Ciągi Pisota czyli jak ZOBACZYĆ rekurencję liniową

Jarosław WRÓBLEWSKI, Wrocław

Ciągiem Pisota nazywamy ciąg liczb całkowitych dodatnich, w którym pierwsze dwa wyrazy są dowolne, a każdy kolejny wybrany jest tak, aby wraz z dwoma poprzednimi z najlepszym przybliżeniem tworzył ciąg geometryczny. Dokładniej, dla danych a_1 i a_2 ciąg Pisota (oznaczany $E(a_1, a_2)$) zdefiniowany jest wzorem rekurencyjnym

$$a_{n+2} = \left[\frac{a_{n+1}^2}{a_n} + \frac{1}{2} \right] .$$

Okazuje się, że ciągi Pisota "lubią" spełniać rekurencje liniowe, np. najprostszy nietrywialny ciąg Pisota $E(2,3)$ jest ciągiem Fibonacciego z rekurencją $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

Dowolny ciąg Pisota z $a_1 \leqslant 3$ spełnia rekurencję liniową stopnia co najwyżej trzeciego. Np. ciąg $E(3,7)$ spełnia rekurencję

$$a_{n+3} = 3a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n .$$

Z kolei o ciągu $E(4,13)$ udowodniono, że nie spełnia żadnej rekurencji liniowej. Jednakże dla $n = 1, 2, \ldots, 18$ zachodzi wzór

$$a_{n+6} = 3a_{n+5} + a_{n+4} - a_{n+3} + a_{n+2} - a_{n+1} + a_n ,$$

tzn. ciąg $E(4,13)$ spełnia rekurencję liniową szóstego stopnia do wyrazu a_{24} włącznie.

Wiele ciągów Pisota ma takąż właśnie kapryśną naturę: spełniają rekurencję liniową, ale do czasu. Moim ulubionym przykładem jest ciąg $E(10,219)$, który spełnia rekurencję stopnia 4, a mianowicie

$$a_{n+4} = 22a_{n+3} - 3a_{n+2} + 18a_{n+1} - 11a_n ,$$

jednak tylko dla $n + 4 \leqslant 1402$. Wyrazu a_{1403} już się powyższym wzorem otrzymać nie da.

Dlaczego ciągi Pisota lubią spełniać rekurencje liniowe, jak też i uwielbiają się z nimi rozstawać po wspólnym przejściu wielu wyrazów? Pytanie to należy odwrócić. Dlaczego ciągi liniowo rekurencyjne bywają ciągami Pisota, czasami na zawsze, a czasami tylko na kilkaset wyrazów?

Co sprawia, że dany ciąg (a_n) jest ciągiem Pisota? Otóż musi on spełniać warunek

$$-\frac{1}{2} \leqslant \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}} - a_n < \frac{1}{2} \qquad \text{dla } n \geqslant 3 .$$

Przyjrzyjmy się więc liczbom

$$r_n = \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}} - a_n ,$$

które dalej będziemy nazywać zaokrągleniami.

Jeśli ciąg (a_n) spełnia rekurencję liniową stopnia k, powiedzmy

$$a_{n+k} = A_{k-1}a_{n+k-1} + \ldots + A_1 a_{n+1} + A_0 a_n ,$$

to możemy związać z nim wielomian charakterystyczny

$$x^k - A_{k-1}x^{k-1} - \ldots - A_1 x - A_0 .$$

W typowej sytuacji pierwiastki zespolone $x_1, x_2, \ldots, x_k$ tego wielomianu są różne i wówczas ciąg (a_n) jest postaci

$$a_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n + \ldots + c_k x_k^n ,$$

