Co każdy o spójności wiedzieć powinien

Jerzy MIODUSZEWSKI, Katowice

Artykuł powstał przy okazji prac Autora dla jednej z amerykańskich encyklopedii

Pojęcie o spójności wywodzi się z filozofii Greków, z ich dyskusji nad budową wewnętrzną substancji fizycznych i nad subtelną budową figur geometrycznych. Chociaż co do budowy substancji fizycznych idee atomistyczne przeważyły, to struktura figury geometrycznej widziana była przez Greków zawsze jako *continuum*, tj. obiekt podzielny w nieskończoność i spójny w znaczeniu bliskim współczesnym intuicjom. Problem przedyskutował Arystoteles. Według jego końcowej konkluzji continuum nie mogło być zbudowane z punktów. Podzielając to przekonanie Euklides pisał swoje *Elementy.* Dla Euklidesa punkty były niczym więcej niż znakami miejsca. Filozofowie scholastyczni wieku czternastego podzielali przekonanie Arystotelesa, które przetrwało w matematyce do czasu dziewiętnastowiecznej przebudowy pojęć matematycznych.

Traktowanie figury geometrycznej jako zbioru punktów pojawiło się dopiero w *Analizie* Cauchy'ego, a jako program u Bolzany. Jednak to Dedekind (1858, 1872) był tym, który ostatecznie odrzucił obiekcje Arystotelesa co do punktowej budowy continuum. Metodami arytmetycznymi i mnogościowymi zbudował continuum złożone z liczb, które nazywamy *rzeczywistymi.* Zbiór liczb rzeczywistych mieści w sobie, z zachowaniem działań, dawniej znane liczby wymierne. Jest uporządkowany liniowo bez skoków i luk. Te ostatnie dwie własności znaczą w istocie spójność, ale na ścisłe określenie spójności nadszedł czas dopiero z początkiem dwudziestego wieku, kiedy wyodrębniła się dyscyplina nazywana topologią mnogościową.

Określenie spójności pojawiło się w *Mengenlehre* Hausdorffa (1914), ale było wcześniej sformułowane przez Lennesa (1905) i Frederica Riesza (1906, 1907). Ten wczesny okres wyodrębniania się pojęć o spójności – nie wyłączając zarzuconej później propozycji Cantora – opisany jest w artykule R.L. Wildera (1978). Inne szczegóły można znaleźć w *Topologie II* (1951) Kuratowskiego i w *Topology* Hockinga i Younga (1961), a także u Wilkosza (1931).

W terminie rozbicie mieści się to, że elementy rozbicia są zbiorami rozłącznymi.

Według Riesza – i to jest nasze obecne określenie – zbiór jest *spójny* – obecnie wolimy mówić, że przestrzeń jest *spójna*, jeśli nie da się *rozbić* na dwa zbiory domknięte niepuste.

Ponieważ dopełnienie zbioru domkniętego jest zbiorem otwartym, więc równoważnym warunkiem spójności przestrzeni jest niemożliwość rozbicia jej na dwa zbiory otwarte niepuste, co jest równoważne z warunkiem niezawierania się w niej zbioru niepustego, jednocześnie domkniętego i otwartego, tj. *domknięto-otwartego.*

Przestrzeń, która nie jest spójna nazywana jest *niespójną.* Przez *kontinuum* rozumiemy przestrzeń spójną zwartą.

Nie uważamy za trywialny dowód tego, że *prosta rzeczywista*, tj. zbiór liczb rzeczywistych ze zwykłą topologią, a więc z topologią wyznaczoną przez uporządkowanie, jest spójna. Przy tej samej argumentacji inne *proste*, tj. zbiory uporządkowane liniowo bez skoków i luk, są spójne; zakładamy – aby być w zgodzie z przyjętą ogólnie terminologią – że proste nie mają końców. Prosta rzeczywista – nazywana tradycyjnie prostą – jest wyróżniona wśród innych prostych tym, że jest *ośrodkowa.*

