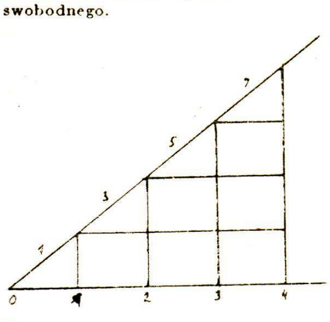


Rys. 3

Jest tak przy spadku swobodnym ciała w próżni pod wpływem ciężaru. Teoria impetu podpowiada więc bez uciekania się do doświadczenia, że spadek ten odbywa się ruchem jednostajnie przyśpieszonym. Doświadczenie nie tylko nie było potrzebne dla potwierdzenia tego prawa, lecz było w istocie niemożliwe, bo trzeba by mieć próżnię fizycznie. Ale zdecydować się na nie myślowo było można. Wypowiedziane zostało na prawie sto lat przed Galileuszem przez scholastyka Domenico de Soto, a można przypuszczać, że świadomy był tego prawa Mikołaj Oresme.

Domenico de Soto opublikował w r. 1555 w Salamance traktat, w którym znalazł się również komentarz na temat spadku swobodnego.

Chociaż być może nie był całkiem pewien, czy spadek swobodny w próżni ma się odbywać ruchem jednostajnie przyśpieszonym, mimo to ruch jednostajnie przyśpieszony rozważał. Zastanawiał się, jak powinna wzrastać droga w tego rodzaju ruchu. Posłużył się do tego celu ogólną zasadą, którą oprócz Oresme'a sformułowali współcześni mu Calculatores z Oksfordu, a którą już kilkakrotnie w rozmaitych sytuacjach stosowaliśmy. Według tej zasady, ilość wyemanowanej cechy przedstawia pole pod wykresem intensywności emanacji. Rozważaną teraz cechą – takiego słowa, odpowiadającego łacińskiemu *qualitas*, używano – jest droga; prędkość jest intensywnością jej narastania w czasie. Stąd, prawo ilościowe dla narastania drogi w czasie przedstawione na rysunku 3.



Rys. 4

Jeśli prędkość narasta jednostajnie, jej wykres jest prostoliniowy. Zaczyna się zerem, jeśli w chwili początkowej prędkość była zerem; tak właśnie jest, kiedy ciało puszczamy swobodnie, nie nadając mu żadnego początkow[illegible] impetu. Drogę przebywaną w czasie ilustruje wtedy pole pod wykre[illegible]stawionym na rysunku 4.

Odczytujemy zeń, że drogi przebyte w kolejnych równych odstępach czasu mają się do siebie jak kolejne liczby nieparzyste

$$1 : 3 : 5 : 7 : \ldots \qquad (1)$$

Przeważnie przypisuje się odkrycie tego prawa Galileuszowi. Z pism Galileusza nie wynika wszakże, by on sam przypisywał sobie tę zasługę. W *Discorsi*... przedstawia dowód tego prawa posługując się wykresem aż nazbyt przypominającym wykres Oresme'a.

Rysunek 48 w *Discorsi e demostrationi matematiche*... do tekstu na str. 131 wyd. polskiego z r. 1930 (Warszawa. Kasa Mianowskiego). Galileusz nie powołuje się – zwyczaj jego czasów – na nikogo.

To, co naprawdę musiał zrobić Galileusz, to utwierdzić się w stosowalności prawa Oresme'a do dróg przy spadku swobodnym. Scholastykowi Domenico de Soto dla upewnienia się w tym wystarczyła zgodność z teorią impetu. O Galileuszu się mówi, że sprawdzał prawo swobodnego spadku eksperymentem. Ale z pism Galileusza widać, że był on mistrzem dysputy scholastycznej posługującej się eksperymentem myślowym. Brak dowodów na to, by wykonywał jakieś eksperymenty fizyczne.

Oresme – odkrywca prawa – nie pisze nigdzie o zastosowaniach, chociaż wiemy, że ruch pocisku interesował go. Ale interesowała go też intensywność barwy i strumienia, a także intensywność wiary i łaski niebios spływającej na człowieka. W istocie, był odkrywcą pewnej formy prawa.