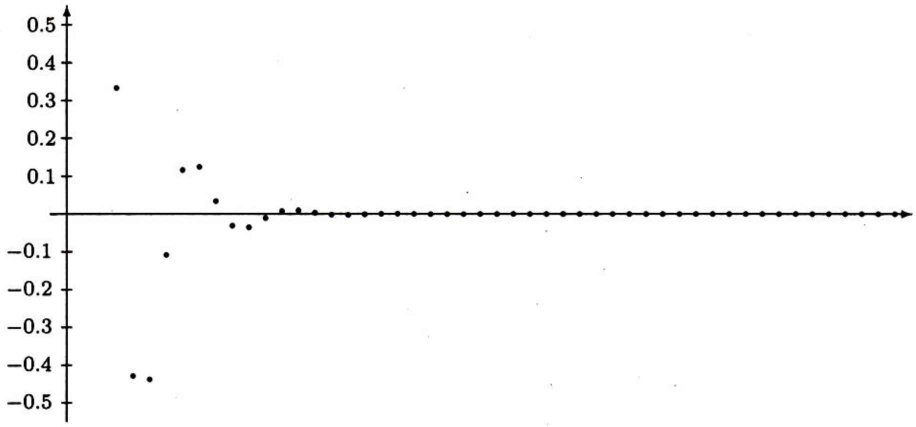
gdzie $c_1, c_2, \ldots, c_k$ są liczbami zespolonymi.

Przypuśćmy, że pierwiastki wielomianu charakterystycznego uporządkowane są nierosnąco według wartości bezwzględnej, tzn.

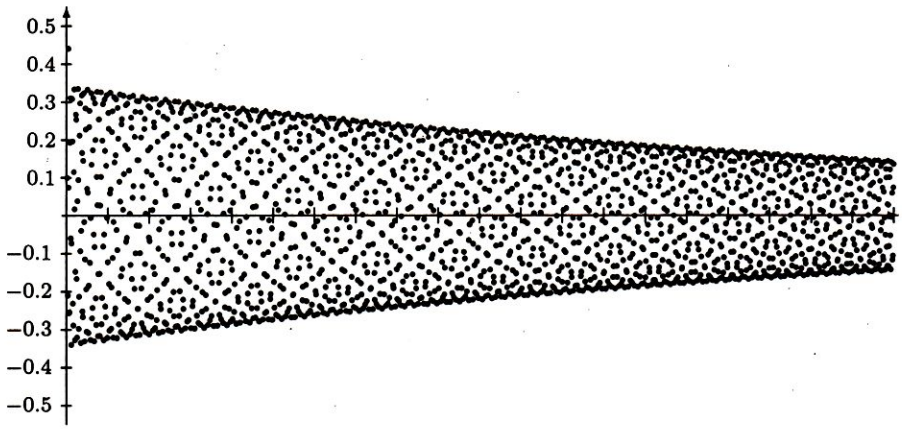
$$|x_1| \geqslant |x_2| \geqslant \ldots \geqslant |x_k| .$$

W typowej interesującej nas sytuacji, kiedy ciąg liniowo rekurencyjny jest (trwale lub chwilowo) ciągiem Pisota, tzn. kiedy zachowuje się prawie jak ciąg geometryczny, największy pierwiastek x_1 jest dodatni, istotnie większy od pozostałych pierwiastków i od 1. Natomiast dla dużych n mamy

$r_n \approx d_2 x_2^n + d_3 x_3^n + \ldots + d_k x_k^n$, czyli zachowanie ciągu zaokrągleń (r_n) zależy od drugiego co do wielkości pierwiastka wielomianu charakterystycznego (liczby $d_2, d_3, \ldots, d_k$ są tu pewnymi liczbami zespolonymi). Jeśli $|x_2| < 1$, to (zaniedbując wpływ pozostałych, mniejszych pierwiastków) należy oczekiwać, że wraz ze wzrostem n liczba r_n będzie coraz bardziej zbliżać się do zera, więc skoro nierówność $-\frac{1}{2} \leqslant r_n < \frac{1}{2}$ była spełniona przez czas jakiś, to czym dalej, tym łatwiej będzie ona spełniona.