Długa prosta, tj. zbiór liczb porządkowych o mocach przeliczalnych (tj. mniejszych niż pierwsza liczba porządkowa nieprzeliczalna), w którym skoki zapełnione są przedziałami liczb rzeczywistych jest przykładem prostej nieośrodkowej. Są proste o dowolnie dużym *stopniu ośrodkowości.* Prosta rzeczywista jest *jednorodna.* Jeśli zbiór punktów prostej jest mocy większej niż continuum, prosta nie może być jednorodna. Proste jednorodne muszą mieć w każdym punkcie bazę przeliczalną otoczeń. Przegląd wyników na ten temat można znaleźć w książce Maurice'a (1970).

Proste Suslina – na których rodziny przedziałów wzajemnie rozłącznych są co najwyżej przeliczalne, mają w każdym punkcie bazy przeliczalne otoczeń i – mimo że nie ośrodkowe – są mocy większej niż continuum; Kurepa (1950), Papic (1971). Nie ma więc przeszkód dla prostych Suslina, by były jednorodne; patrz Devlin i Johnsbratten (1974). Są wszakże przeszkody w istnieniu samych prostych Suslina. Odnotujmy jednak, że w rozważaniach nad *hipotezą Suslina*, od której rozstrzygnięcia zależy istnienie prostych Suslina, spójność prostej Suslina nie odgrywa roli; patrz M.E. Rudin (1969).

Dodajmy, że są obiekty dalekie od tu rozważanych, nazywane zwyczajowo prostymi, na przykład *prosta Sorgenfreya*, która jest w oczywisty sposób niespójna i której topologia nie może być wyznaczona przez żadne uporządkowania; Emeryk, Frankiewicz i Kulpa (1979), Hart (1981).

Obraz ciągły przestrzeni spójnej jest spójny. Homeomorfizmy zachowują również niespójność. Suma dwu zbiorów spójnych jest spójna, jeśli mają one punkt wspólny. Dla spójności przestrzeni wystarcza, by zawierała podzbiór gęsty spójny, stąd domknięcie zbioru spójnego jest spójne. Produkt przestrzeni spójnych jest spójny, nawet jeśli przestrzeni jest nieskończenie wiele. Stąd, produkty prostych, w szczególności przestrzenie euklidesowe, są spójne. Przekrój rodziny zstępującej zbiorów spójnych nie musi być spójny.

Dowody tych twierdzeń, jak i podstawowych innych twierdzeń przytaczanych dalej, oraz odnośniki do prac oryginalnych, można znaleźć we wspomnianych już książkach Kuratowskiego oraz Hockinga i Younga.

Maksymalne podzbiory spójne nazywane są *składowymi* przestrzeni. Składowe są domknięte i wzajemnie rozłączne. Ze zbiorami domknięto-otwartymi są albo rozłączne, albo w nich zawarte.

Przekrój zbiorów domknięto-otwartych zawierających składową nazywany jest *quasi-składową* przestrzeni. Quasi-składowa nie musi być spójna, a wtedy – i tylko wtedy – może być większa od składowej. Różnica między składowymi i quasi-składowymi nie pojawia się, jeżeli przestrzeń jest zwarta i T_2.

Przestrzeń nazywamy *lokalnie spójną w punkcie* (Hahn 1915, Mazurkiewicz 1916), jeśli każde otoczenie punktu zawiera otoczenie spójne tego punktu. Zbiór znany pod nazwą *sinisoidy zagęszczonej* – opisywanej za pomocą wzoru $\sin \frac{1}{x}$ – nie jest lokalnie spójny w punktach odcinka zagęszczenia. Nietrudno o zbiory – spójne płaskie, nawet kontinua – które nie są lokalnie spójne w żadnym punkcie.

