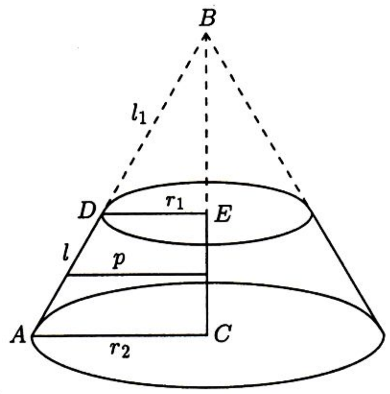
# Zadanie Archimedesa

*Jarosław GÓRNICKI, Rzeszów*

W Mezopotamii (XX w. p.n.e.), w Egipcie (XVI w. p.n.e.), w Chinach (XII w. p.n.e.) wiedziano jak obliczać przybliżoną wartość pola oraz obwodu koła. Obliczano również pola powierzchni i objętości brył: prostopadłościanu, piramidy (ostrosłupa), graniastosłupa, walca. Problemem było wyznaczenie pola powierzchni oraz objętości stożka i kuli. Dopiero Eudoksos z Knidos (406(?)–355(?) p.n.e.) za pomocą swojej metody wyczerpywania wykazał, że *objętość stożka stanowi trzecią część objętości opisanego na nim walca* (Demokryt z Abdery (460(?)–380(?) p.n.e.) też tak twierdził, ale nie podawał uzasadnienia). Rezultat ten zawarł Euklides w *Elementach* (Księga XII, Twierdzenie 10). W tym czasie – korzystając z możliwości przybliżania stożka ostrosłupami – wykazano, że pole powierzchni bocznej stożka wynosi $\pi r l$, gdzie $l$ jest długością jego tworzącej. Wiedziano również, że w przypadku stożka ściętego, którego podstawami są koła o promieniach $r_1$ i $r_2$, pole jego powierzchni bocznej wyrażają wzory $\pi l(r_1 + r_2) = 2\pi l p$, gdzie $p = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$. Pozostało obliczenie powierzchni i objętości kuli. Zagadnienie to rozwiązał Archimedes (287(?)–212 p.n.e.). Ten najsłynniejszy matematyk i wynalazca starożytnej Grecji większość życia spędził w Syrakuzach (w młodości studiował w Aleksandrii, ówczesnym naukowym centrum). Swoje rezultaty ogłaszał w formie korespondencji, np. z Erastotenesem z Cyreny. Sławę przyniosły mu praktyczne rozwiązania, m.in. wynalezienie wielokrążka, śruby do transportu wody, odkrycie zasady dźwigni (wielkości są w równowadze, jeśli ich odległości od punktu podparcia są odwrotnie proporcjonalne do ich ciężarów), fizycznego prawa wyporu (każde ciało zanurzone w cieczy jest z niej wypierane z siłą równą ciężarowi cieczy wypartej przez to ciało), oraz znakomite osiągnięcia matematyczne (8 z 10 zachowanych jego traktatów poświęconych jest „czystej" matematyce). Poznając prace matematyczne Archimedesa – sformułowania tez, dowodów, precyzję myśli – przekonujemy się o jego wielkiej oryginalności i nowatorstwie. Wykorzystując metodę Eudoksosa wyznaczał pola figur i objętości brył (powtórnie znaczenie metody wyczerpywania ujawnia się dopiero w XVII wieku wraz z rozwojem rachunku całkowego). Jednak najbardziej znane są jego wyniki dotyczące koła i kuli. W krótkiej pracy *O wymierzaniu koła* (zawierającej 3 twierdzenia) Archimedes wykazuje w Twierdzeniu 3, że liczba $\pi$, wyrażająca stosunek obwodu koła do jego średnicy, spełnia nierówność