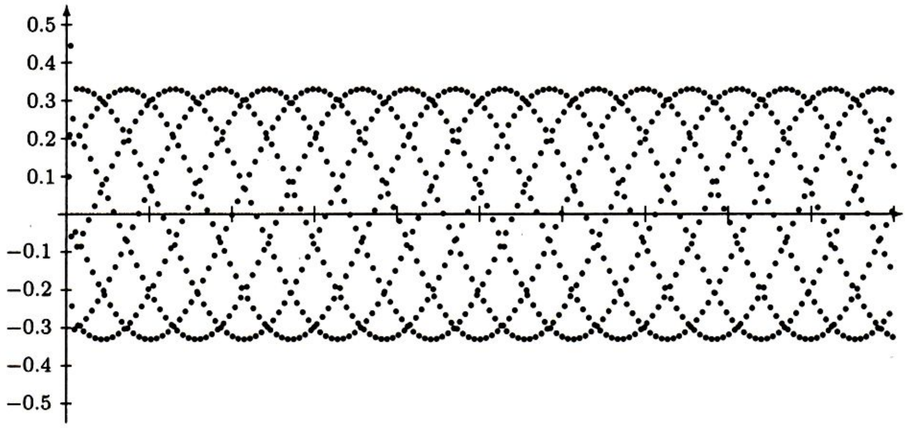


Ciąg $E(3,7)$ spełnia rekurencję trzeciego stopnia, przy czym pierwiastki x_2 i x_3 są małe. Wykres pokazuje to wyraźnie, chociaż zbyt ciekawy nie jest - r_n dąży szybko do zera.



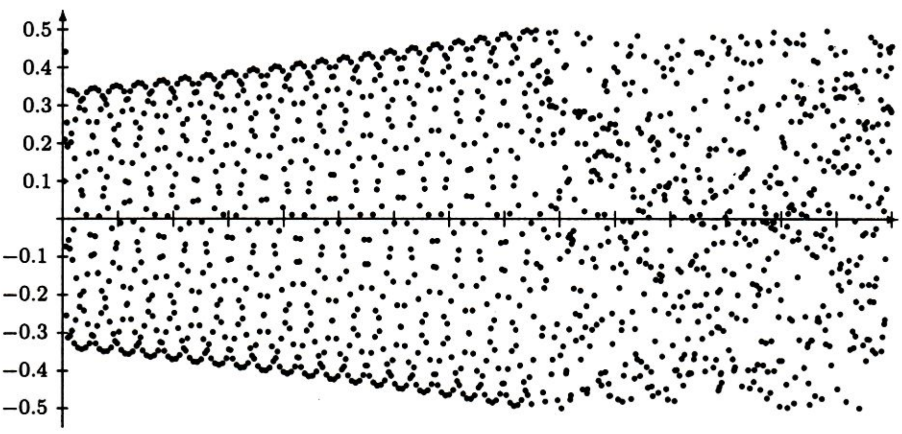
Ciąg $E(10,181)$ spełnia rekurencję liniową czwartego stopnia. Pierwiastki x_2 i x_3 są zespolone sprzężone o module ≈ 0.99956939.

Jeśli $|x_2| = 1$, to wraz ze wzrostem n liczba r_n nie ma tendencji do oddalania się ani zbliżania do zera, jeśli więc przez długi czas mieściła się ona w przedziale $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, to jest świetna szansa, że nigdy z niego nie wyjdzie.



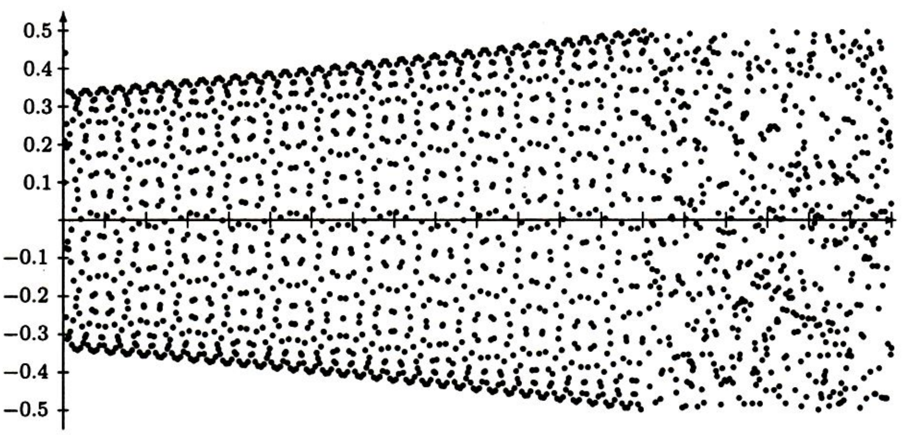
Ciąg $E(10,19)$ spełnia rekurencję liniową czwartego stopnia. Pierwiastki x_2 i x_3 są zespolone sprzężone o module 1.