*

Cechą przednewtonowskiej nauki o ruchu jest kumulatywny pogląd na takie wielkości jak przebywana droga, nagromadzany impet i in. Impet – jeśli masa pocisku jest w czasie ruchu niezmienna – można co do wielkości utożsamiać z prędkością. Dla nas prędkość, to wielkość związana z chwilą, określana dla danej chwili przez przejście graniczne. Jest pochodną – jak byśmy powiedzieli. A u scholastyków jest całką.

*

Teoria impetu była w XIV wieku teorią już ogólnie akceptowaną. Dla filozofów mniej matematycznych, takich jak William Ockham, służyła budowaniu wizji świata. Ważne było w niej to, że pozwalała na jednolite traktowanie światów dotąd myślowo rozłączanych: podksiężycowego i świata sfer nieba; sfery nieba poruszają się teraz pod wpływem impetu nadanego im w dniu stworzenia. Niebo znalazło się w zasięgu spekulacji fizyki. Stał się możliwy do pomyślenia – racjonalniej tłumaczący ruch nieba – system heliocentryczny. Kreśli jego zarys Oresme, ale nie opracowuje matematycznie. Bo ani Oresme, ani – wbrew swemu mianu – Calculatores, ani Buridan, ani tym bardziej Ockham, nie byli matematykami. Metody arytmetyczne były im obce. W mniej więcej ich czasie arytmetyką zajmował się Fibonacci, ale był kupcem. Oni wykładają w odizolowanych od świata uniwersytetach, są biskupami, a nawet arcybiskupami. Matematyka – w istocie geometria – służy im jako przedmiot kontemplacji.

William Ockham (1285 – 1330). W sporze o uniwersalia – skrajny nominalista: nie tworzyć bytów nad potrzeby.

*

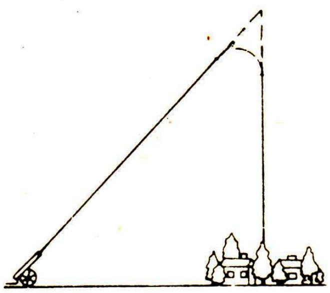
Rozwojowi nauki towarzyszy rezygnowanie z pytań. Arystoteles odrzucił teorię impetu, bo nie mógł odpowiedzieć na pytanie, jak możliwy jest ruch bez stałego kontaktu ze sprawcą. Twórcy teorii impetu zignorowali to pytanie.

Ale męczyły ich jeszcze inne, które uważali za zasadnicze, a których w naszych czasach już nikt nie stawia, chyba że dzieci.

Oto osiołek postawiony jest dokładnie między dwoma żłobami siana. Nie ma on żadnego powodu, by przekładać jedno siano na drugie. Nie sięgnie więc po żadne i padnie z głodu.

Przypisuje się tę anegdotę Buridanowi, ale zawarta jest w niej trudność, która w innym kontekście była przedmiotem poważnych rozważań w ciągu wielu stuleci.

W każdej chwili lotu strzała spoczywa. Czas lotu składa się z chwil. Jak więc możliwy jest lot strzały? Zenon z Elei – V w. przed Chr.



Rys. 5. Tor pocisku według ryciny Waltera Hermanna Ryffa z końca XVI wieku.

Walter Hermann Ryff – lekarz i matematyk żyjący w połowie XVI wieku w Moguncji i Norymberdze. Wydał książkę o charakterze encyklopedycznym zawierającą pełną wiedzę tamtych czasów w zakresie artylerii.

Oto pocisk rzucony w górę osiąga punkt najwyższy lotu. Prędkość pocisku znika. Na jak długo? Arystoteles odpowiadał: na pewien czas. Uważał bowiem, że każdy stopień prędkości ma jakieś trwanie, nie przypisując sensu pojęciu ruchu w danej chwili, m.in. pojęciu prędkości w danej chwili. Trudność z pojęciem prędkości w danej chwili polegała nie tyle na znalezieniu dla niej ujęcia poprzez przejście graniczne, chociaż i ta była, co na przekonaniu o bezużyteczności takiego pojęcia. Całości ruchu i tak nie można przecież złożyć ze stanów chwilowych, bo czasu nie da się złożyć z oddzielnych chwil, a prostej z punktów. Pogląd ten miał swoje źródło w słynnej aporii Zenona o strzale, respektowanej przez Arystotelesa i jego kontynuatorów.