Przestrzeń nazywamy *lokalnie spójną*, jeśli jest lokalnie spójna w każdym punkcie; spójności przestrzeni się nie zakłada, a zatem przestrzenie dyskretne są lokalnie spójne. Prosta rzeczywista – a dotyczy to prostych w ogólności – jest lokalnie spójna. Lokalnie spójnymi są przestrzenie euklidesowe. Produkt nieskończenie wielu przestrzeni lokalnie spójnych nie musi być lokalnie spójny (zbiór Cantora i zbiór liczb niewymiernych są produktami przestrzeni dyskretnych, nie będąc w oczywisty sposób przestrzeniami lokalnie spójnymi), chyba że przestrzenie produktowane są – z wyjątkiem być może skończenie wielu – spójne. W zakresie przestrzeni lokalnie spójnych quasi-składowe są równe składowym. Składowe podzbiorów otwartych są otwarte i to charakteryzuje przestrzenie lokalnie spójne. Przestrzeń metryczna spójna jest ośrodkowa, jeśli jest lokalnie ośrodkowa; Aleksandrow (1924), Sierpiński (1933). Założenie parazwartości wystarczy, co można traktować jako wskazówkę dowodu.

Przestrzenie, których składowe są wszystkie jednopunktowe, nazywane są *dziedzicznie niespójnymi*. Jeśli dotyczy to również quasi-składowych, przestrzeń nazywana jest *całkowicie niespójną*. Zakresy tych przestrzeni się różnią; Sierpiński (1921), a jeszcze inne przykłady można znaleźć w książce Kuratowskiego §41, VII, m.in. przykład, w którym wykorzystuje się własności pochodnej znanej funkcji Pompeiu (1907). Jeszcze silniejszy stopień niespójności – z zakresie przestrzeni T_2 – mają przestrzenie z bazą zbiorów domknięto-otwartych, ze zbiorem Cantora i zbiorem liczb niewymiernych jako nietrywialnymi przykładami. Istnieją przestrzenie – metryczne ośrodkowe – całkowicie niespójne nie mające bazy zbiorów domknięto-otwartych; Erdős (1940); porównaj książkę Engelkinga *Topologia ogólna*, 6.2.19.

Przestrzenie dziedzicznie niespójne nie zawierają – na mocy określenia – podprzestrzeni spójnych wielopunktowych. Istotnie szerszy zakres stanowią przestrzenie *punktokształtne*, nie zawierające na mocy określenia kontinuów wielopunktowych. Istnieją wielopunktowe przestrzenie punktokształtne spójne już wśród podzbiorów płaszczyzny. Przykładem efektywnym jest wykres pochodnej funkcji Pompeiu; Kuratowski §41. I.

Od Bernsteina (1908) pochodzi konstrukcja nieefektywna – za pomocą zasady Zermeli – rozbicia płaszczyzny na dwa zbiory punktokształtne. Innymi nieefektywnymi metodami uzyskali tego rodzaju rozbicie Mazurkiewicz (1913) i Sierpiński (1913). Sierpiński (1920) uzupełnił to stwierdzeniem, że dopełnienie zbioru punktokształtnego do płaszczyzny musi być spójne. Wspomniane wyżej zbiory punktokształtne muszą być więc spójne.

Istnienie przestrzeni spójnych punktokształtnych pokazuje, że spójność nie wyklucza osobliwości – wręcz patologii – jeśli się z zakresem zbiorów wyjdzie poza podzbiory prostej (i innych prostych). Te i inne osobliwości zbiorów spójnych będą nam towarzyszyły w dalszym ciągu tego przeglądu.

Ciągłość funkcji rzeczywistej implikuje spójność jej wykresu. Własność Darboux nie wystarcza, ale wystarcza w zakresie funkcji I-ej klasy Baire'a. Stąd, wykres pochodnej jest zawsze spójny. W szczególności, wykres pochodnej funkcji Pompeiu jest spójny. Pochodna funkcji Pompeiu jest nieciągła na zbiorze gęstym, stąd jej wykres nie zawiera łuków, jest więc punktokształtny (patrz wzmianka wyżej); szczegóły i komentarze *Topologie II* Kuratowskiego, str. 81.