Jeśli zaś $|x_2| > 1$ (nieznacznie), to wyjście r_n poza przedział $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ jest zagwarantowane.



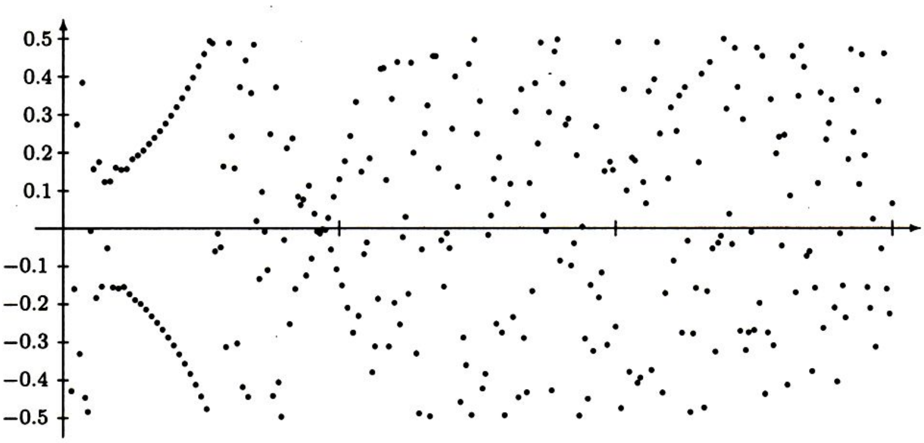
Ciąg $E(10, 119)$ spełnia rekurencję liniową stopnia 4 do 856-go wyrazu. Pierwiastki x_2 i x_3 są zespolone sprzężone o module ≈ 1.0004657.

W przypadku wspomnianego już ciągu $E(10, 219)$ pierwiastki x_2 i x_3 są zespolone sprzężone o module ≈ 1.0002811. Dlatego potrzeba ponad 1000 wyrazów, aby r_n "wyszło" poza przedział $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

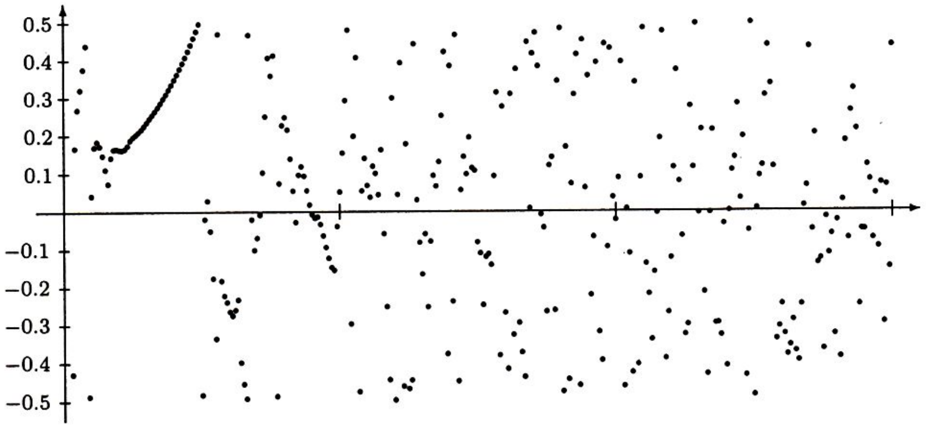


Ciąg $E(10, 219)$ spełnia rekurencję liniową stopnia 4 do 1402-go wyrazu. Pierwiastki x_2 i x_3 są zespolone sprzężone o module ≈ 1.0002811.