Pocisk powinien zatrzymać się więc na jakiś czas w punkcie najwyższym swego lotu. Jest to, według Arystotelesa, tzw. faza spokoju – *quies media* – po której zaczyna się spadek pod wpływem ciężaru. Jeszcze w XVI wieku, kiedy artyleria była w powszechnym użyciu i kiedy obserwacja wyraźnie przeczyła występowaniu fazy spokoju, sama doktryna *quies media* bynajmniej nie upadła, lecz jedynie uległa pewnej modyfikacji: faza spokoju została zastąpiona fazą ruchu idealnego po kole łączącym dwie pozostałe prostoliniowe fazy ruchu (patrz rys. 5).

Galileusz rozważał kwestię *quies media* na sposób Buridana. Zapytywał: jak długo miałaby trwać faza spokoju? Każda długość jest równoprawna. Zatem, albo faza spokoju nie występuje, albo przedłuża się w nieskończoność. To drugie uznał za absurd.

Odrzucił więc możliwość *quies media*, rozstając się przy tym z doktryną Arystotelesa o trwaniu każdego stopnia prędkości przez jakiś czas. Ujmuje to w *Discorsi*... jednym zdaniem: w ciągu ruchu ciało przebywa wszystkie swoje stopnie prędkości nie zatrzymując się na żadnym z nich. Ale w tym właśnie upatrywał trudność Zenon z Elei. Dlaczego Galileusz odważył się teraz tę trudność zignorować?

Żeby na to odpowiedzieć, wróćmy do prawa Oresme'a dla dróg przebywanych przez ciało w czasie swobodnego spadku w kolejnych równych odstępach czasu. Galileusz zrobił rzecz pozornie bez znaczenia, zwracając uwagę na sumy kolejnych dróg. Otrzymał ciąg liczb

(2) $$1, 4, 9, 16, 25, \ldots$$

i prawo dróg wypowiedział inaczej: droga przy spadku swobodnym narasta proporcjonalnie do kwadratu czasu; od razu przy tym myślał o czasie biegnącym w sposób ciągły. Stąd wzór

(3) $$s = at^2$$

na drogę s w zależności od czasu t, w którym a jest stałą reprezentującą wielkość przyśpieszenia.

Jeśli w chwili początkowej nadajemy pociskowi impet, to zgodnie z zasadą zachowania impetu pocisk powinien zachować ruch jednostajny, w którym wzór na drogę ma postać

(4) $$s = bt,$$

gdzie b jest stałą reprezentującą impet nadany w chwili początkowej (a więc prędkość początkową). Aby otrzymać pełny opis ruchu pocisku rzuconego w chwili początkowej w górę, trzeba od ruchu (4) odjąć ruch (3). Otrzymamy

(5) $$s = bt - at^2$$

jako wzór na położenie s pocisku w chwili t. Pocisk od samego początku bowiem „spada" według wzoru at^2, ale w pierwszej fazie ruchu składnik bt przeważa i stąd początkowo wznoszenie się pocisku. Sam pomysł złożenia ruchów był ważny, chociaż nie był całkowitą nowością. Ważne były wzory, w szczególności wzór (5); chociaż nie były napisane przez Galileusza *explicite*, to zdawał on sobie z nich sprawę.

Ze wzoru (5) można odczytać, że jest dokładnie jedna chwila (jest to chwila $t = \frac{b}{2a}$), w której s osiąga maksimum. Wzór (5) nie wskazuje więc na istnienie żadnego *quies media*.

Czy możemy się więc dziwić Galileuszowi, że mając wzór pożegnał się nie tylko ze scholastycznymi skrupułami co do *quies media*, ale i z doktryną Arystotelesa o utrzymaniu się każdego stopnia prędkości przez jakiś czas? Bo ze wzoru wynika także i to, że prędkość przyjmuje każdą wartość w dokładnie jednej chwili. Ruch jest więc opisany przez swoje stany w poszczególnych chwilach. Jesteśmy uwolnieni od męczących rozmyślań nad aporią Zenona o strzale.