Wykres rozwiązania równania Cauchyego $f(x+y) = f(x) + f(y)$ jest albo spójny, albo całkowicie niespójny i obie możliwości realizują się również w zakresie rozwiązań nieciągłych; F.B. Jones (1942). Wykresy rozwiązań mogą być gęste w płaszczyźnie i spójne. Ta własność może być zdeterminowana przez zachowanie się funkcji już na małym zbiorze; W. Kulpa (1972).

W latach dwudziestych XX wieku istotnym impulsem dla badania zbiorów spójnych była praca Knastera i Kuratowskiego (1921). Jedno z twierdzeń tej pracy głosi, że jeśli, po usunięciu ze zbioru spójnego X zbioru spójnego A, pozostałość $X - A$ rozpada się na dwa zbiory U i V, otwarte w $X - A$, to każdy ze zbiorów $U + A$ i $V + A$ jest spójny. Twierdzenie to pełni ważną rolę w wielu rozumowaniach teorii zbiorów spójnych, dla przykładu w dowodzie twierdzenia Moore'a (1916) o istnieniu punktów nierozspajających w kontinuach (patrz książka Hockinga i Younga, 2–18). Inne twierdzenie z tej pracy głosi, że zbiór spójny, mający więcej niż dwa punkty, zawiera zawsze podzbiór właściwy wielopunktowo spójny. Osobliwością tego twierdzenia jest to, że nie zapewnia ono niczego więcej, niż istnienie podzbiorów spójnych (wielopunktowych) różniących się od całości o skończenie wiele punktów. Światło na tę sytuację rzuciła dopiero praca Erdősa, który dowiódł, sam wynik przypisując A.H. Stone'owi, że zbiór spójny płaski zawiera zawsze podzbiór spójny różniący się od całości o zbiór nieskończony. Jest to – jak się okazało – najlepszy wynik w tym kierunku, bo jak pokazała M.E. Rudin (1958), można zbudować na płaszczyźnie – korzystając z hipotezy continuum – zbiór spójny, którego wszystkie podzbiory spójne właściwe mają dopełnienie przeliczalne.

Trudności związane z istnieniem w zbiorach spójnych małych podzbiorów spójnych wielopunktowych ilustruje, zbudowana w przywołanej na początku poprzedniego akapitu pracy (1921), słynna *miotełka Knastera–Kuratowskiego* – zbiór spójny zbudowany efektywnie na płaszczyźnie jako podzbiór stożka nad zbiorem Cantora – który po usunięciu jednego punktu (nazywanego punktem *eksplodującym*) nie zawiera zbiorów spójnych wielopunktowych, tj. staje się dziedzicznie niespójny. W zbiorze może być co najwyżej jeden punkt eksplodujący; Kline 1922. Później Wilder (1927) zbudował – efektywnie, jako podzbiór stożka nad zbiorem Cantora – zbiór spójny z punktem eksplodującym, po którego usunięciu pozostałość jest całkowicie niespójna (patrz również F.B. Jones (1942), Erdős (1944)). Analogiczna pozostałość w miotełce Knastera–Kuratowskiego nie jest całkowicie niespójna. Daje to jeszcze jeden efektywny przykład rozróżniający całkowitą niespójność od dziedzicznej niespójności. R. Duda (1961) pokazał, że nie każdy zbiór typu Knastera–Kuratowskiego daje się przerzedzić tak, by dostać zbiór typu Wildera.

Jeśli nie wymagać efektywności, zbiory spójne z punktem eksplodującym typu Knastera–Kuratowskiego i typu Wildera można budować znaną wcześniej metodą Bernsteina, wykorzystując własność stożka nad zbiorem Cantora, którą mają zbiory płaskie o dostatecznie bogatej budowie, a która zapewnia, że zbiory domknięte rozspajające – jeśli nie przechodzą przez punkty lokalnie rozspajające (w tym przypadku przez wierzchołek), muszą zawierać zbiory doskonałe. Jest to własność, którą ma płaszczyzna, i która umożliwia konstrukcje jej podzbiorów spójnych punktokształtnych; Sierpiński (1920).