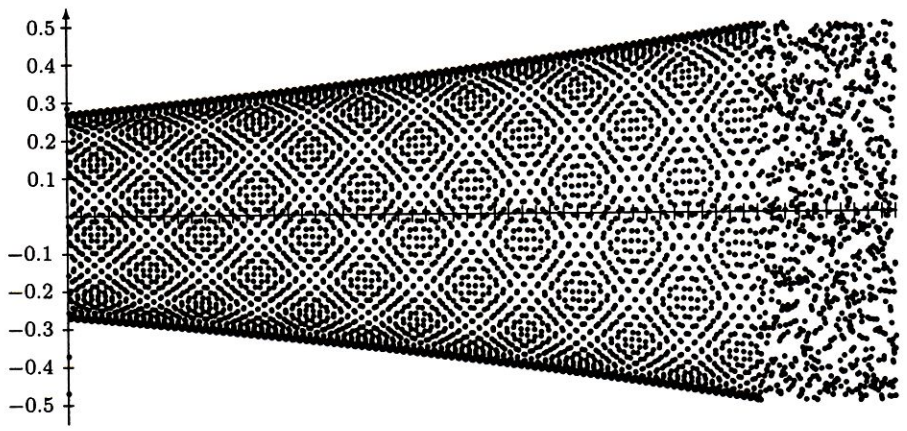
W ciekawych przykładach właśnie taka sytuacja jest typowa: jeden duży pierwiastek, para pierwiastków zespolonych sprzężonych o module bliskim 1, pozostałe pierwiastki małe.



Rekurencja ósmego stopnia psuje się dla wyrazu 54-go.



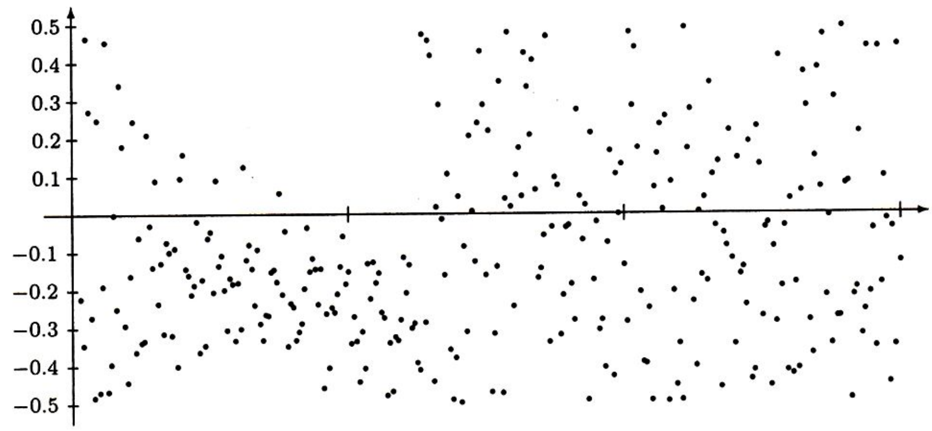
Rekurencja ósmego stopnia psuje się dla wyrazu 50-go.