Nie wiemy, co naprawdę sądził Galileusz o swoim rozwiązaniu, bo nie zdążył napisać. My rozumiemy je tak, że zawiera ono ilościowy opis ruchu pocisku (nie tylko zresztą pocisku, bo przeniesienie rozważań na inne ruchy się narzuca). Ale wzór łączy jedynie pojęcia matematyczne; w przyszłości będą one uściślone: Newton określi prędkość chwilową poprzez przejście graniczne, a matematycy wieku dziewiętnastego będą już wiedzieć ściśle, jak rozumieć zmienną ciągłą. Pytanie o przystawanie tego formalizmu matematycznego do pojęć wyrosłych na gruncie fizyki zostanie zapomniane.

Mimo że nie zawsze je rozumiemy, wzorami możemy się posługiwać. To spostrzeżenie stanowi, być może, klucz do zagadki, jaką stanowi to nagłe przyśpieszenie rozwoju nauki od czasów Galileusza.

Wśród rzeczy napisanych przez Woltera są dwie sympatyczne. Są to *Listy o Anglikach*, gdzie w jednym z rozdziałów Wolter z entuzjazmem pisze o Newtonie, i szkic *O filozofii Newtona*. Newtonowi zarzucało się, że poprzestał na ilościowym aspekcie swego prawa grawitacji, rezygnując z tłumaczenia, na czym grawitacja mogłaby polegać. Wolter tak oto przedstawił monolog wewnętrzny Newtona dający odpowiedź na te zarzuty.

Dawniej – jak miał mówić Newton – uczeni, opisując zjawiska, dociekali także ich przyczyn. Obecnie zaś coraz częściej się zdarza, że potrafimy opisać zjawiska matematycznie, chociaż ich przyczyny dojść nie możemy. Możemy je wyjaśniać za pomocą rozmaitych spekulacji, jednak nie chcemy tego robić. *Hypotheses non fingo* – dopowiadał dumnie.

Aluzja do teorii wirów Kartezjusza.

W istocie, była to rezygnacja. Ale to był Newton. Inni z tych samych powodów wpadali w euforię.

*

Galileusz uprawomocnił pojęcie prędkości w danej chwili, ale pozostawało ono nadal – zgodnie z tradycją scholastyczną – pojęciem niedefiniowanym. Dla Newtona prędkość w danej chwili, tj. tempo wzrostu drogi s w chwili t, była wartością graniczną wyrażenia

$$\frac{s(t+h)-s(t)}{h},$$

jeśli $h \to 0$. Tak samo określał tempo wzrostu – fluksję – innych fluent. Fluksję symbolizowała u Newtona kropka nad symbolem fluenty. Jeśli więc literą v oznaczona jest zgodnie ze zwyczajem prędkość, to przy tych umowach mamy $v = \dot{s}$.

Zasadę narastania impetu powodowanego wtłaczaniem w poruszające się ciało w każdej chwili t siły $f(t)$ – przypomnijmy rysunek 2 – wolał teraz wypowiedzieć tak: tempo wzrostu impetu w danej chwili jest równe sile, jaka w danej chwili działa na ciało. Jeśli przez $I(t)$ oznaczymy impet, jaki ma ciało w chwili t, to zasadę można zapisać wzorem

$$\dot{I}(t) = f(t) \tag{6}$$

dla każdej chwili t.

Ale impet punktu materialnego – bo w punkt materialny zdążył się przeistoczyć scholastyczny pocisk – jest iloczynem

$$mv$$

jego masy m przez prędkość, więc prawo impetu $\dot{I} = f$ przyjmie postać

$$m\dot{v} = f, \tag{7}$$

tj. postać znanego nam dobrze drugiego prawa dynamiki Newtona. W tym wzorze symbol $\dot{v}$ oznacza tempo wzrostu prędkości v, tj. przyśpieszenie. Prawo (7) odczytujemy w znany nam sposób: w każdej chwili przyśpieszenie punktu materialnego jest proporcjonalne do siły nań w tej chwili działającej. Wzór (7) uwidacznia jedynie postać prawa; symbol t oznaczający chwilę został w nim pominięty.

Narzuca się pytanie: czyżby zasługa Newtona w sformułowaniu chyba najważniejszego jego prawa polegała jedynie na nadaniu innej formy prawu znanemu scholastykom?

Sam Newton był skromny i mawiał: „stałem na ramionach olbrzymów" Nie mówił jednak, kogo miał na myśli.