Z metod nieefektywnych korzystał Swingle (1931) rozwijając swoją teorię zbiorów *szeroko spójnych*, tj. zbiorów spójnych, które nie zawierają innych podzbiorów spójnych właściwych niż gęste. Swingle konstruował je na płaszczyźnie jako podzbiory kontinuów nierozkładalnych typu Knastera. Zbiory szeroko spójne stanowią jeszcze jeden rodzaj zbiorów, które nie zawierają podzbiorów spójnych w określony sposób istotnie mniejszych.

Jedną z własności zbiorów spójnych z punktem eksplodującym jest zauważona przez Knastera i Kuratowskiego (1921) ich *dwuspójność*, wykluczająca możliwość rozbicia zbioru na dwa zbiory spójne wielopunktowe, a wynikająca stąd, że zbiory spójne wielopunktowe muszą zawierać punkt eksplodujący. Zbiory dwuspójne nie zawierają zbiorów spójnych wielopunktowych rozłącznych. E.W. Miller (1937) zbudował, za pomocą hipotezy continuum, zbiór dwuspójny bez punktu eksplodującego, sytuując go na płaszczyźnie w postaci podzbioru pewnego kontinuum nierozkładalnego typu Knastera.

Zbiory szeroko spójne nie muszą być dwuspójne. Można je budować metodą Bernsteina tak, by zawierały dwa zbiory spójne wielopunktowe rozłączne. Zbiory szeroko spójne nie mogą mieć – co nietrudno zauważyć – punktu eksplodującego. M.E. Rudin (1995) zbudowała – modyfikując postępowanie Millera, korzystając z hipotezy continuum – zbiór dwuspójny bez punktu eksplodującego, który nie jest szeroko spójny. W ten sposób zakresy zbiorów szeroko spójnych i zbiorów dwuspójnych bez punktu eksplodującego wymijają się. Zbiór spójny M.E. Rudin (1958), którego podzbiory spójne mają dopełnienia przeliczalne, jest (oczywiście) szeroko spójny i dwuspójny. Obie te własności ma osobliwy zbiór spójny zbudowany przez Cooka (1963). Zbiór dwuspójny Millera (1937) jest – co zapewnia konstrukcja – szeroko spójny.

Przegląd wyników na temat zbiorów dwuspójnych i szeroko spójnych zawiera artykuł A. Lelka (1962). Przytoczone jest tam – jako dotąd nierozstrzygnięte – pytanie Erdősa (1944) o zbiór szeroko spójny, w którym w dopełnieniach podzbiorów spójnych (nie ma tam podzbiorów o wnętrzach niepustych) nie było podzbiorów rzadkich, tj. takich, których domknięcia mają wnętrza niepuste.

Swingle (1932) wykazał, że przestrzeń euklidesowa n-wymiarowa, $n > 1$, daje się rozbić, dla każdego naturalnego r większego niż n, na r podzbiorów dwuspójnych, i że nie ma tego rodzaju rozbić na mniejszą liczbę zbiorów. Płaszczyzny nie można więc rozbić na dwa zbiory dwuspójne, ale można na trzy lub więcej. Erdős (1944) zbudował rozbicie płaszczyzny na continuum zbiorów dwuspójnych. Zbiory dwuspójne z tych rozbić mają punkty eksplodujące.

Sierpiński (1918) zbudował zbiór spójny płaski będący sumą przeliczalnej liczby podzbiorów domkniętych rozłącznych, dowodząc wcześniej (w tej samej pracy), że tego rodzaju rozbicia dla kontinuów metrycznych są niemożliwe (nie ma trudności z przeniesieniem tego twierdzenia na kontinua T_2). Omówienie wyników na temat zbiorów *sigma-spójnych* – jak nazywane są zbiory spójne nie mające rozbić na przeliczalnie wiele podzbiorów domkniętych – zawiera wspomniany artykuł Lelka (1962).