Ciąg $E(14,128)$ spełnia rekurencję piątego stopnia

$$a_{n+5} = 10a_{n+4} - 8a_{n+3} + a_{n+2} + 3a_{n+1} + 2a_n$$

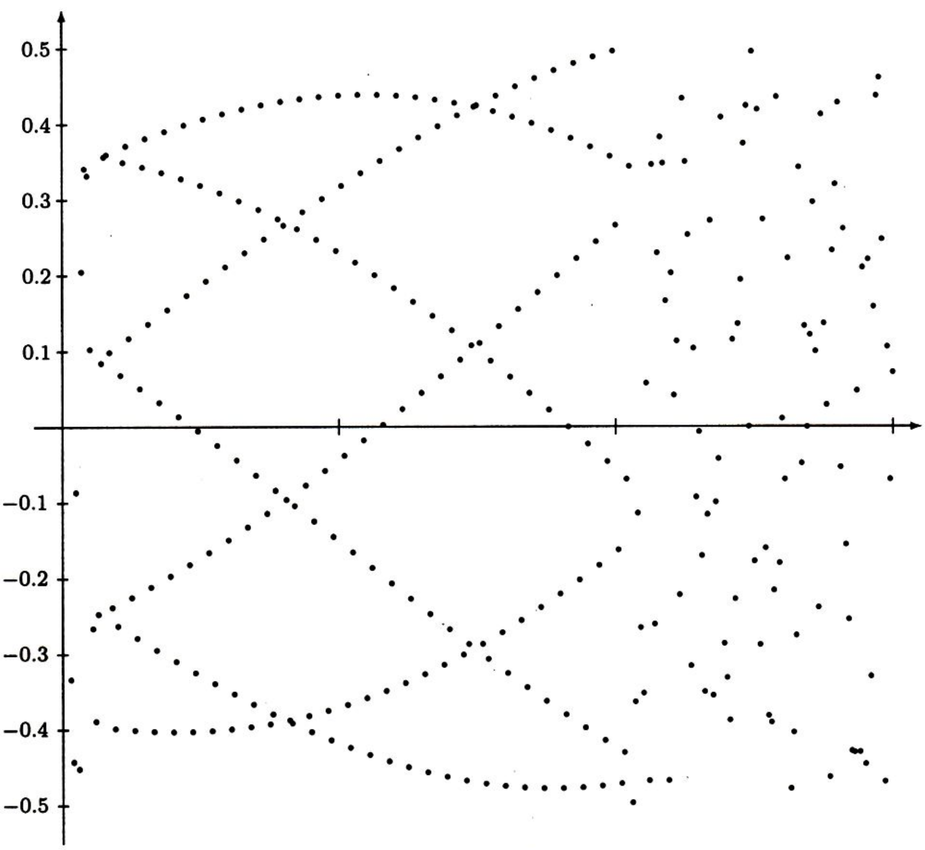
do wyrazu a_{5015} włącznie (na wykresie zaokrąglenia do r_{6000}). Wielomian charakterystyczny ma parę pierwiastków zespolonych sprzężonych o module ≈ 1.0001216657.



Rekurencja 14-go stopnia spełniona do wyrazu 126-go. Z uwagi na wysoki stopień rekurencji, punkty wykresu nie tworzą linii, ale brak losowości widoczny jest jako obszar, w którym nie ma żadnych punktów wykresu. Aż sześć pierwiastków wielomianu charakterystycznego jest bezwzględnie większych od 1, przy czym $x_2 = 1.0096218$.

Jak zobaczyć rekurencję liniową?

Popatrzmy na wykres ciągu zaokrągleń (r_n) związanych z ciągiem $E(6, 52)$.



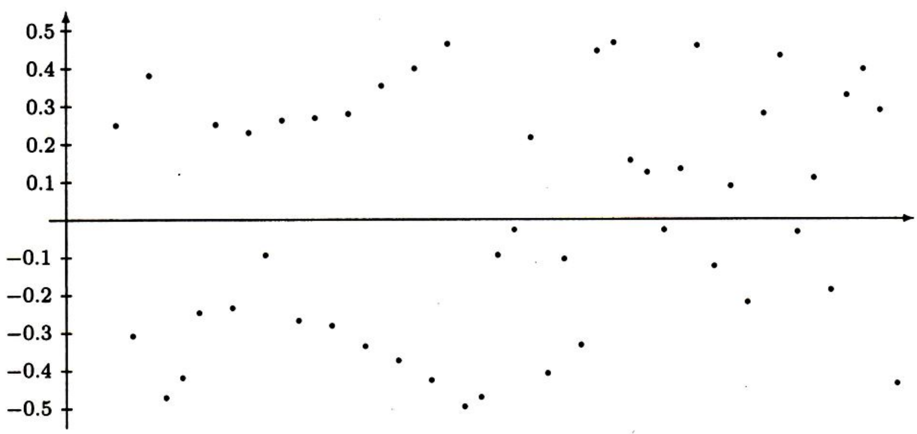
Ciąg $E(6, 52)$ spełnia rekurencję czwartego stopnia do 205-tego wyrazu. Na rysunku widać to jak na dłoni.