*

Wzór (6) orzeka, że siła jest równa tempu wzrostu impetu liczonemu w stosunku do tempa upływu czasu. Na początku (w części (I) artykułu) widzieliśmy, że siła jest również tempem wzrostu pracy liczonym w stosunku do tempa narastania drogi. Jeśliby droga narastała w czasie jednostajnie, to tempa wzrostu pracy i impetu – liczone względem czasu – byłby proporcjonalne. Byłyby równe, jeśliby wspomniane jednostajne tempo wzrostu drogi przyjąć za jednostkowe. Jeśli teraz droga s narasta w tempie $\dot{s} = v$, to aby otrzymać tempo wzrostu pracy w czasie, należy poprzednie tempo wzrostu pracy, tj. siłę f, przez to v przemnożyć.

Dostaniemy

$$\dot{L} = fv,$$

gdzie L jest pracą wyrażoną – tak samo jak siła i prędkość – w zależności od czasu.

Jeśli uwzględnimy (7), dostaniemy

$$\dot{L} = mv\dot{v}. \tag{8}$$

Wyrażenie po prawej stronie ostatniego wzoru jest nieobce nawet początkującym w rachunku różniczkowym – jak się obecnie nazywa rachunek fluksji. Chodzi o iloczyn funkcji przez tempo jej wzrostu.

*

Zapytajmy o tempo wzrostu pola prostokąta, którego boki x i y wzrastają w czasie w tempie $\dot{x}$ i $\dot{y}$.

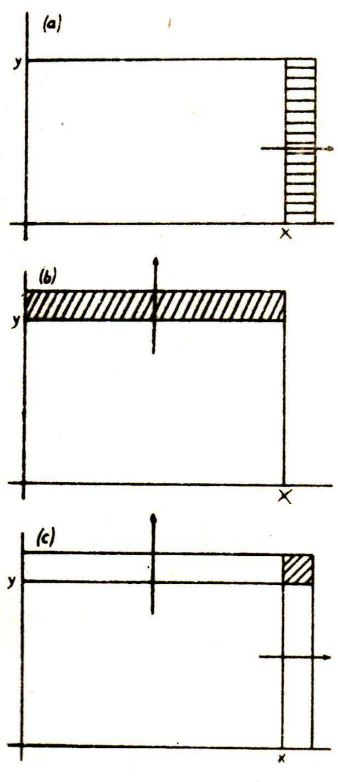
Jeśliby wzrastał tylko bok x, to tempo wzrostu pola byłoby równe $y\dot{x}$ (patrz rys. 6(a)); byłoby równe y, jeśliby je mierzyć przyjętym za jednostkowe tempem wzrostu zmiennej x, ale mierzymy je względem czasu, co wymagało przemnożenia – już raz to robiliśmy – przemnożenia przez tempo wzrostu $\dot{x}$ zmiennej x.

Podobnie, jeśliby wzrastał tylko bok y, to tempo wzrostu pola byłoby równe $x\dot{y}$.

Suma

$$y\dot{x} + x\dot{y}$$

obu otrzymanych wielkości daje pełne tempo wzrostu pola prostokąta, co byłoby do odczytania z rysunku 6, gdyby nie to, że uwzględniliśmy w rachunku wzrost pola jedynie w kierunkach x i y, zaniedbując wzrost o nieduży prostokącik w prawym górnym rogu prostokąta z rysunku 6(c).



Rys. 6

Gottfried Wilhelm Leibiniz (1646–1716) – największy autorytet filozoficzny kilku pokoleń uczonych. Współtwórca rachunku różniczkowego i całkowego. Wyprowadzenie wzoru na $\dot{(xy)}$ miało zarówno u Newtona jak i u Leibniza luki. George Berkeley miał z tego powodu ułatwione zadanie w krytyce rachunku jako teorii niematematycznej. Jeśli się nawet nie zgadzamy z argumentacją Berkeleya (jego zarzuty odpiera każdy współczesny nam podręcznik analizy), to jednak niematematyczny charakter analizy jest zauważalny: wykładana środkami niematematycznymi lub półmatematycznymi nie prowadzi do błędów, a rola arytmetyki sprowadza się w niej do potwierdzenia wcześniej pomyślanych twierdzeń.