Przestrzeń metryczna spójna – jeśli jest wielopunktowa – ma moc niemniejszą niż continuum, co pozostaje prawdą dla przestrzeni całkowicie regularnych.

Wielopunktowe przestrzenie spójne regularne nie mogą być przeliczalne; Urysohn (1924). Wśród tych przestrzeni są takie, na których każda funkcja ciągła jest stała; Hewitt (1946), Novak (1948), Mysior (1981); przegląd wyników na ten temat jest w książce Engelkinga, 2.7.17.

Istnieją wszakże przestrzenie T_2 przeliczalne spójne; Urysohn (1925). Wśród późniejszych przykładów najbardziej znany jest przykład Binga (1951), a najbardziej spektakularnym przykład Golomba (1961); patrz także M. Brown (1953). Przestrzeń Golomba jest zbiorem liczb naturalnych z bazą zbiorów otwartych w postaci ciągów arytmetycznych $a + bn$, gdzie a i b są względnie pierwsze. Zbiór liczb pierwszych okazuje się – na mocy słynnego twierdzenia Dirichleta – podzbiorem gęstym. Celem innych przykładów było uzyskanie dodatkowych własności, na przykład lokalnej spójności i silniejszych niż T_2 warunków oddzielania; F.B. Jones i A.H. Stone (1971). Istnieją przestrzenie spójne przeliczalne T_2 z punktem eksplodującym; P. Roy (1966). Przegląd wyników zawiera cytowana wyżej praca Jonesa i Stone'a. Istnieją zbiory przeliczalne szeroko spójne i zbiory przeliczalne dwuspójne bez punktu eksplodującego, które nie są szeroko spójne; W.Tzannes (1996, 1999).

Jeśli zwiększyć topologię, spójność może się nie zachować. Bywa jednak tak, że spójność się zachowuje. Jeśli topologię prostej zwiększyć dołączając do niej zbiory mierzalne, to otrzymana topologia, nazywana *topologią gęstościową*, okazuje się spójna. Dodanie jednego zbioru gęstego nie ma wpływu na spójność, a stosując do opisanej sytuacji lemat Kuratowskiego–Zorna, dostaje się topologie spójne, nazywane *submaksymalnymi*, dla których wszystkie zbiory gęste są otwarte. Topologie metryczne – jeśli nie są dyskretne – nie mogą mieć tej własności, bo można w nie zawsze wbudować (na ogół nieefektywnie) dwa zbiory gęste rozłączne. Przez topologię *maksymalnie spójną* rozumie się topologię spójną, której nie można zwiększyć bez utraty spójności. Topologie submaksymalne nie muszą być maksymalnie spójne. Nie każdą topologię można zwiększyć do maksymalnie spójnej. Ale, nieoczekiwanie, można zwiększyć do maksymalnie spójnej topologię prostej; P. Simon (1978), J.A. Guthrie, H.E. Stone i M. Wage (1978). Autor artykułu nie wie, czy można to zrobić z topologią gęstościową. Zbiory spójne z punktem eksplodującym są maksymalnie spójne. Zatem, istnieją topologie maksymalnie spójne na zbiorach przeliczalnych. Zbiory szeroko spójne nie są maksymalnie spójne. Odsyłacze do prac oryginalnych i komentarze można znaleźć w cytowanych wyżej dwu pracach. Topologie maksymalnie spójne stanowią interesujący problem, chociaż o innym już charakterze, w zakresie topologii T_0 na zbiorach skończonych; J.P. Thomas (1968).

Prosta rzeczywista może być traktowana jako *uspójnienie* swoich podzbiorów gęstych. Jednakże, jak pokazali Emeryk i Kulpa (1977), prosta Sorgenfreya nie ma uspójnienia w postaci przestrzeni regularnej, chociaż ma uspójnienie klasy T_2. W.S. Watson i R.G. Wilson (1993) pokazali, że przestrzenie T_2 nigdzie niezwarte mają zawsze uspójnienie klasy T_2. Porównaj V. Tzannes (1994) wraz z recenzją MR 95k:54038.