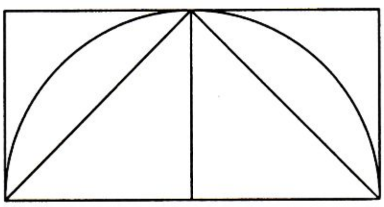

Ponieważ $\triangle ABC \approx \triangle DBE$, więc $\frac{l_1}{r_1} = \frac{l_1 + l}{r_2} \Rightarrow l_1 \cdot r_2 = (l_1 + l) \cdot r_1$. Zatem pole powierzchni bocznej stożka wynosi $\pi r_2(l_1 + l) - \pi r_1 l_1 =$ $= \pi r_2 l_1 + \pi r_2 l - \pi r_1 l_1 = \pi l(r_1 + r_2) = 2\pi l p$.

$$(3{,}1408 \approx) \quad 3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7} \quad (\approx 3{,}1428).$$

Traktat Archimedesa *O kuli i walcu* składa się z dwóch ksiąg: pierwsza zawiera 5 postulatów i 50 twierdzeń, druga 10 twierdzeń. W pierwszej księdze znajdują się wyniki, z których Archimedes był najbardziej dumny. Wykazał tam między innymi:

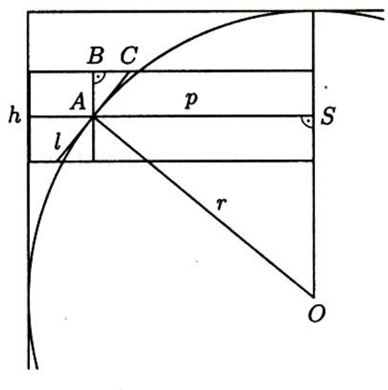
**Twierdzenie 35.** *Pole powierzchni kuli jest czterech razy większe od pola jej największego koła* ($P_K = 4\pi r^2$).

**Twierdzenie 37.** *Objętości stożka wpisanego w półkulę, która z kolei jest wpisana w walec* (rys. 1) *pozostają do siebie w stosunku* 1 : 2 : 3 *(skąd wynika, że* $V_K = \frac{4}{3}\pi r^3$*).*



Rys.1

Uzasadnienia tych rezultatów zaproponowane przez Archimedesa jest nie tylko bardzo pomysłowe ale i nadzwyczaj sugestywne. Aby obliczyć powierzchnię kuli o promieniu $r$, Archimedes opisuje na niej walec. Następnie walec i zawartą w nim kulę przecina dwiema płaszczyznami równoległymi do jego podstaw odległymi od siebie o $h$. W tak otrzymanym „plastrze" umieszcza stożek ścięty styczny do kuli w połowie odległości między równoległymi płaszczyznami (rys. 2). Wówczas w rozpatrywanym plastrze o wysokości $h$ pole powierzchni bocznej walca jest równe polu powierzchni bocznej stożka ściętego.




Rys.2

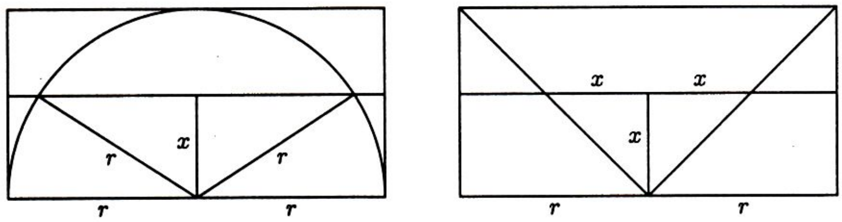
Rzeczywiście, przy oznaczeniach takich jak na rysunku 2, z podobieństwa trójkątów $\triangle OAS \approx \triangle CAB$ (są to trójkąty prostokątne i $\angle OAS = \angle CAB$)

wynika, że

$$\frac{|OA|}{|AS|} = \frac{|CA|}{|AB|} \Leftrightarrow |OA| \cdot |AB| = |AS| \cdot |CA| \Leftrightarrow r \cdot \frac{1}{2}h = p \cdot \frac{1}{2}l,$$

co gwarantuje równość: $2\pi rh = 2\pi lp$. Następnie Archimedes zauważa, że dzieląc walec (z wpisana kulą) płaszczyznami równoległymi do podstaw o coraz mniejszych odległościach uzyskuje sytuację, w której opisane w wyżej podany sposób stożki ścięte coraz dokładniej przybliżają sferę. Ponieważ niezależnie od podziału, powierzchnia boczna wszystkich tych stożków jest zawsze równa powierzchni bocznej opisanego walca $2\pi r \cdot 2r$ $(= 4\pi r^2)$, więc taka musi być też powierzchnia kuli.