Zaniedbywali ten szczegół także i twórcy rachunku różniczkowego, Newton i Leibniz, rozmaicie to zaniedbanie uzasadniając.

We współczesnym nam ujęciu rachunku ścisły dowód wzoru

$$\dot{(xy)} = y\dot{x} + x\dot{y}$$

na pochodną iloczynu nie sprawia żadnych trudności.

W szczególności,

$$\dot{(x^2)} = 2x\dot{x},$$

co inaczej zapiszemy jako $x\dot{x} = \dot{\left(\frac{1}{2}x^2\right)}$.

*

Stosując ostatnio napisany wzór do v w miejscu x, dostaniemy $v\dot{v} = \dot{\left(\frac{1}{2}v^2\right)}$, a w rezultacie

$$\dot{L} = \dot{\left(\frac{1}{2}mv^2\right)} \tag{9}$$

na mocy wzoru (8), wciągając także stałą m pod znak operacji pochodnej.

Ze wzoru (9) wynika, na mocy zasady Calculatores, że w czasie ruchu wielkości

$$\frac{1}{2}mv^2$$

i praca L wykonana przez siłę f (obie nagromadzone do tej samej chwili t) różnią się o pewną stałą.

Stała ta równa się zeru w przypadku ruchu zaczynającego się prędkością zerową, bo na początku ruchu obie wielkości są równe (są równe zeru). W tego rodzaju ruchu mamy więc w każdej chwili

$$L = \frac{1}{2}mv^2, \tag{10}$$

gdzie v jest prędkością w tej chwili, a L – do tej chwili przez siłę f wykonaną pracą.

Termin „siła żywa" był używany w podręcznikach mechaniki jeszcze na początku wieku. Używa tego terminu Суслов w swojej Теоретической механике, Москва – Ленинград 1948.

Siła wykonuje w czasie ruchu pracę i nadaje jednocześnie poruszanemu ciału impet. Ale zależność między pracą a impetem wcale nie okazała się prosta: po prawej stronie wzoru pojawił się nie impet mv, lecz wielkość $\frac{1}{2}mv^2$, którą można by przeliczyć na impet, ale tego się nie robi. Połowa iloczynu masy ciała przez kwadrat prędkości jest – jako ekwiwalent pracy – wielkością ważną sama przez się. Leibniz nazywał tę wielkość siłą żywą, a my nazywamy energią ruchu.

*

Rozważmy pocisk wyrzucony z powierzchni Ziemi z prędkością v_0. Jeśli energia $\frac{1}{2}mv_0^2$ jest równa lub przewyższa tę ilość pracy, która wystarczyłaby dla przemieszczenia pocisku na dowolną odległość od Ziemi, to pocisk odleci w nieskończoność. Wspomnianą ilość pracy obliczyliśmy w pierwszej części naszych rozważań (końcowy fragment części (I) artykułu). Ta praca jest równa QR, gdzie Q jest ciężarem pocisku, a R promieniem Ziemi. Nasz warunek wyraża się więc nierównością $\frac{1}{2}mv_0^2 \geq QR$, którą zapiszemy w postaci

$$v_0^2 \geq 2R \cdot \frac{Q}{m}. \tag{11}$$

Zwróćmy uwagę na proporcję $\frac{Q}{m}$, ciężaru, tj. siły z jaką ciało przyciągane jest przez Ziemię, do masy ciała. Z drugiego prawa dynamiki Newtona wiemy, że $\frac{Q}{m}$ jest przyśpieszeniem przy spadku swobodnym ciężaru Q w próżni. Galileusz w *Discorsi*... słowami Salviatiego przekonywał Simplicia, że to przyśpieszenie jest dla danego miejsca to samo dla wszelkich ciał niezależnie od ich wielkości i rodzaju. Zastraszony Simplicio przytaknął, ale Salviati kontynuował wywód, sam nie będąc do końca pewien swoich racji.

W polskim wydaniu *Discorsi*... na str. 60 i dalszych.

Na str. 53 *Discorsi* ... spotykamy następującą argumentację przeciwko przekonaniu, że ciała cięższe spadają (w próżni) szybciej niż lekkie. Przypuśćmy – mówi Salviati – że tak jest, i połączmy ciało lekkie A z ciałem ciężkim B w jedno. Jako cięższe niż B, połączone ciała powinny spadać szybciej niż B. Ale skoro samo A spadałoby wolniej niż B, więc połączone z B powinno hamować spadek B. Zatem, połączone ciała A i B spadają wolniej niż B. Sprzeczność z poprzednią konkluzją.