Przestrzeń jest nazywana *ekstremalnie niespójną*, jeśli domknięcia jej podzbiorów otwartych są otwarte. Przestrzeń ekstremalnie niespójna klasy T_2 ma zawsze bazę zbiorów domknięto-otwartych. Ekstremalna niespójność stanowi więc wyższy stopień niespójności od dotąd rozważanych. Jednakże, przestrzenie metryczne nie mogą być ekstremalnie niespójne, chyba że są dyskretne. Kompaktyfikacja Cecha–Stone'a zbioru liczb naturalnych z topologią dyskretną jest przestrzenią ekstremalnie niespójną, ale nie jej obrzeże.

W zakresie przestrzeni zwartych T_2 znikają omówione tu osobliwości spójności. Nie pojawiają się więc przestrzenie szeroko spójne i dwuspójne, a więc przestrzenie z punktem eksplodującym. Jest tak dzięki lematowi Janiszewskiego (1912) *o dochodzeniu do brzegu*, według którego składowe zbiorów otwartych kontinuów klasy T_2 mają punkty skupienia na brzegach tych zbiorów. Dzięki temu w kontinuach T_2 istnieją dowolnie małe zbiory spójne wielopunktowe.

Na tym szczeblu otwiera się nowy rozdział topologii zbiorów spójnych, mianowicie *teoria kontinuów* T_2 z wyodrębnioną w niej klasyczną już teorią *kontinuów metrycznych.*

Bibliografia

Monografie

F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914

R. Engelking, *Topologia ogólna I - II*, Warszawa 1989

J.G. Hocking, G.S. Young, *Topology*, London 1961

K. Kuratowski, *Topologie I - II*, Warszawa–Wrocław 1948-50

Spójność – ogólnie

R.L. Wilder, *Evolution of topological concept of "connected"*, Amer. Math. Monthly 85(1978), 720-726

W. Wilkosz, *Les proprietes topologiques du plan Euclidien*, Memorial des Sciences Mathematiques, Paris 1931

Zbiory spójne uporządkowane

M.E. Rudin, *Souslin Conjecture*, Amer. Math. Monthly 76(1969), 1113-1119

M.A. Maurice, *Compact ordered spaces*, Math. Centre Tracts 49, Amsterdam 1973

G. Kurepa, *La condition de Souslin et une propriete caracteristique des nombres reels*, C. R. Acad. Sci. Paris 231(1950), 1113-1114

P. Papic, *Sur le continu de Souslin*, Glasnik Mat. 6(1971), 351-355

A. Emeryk, R. Frankiewicz, W. Kulpa, *Orderability of GO-spaces*, Topological Structures II, Math. Centre Tracts 115(1979), 73-78

K.P. Hart, *On the weight and pseudo-weight of linearly oredered topological spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 82(1981), 501-502

Własności lokalne

P. Alexandroff, *Über die Metrisation in Kleinen kompakten topologischen Raume*, Math. Ann. 92(1924), 294-301

W. Sierpiński, *Sur les espaces localement separables*, Fund. Math. 21(1933), 107-113

Zbiory spójne punktokształtne

F. Bernstein, *Zur Theorie der trigonometrische Reihe*, Leipziger Berichte 60(1908), 325-338

S. Mazurkiewicz, *Contribution a la theorie des ensambles*, Bull. Intern. de l'Acad. des Sciences de Cracovie 1913, 46-55

D. Pompeiu, Math. Ann. 63(1907), 326

W. Sierpiński, *Sur la decomposition du plan en deux ensembles ponctiformes*, Bull. Intern. de l'Acad. des Sciences de Cracovie 1913, 76-82