Z przedstawionego rozumowania wynika również, że pole powierzchni odcinka sferycznego (czaszy kulistej) o wysokości $h$ jest równe $2\pi rh$. W równie pomysłowy sposób Archimedes oblicza objętość kuli. Opisuje on na półkuli walec, a obok w identycznym walcu wycina wpisany w walec stożek (rys. 3). Następnie przecina obie bryły płaszczyzną odległą od podstawy o $x$.




Rys. 3

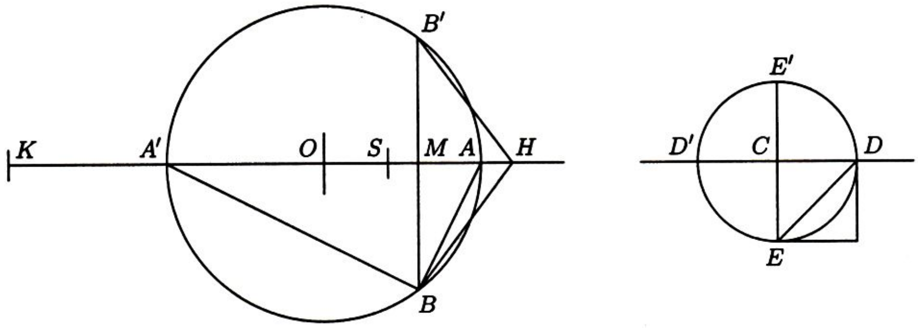
Wówczas, jak pokazują łatwe rachunki, powierzchnia przekroju półkuli jest równa powierzchni pierścienia otrzymanego z walca, w którym wycięto wpisany stożek. Ponieważ na każdym poziomie przekroje tych brył mają równe polach, więc stąd Archimedes wyprowadza wniosek, że objętości tych brył są równe. Oznacza to, że objętość kuli o promieniu $r$ wynosi $V_K = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Metoda ta (w której korzystamy jedynie ze wzorów na objętość walca i stożka) pozwala również w łatwy sposób stwierdzić, że objętość odcinka kuli o wysokości $h$, wynosi: $\pi rh^2 - \frac{1}{3}\pi h^3$.

Dysponując tymi informacjami Archimedes w drugiej księdze traktatu *O walcu i kuli* rozwiązuje następujący problem:

**Zadanie Archimedesa.** *Ze wszystkich odcinków sferycznych o danej powierzchni wyznaczyć ten, który ma największą objętość.*

*Rozwiązanie Archimedesa.*




Rys. 4

Jest ono geometryczne i zgodnie ze stosowaną wówczas metodą polega na wykazaniu, że wśród odcinków kulistych o danym polu powierzchni (części sferycznej) największą objętość ma półkula.

Niech $ABB'$ będzie danym odcinkiem kulistym o promieniu $r$ i wysokości $h$ (różnym od półkuli) i $EDE'$ półkulą mającą taką samą powierzchnię i promień $R$ $(\neq r)$ – rysunek 4. Na prostej przechodzącej przez punkty $A$ i $A'$

zaznaczamy punkt $K$, taki że $|KA'| = |A'O|$ oraz odcinek $MH$ o takiej długości, że objętość stożka $HBMB'$ jest równa objętości odcinka kulistego $ABB'$, czyli

$$\frac{\pi}{3}|HM| \cdot |MB|^2 = \frac{\pi}{3}|KM| \cdot |AM|^2 \quad \left(= \frac{\pi}{3}(3r-h)h^2\right),$$

(1) $$|HM| \cdot |MB|^2 = |KM| \cdot |AM|^2.$$

Z proporcji $\frac{|AB|}{|AA'|} = \frac{|AM|}{|AB|}$ (patrz $\triangle ABA'$), mamy równość