Załamująca się regularność wykresu nie wynika z tego, że komputer nagle przestał sobie radzić z dużymi liczbami i popełnia błędy. Po prostu do 205-tego wyrazu ciąg $E(6, 52)$ spełnia rekurencję stopnia 5

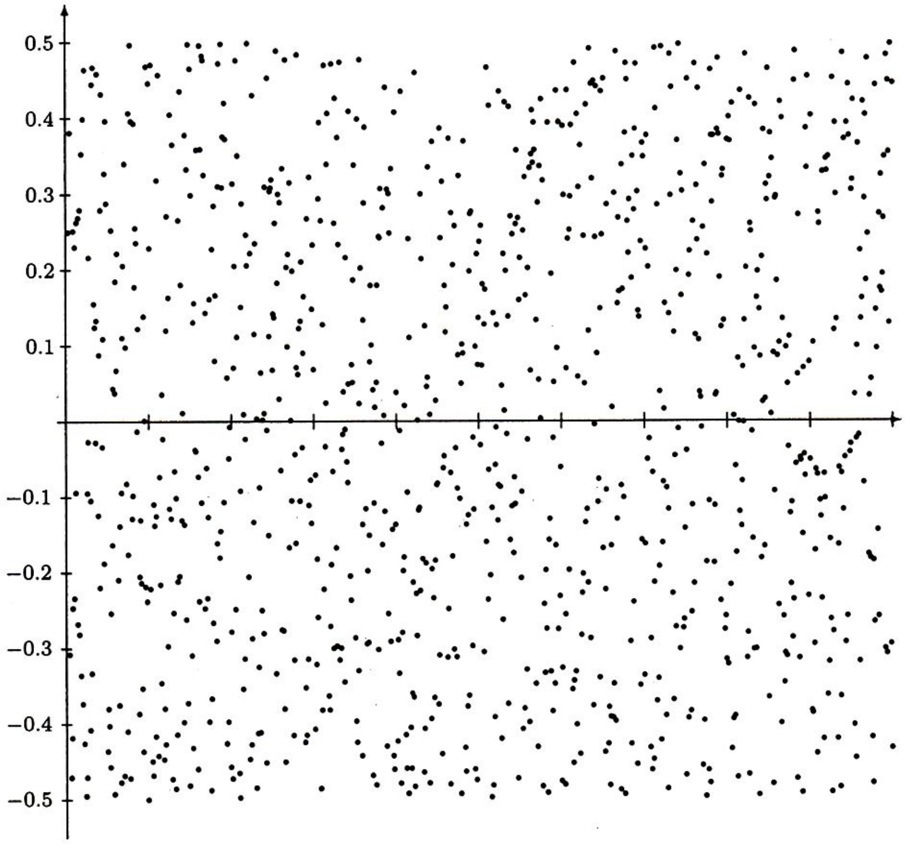
$$a_{n+5} = 9a_{n+4} - 3a_{n+3} + a_{n+2} + 4a_{n+1} + 3a_n \ .$$

A potem przestaje, o co postarała się para pierwiastków zespolonych sprzężonych równania charakterystycznego rekurencji, o module ≈ 1.00126.

Patrząc na wykres zaokrągleń ciągu $E(4, 13)$ łatwo teraz uwierzyć, że nie spełnia on żadnej rekurencji liniowej.



Dla ciągu $E(4, 13)$ mamy rekurencję szóstego stopnia, która urywa się po 24-tym wyrazie (na wykresie r_n dla $n \leqslant 50$)...