Powyższa argumentacja jest wielce przekonywająca również jako dowód, że ciała tego samego rodzaju spadają jednakowo szybko. Tego rozumowania Galileusza nie znajdujemy na ogół w podręcznikach fizyki. Przeważnie pisze się, że Galileusz sprawdzał prędkość spadających kulek puszczając je z wysokiej pochyłej wieży.

Dyskurs Salviatiego z Simpliciem (i Sagredo) był prowadzony w konwencji scholastycznej: jeśli doświadczenie, to myślowe. Galileusz – ostatni z wielkich scholastyków – był mistrzem doświadczenia myślowego.

Tradycja głosi, że Galileusz próbował sprawdzić doświadczeniem uniwersalność wielkości $\frac{Q}{m}$, tłumacząc wynik na korzyść swojej tezy. Również i później nie znajdowano żadnych przesłanek za obaleniem tego przekonania. Próbował je poddać w wątpliwość – bez rezultatu – w końcu ubiegłego wieku Roland Eötvös. Wielkość $\frac{Q}{m}$, uznana za uniwersalną dla danego miejsca, nazywana jest przyśpieszeniem ziemskim i jest oznaczana zwykle literą g. Dla miejsc, w których przeważnie przebywamy, wielkość ta jest równa w przybliżeniu 9,81 (m/s)/s, jeśli użyć współczesnych nam jednostek.

Nierówność (11) przyjmuje teraz postać

$$v_0^2 \geq 2gR.$$

Wielkość $\sqrt{2gR}$ jest równa w przybliżeniu 11 km/s. Jest to prędkość, z jaką wystarczy wyrzucić z powierzchni Ziemi pocisk, aby już na Ziemię nie wrócił.

*

Wbrew zapowiedzi w tytule wyszliśmy poza czasy Newtona. Stało się tak, bo przejście było prawie niezauważalne. Zauważalną wszakże zmianą było pojawienie się wzorów, co było znakiem pojawienia się matematyki w rozważaniach fizyki, dotąd w niej nieobecnej. Przeczuwali to wejście matematyki do przyrodoznawstwa scholastycy, ale Galileusz powiedział może zbyt przesadnie, że księga przyrody zapisana jest językiem matematyki. Wydaje się, że pogląd Kanta jest bliższy istoty rzeczy: matematyka jest jedynym nam znanym środkiem wyrazu, kiedy chcemy mówić o zjawiskach przyrody dostatecznie pewnie. Uciekamy się do matematyki, nawet jeśli zawęża widzenie zjawiska. Przypomnijmy monolog wewnętrzny Newtona. Sygnałem późniejszych zmian jest pojawienie się eksperymentu. Nie było bardziej empirycznego systemu fizyki niż system Arystotelesa. Również fizyka scholastyków była empiryczna: otoczeni nowościami technicznymi późnego średniowiecza, takimi jak koło szlifierskie i zegar, stworzyli teorię impetu i pomyśleli system heliocentryczny. Mimo to Arystoteles i scholastycy prowadzili dyskurs z naturą, tak jak się rozmawia z kimś wielce szanowanym, któremu w rozmowie nie zadaje się pytań. Poprzestawali na obserwacji. Eksperyment, również należący do empirii, jest czymś zupełnie innym, chociaż wyłączamy tu eksperyment, który miałby służyć dla zanegowania stosowalności teorii. Eksperyment można porównać do poszukiwania podpowiedzi i to u kogoś, przeciwko komu potem tę odpowiedź chce się wykorzystać. Dopuszczanie eksperymentu jako metody uważa się za krok, który w pierwszym rzędzie zaważył na przyspieszeniu rozwoju nauki. Ta opinia jest co najmniej przesadna i przytoczyliśmy przeciwko niej dostatecznie wiele argumentów. Staraliśmy się także bronić Galileusza przed zasługą postawienia wspomnianego kroku.

Z niezbadanych powodów w części (I) tego artykułu była podana inna wartość liczby e niż 2.718281828...
Nie miało to na celu sprawdzenia uwagi Czytelników.