(2) $$|AB|^2 = |AA'| \cdot |AM|.$$

Na odcinku $AA'$ odkładamy teraz punkt $S$, taki że $|AS| = |CD|$ $(= R)$. Wówczas z (2) oraz z równości powierzchni odcinka kulistego $ABB'$ i powierzchni półkuli $DEE'$, otrzymujemy

$$(2\pi rh =) \quad \pi|AA'| \cdot |AM| = \pi|AB|^2 = \pi|ED|^2 \quad (= 2\pi R^2),$$

skąd

(3) $$|AB| = |ED|$$

oraz

(4) $$|AS|^2 = |A'K| \cdot |AM| \quad (\Leftrightarrow R^2 = rh).$$

Zauważmy teraz, że

(5) $$|A'S| \cdot |AS| > |A'M| \cdot |AM|,$$

gdyż z dwóch prostokątów o tym samym obwodzie większe pole ma ten, którego krótszy bok jest dłuższy. Nierówność ta w połączeniu z warunkiem (4) daje

$$|A'A| \cdot |AS| > |KM| \cdot |AM|.$$

$$(2|A'K| - |AS|) \cdot |AS| > (2|A'K| - |AM|) \cdot |AM|,$$
$$2|A'K| \cdot |AS| - |A'K| \cdot |AM| > 2|A'K| \cdot |AM| - |AM|^2,$$
$$2|A'K| \cdot |AS| > (3|A'K| - |AM|) \cdot |AM|,$$
$$|A'A| \cdot |AS| > |KM| \cdot |AM|.$$

Stąd

$$|AS| \cdot |A'A| \cdot |AM| > |KM| \cdot |AM|^2.$$

Korzystając z (2), (3), (4), otrzymujemy

$$|CD| \cdot |ED|^2 = |AS| \cdot |AB|^2 > |KM| \cdot |AM|^2 = |HM| \cdot |MB|^2|,$$

co kończy dowód, bo oznacza, że

$$\frac{\pi}{3}|CD| \cdot |ED|^2 > \frac{\pi}{3}|HM| \cdot |MB|^2.$$

*Rozwiązanie analityczne.* Dla sfery o promieniu $r$ objętość odcinka kulistego o wysokości $h$ $(0 \le h \le 2r)$ wynosi: $\pi r h^2 - \frac{1}{3}\pi h^3$, a jego powierzchnia: $2\pi rh$. Przyjmując, że $2\pi rh = A$, otrzymujemy $r = \frac{A}{2\pi h}$. Oznacza to, że objętość odcinka kulistego o ustalonej powierzchni $A$, w zależności od jego wysokości h możemy wyrazić za pomocą funkcji

$$V(h) = \frac{Ah}{2} - \frac{\pi h^3}{3},$$

gdzie warunek $0 \le h \le 2r = \frac{A}{\pi h}$ oznacza, że $0 \le h \le \sqrt{\frac{A}{\pi}}$. Naszym celem jest teraz znalezienie największej wartości tak określonej funkcji. Ponieważ w przedziale $\left(0, \sqrt{\frac{A}{\pi}}\right)$, mamy $V'(h) = \frac{A}{2} - \pi h^2 = 0$ wtedy, gdy $h = \sqrt{\frac{A}{2\pi}}$, więc punktami krytycznymi są: $0$, $\sqrt{\frac{A}{2\pi}}$, $\sqrt{\frac{A}{\pi}}$. Obliczając $V(0) = 0$, $V\left(\sqrt{\frac{A}{2\pi}}\right) = \frac{\sqrt{2}\cdot A^{3/2}}{6\sqrt{\pi}}$, $V\left(\sqrt{\frac{A}{\pi}}\right) = \frac{A^{3/2}}{6\sqrt{\pi}}$ stwierdzamy, że funkcja $V(\cdot)$ przyjmuje największą wartość dla $h = \sqrt{\frac{A}{2\pi}}$. Warunek $h = \sqrt{\frac{A}{2\pi}}$ (po uwzględnieniu, że $h > 0$ i $2\pi rh = A$) oznacza, że $h = r$. Zatem, ze wszystkich odcinków kulistych o ustalonej powierzchni największą objętość ma półkula.

Patrząc na te wyniki (a to tylko niektóre z jego osiągnięć) śmiało możemy powiedzieć: „Archimedes to był gość!”.