W. Sierpiński, *Sur un ensemble ponctiforme connexe*, Fund. Math. 1(1920), 7-10

W. Sierpiński, *Sur les ensembles connexes et non connexes*, Fund. Math. 2(1921), 81-95

Spójność wykresu funkcji

K. Kuratowski, *Topologie II*, Warszawa–Wrocław 1950

F.B. Jones, *Connected and disconnected plane sets and the functional equation* $f(x+y) = f(x) + f(y)$, *Measure and other properties of Hamel basis*, Bull. Amer. Math. Soc. 48(1942), 115-120, 472-481

W. Kulpa, *On existence of maps having graphs connected and dense*, Fund. Math. 76(1972), 207-211

Zbiory dwuspójne

B. Knaster, K. Kuratowski, *Sur les ensembles connexes*, Fund. Math. 2(1921), 206-255

P. Erdős, *Some remarks on connected sets* Bull. Amer. Math. Soc. 50(1944), 442-446

M. Rudin, *A connected subset of the plane*, Fund. Math. 46(1958), 15-24

J.R. Kline, *A theorem concerning connected point sets*, Fund. Math. 3(1922), 238-239

R.L. Wilder, *A point set which has no true quasi-components and which becomes connected upon the addition of a single point*, Bull. Amer. Math. Soc. 33(1927), 423-427

R. Duda, *Two results concerning biconnected sets with dispersion points*, General Topology and its Relations to modern Analysis and Algebra, Proc. of the Symp., Prague 1961, 146-147

W. Miller, *Concerning biconnected sets*, Fund. Math. 29(1937), 123-133

P.M. Swingle, *Two types of connected sets*, Bull. Amer. Math. Soc. 37(1931), 254-258

P.M. Swingle, *Biconnected and related sets*, Amer. Journ. Math. 54(1932), 525-535

H. Cook, *Concerning connected and dense subsets of indecomposable continua*, Fund. Math. 53(1963), 21-23

A. Lelek, *Osobliwe zbiory spójne*, Wiadomości Matematyczne 5(1962), 67-80

W. Sierpiński, *Un theoreme sur les continus*, Tohoku Math. J. 13(1918), 300-303

Moc zbiorów spójnych. Przestrzenie spójne przeliczalne

P. Urysohn, *Über die Machtigkeit der zusamenhangenden Mengen*, Math. Ann. 94(1925), 262-295

R.H. Bing, *A countable connected Hausdorff space*, Proc. Amer. Math. Soc. 4(1953), 474

S. Golomb, *Arithmetica Topologica*, General Topology and its Relations to modern Analysis and Algebra, Proc. of the Symp., Prague 1961, 179-186

R. Roy, *A countable connected Urysohn space with a dispersion point*, Duke Math. J. 33(1966), 331-333

F.B. Jones, A.H. Stone, *Countable locally connected Urysohn space*, Coll. Math. 22(1971), 239-244

V. Tzannes, *A countable widely connected Hausdorff space*, Topology Appl. 69(1996), 63-70

V. Tzannes, *Two countable, biconnected, not widely connected Hausdorff space*, Int. J. Math. Sci. 22(1999), 251-258

Topologie spójne maksymalne

P. Simon, *An example of a maximal connected space*, Fund. Math. 100(1978), 157-163

J.A. Guthrie, H.E. Stone, M. Wage, *Maximal connected extensions of reals*, Proc. Amer. Math. Soc. 69(1978), 159-165

J.P. Thomas, *Maximal connected topologies*, J. Australian Math. Soc. 8(1968), 700-705

Uspójnienia

A. Emeryk, W. Kulpa, *The Sorgenfrey line has no connected compactification*, Comm. Math. Univ. Carolinae 18(1977), 483-487

W.S. Watson, R.G. Wilson, *Embedding in connexe spaces*, Houston J. Math. 19(1993), 469-481

V. Tzannes, *Every countable regular space without isolated points is connectifiable*, Can. Math. Bull. 37(1994), 556-559

Kontinua

Z. Janiszewski, Bull. Acad. Sc, Cracovie 1912, 907 – cytowane za *Topologie II* Kuratowskiego, str. 112