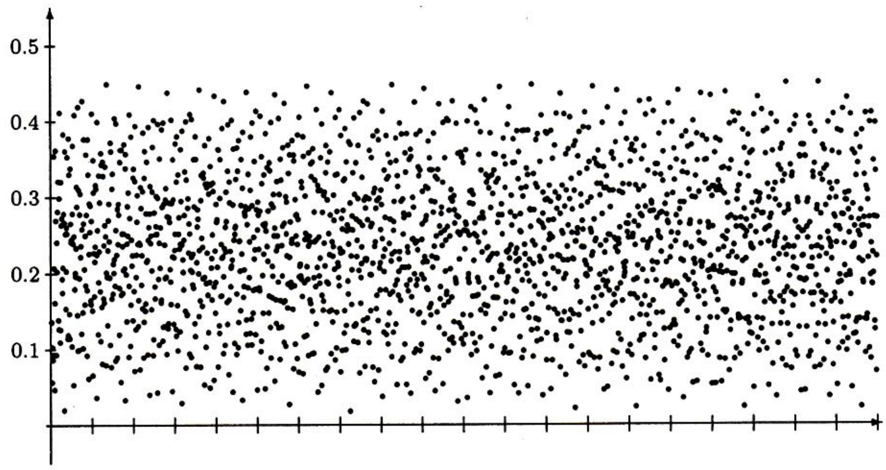


... a potem już tylko losowa sieczka.

Skoro udało mi się zbudować przekonanie, że patrząc na rysunek można zobaczyć, czy ciąg Pisota spełnia rekurencję liniową, czy też nie, postaram się teraz to przekonanie trochę zburzyć.

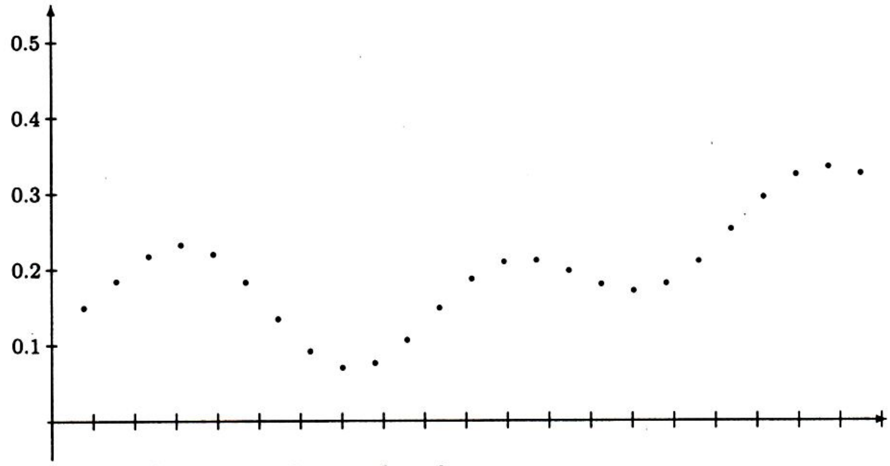
Rekurencja, która jest, chociaż jej nie widać

Popatrzmy na wykres zaokrągleń dla ciągu $E(313580, 401583)$. Widzimy losowy układ punktów, pewnie ten ciąg nie spełnia rekurencji liniowej, gdyż takowa wymusiłaby przecież pewną regularność rysunku.



Zaokrąglenia ciągu $E(313580, 401583)$ sprawiają wrażenie losowości...

To teraz posieję niepokój: jak to się dzieje, że losowo wybrane liczby z przedziału $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ są wszystkie dodatnie? A jeśli wybierzemy punkty odpowiadające indeksom $n \equiv 0 (\text{mod } 78)$, to czy dalej wierzymy w losowość wykresu?



... chyba, że wybierzemy co 78-my punkt wykresu.

Okazuje się, że ciąg ten spełnia rekurencję stopnia 9:

$$a_{n+9} = a_{n+8} + a_{n+6} - a_{n+3} - a_{n+1} + a_n ,$$

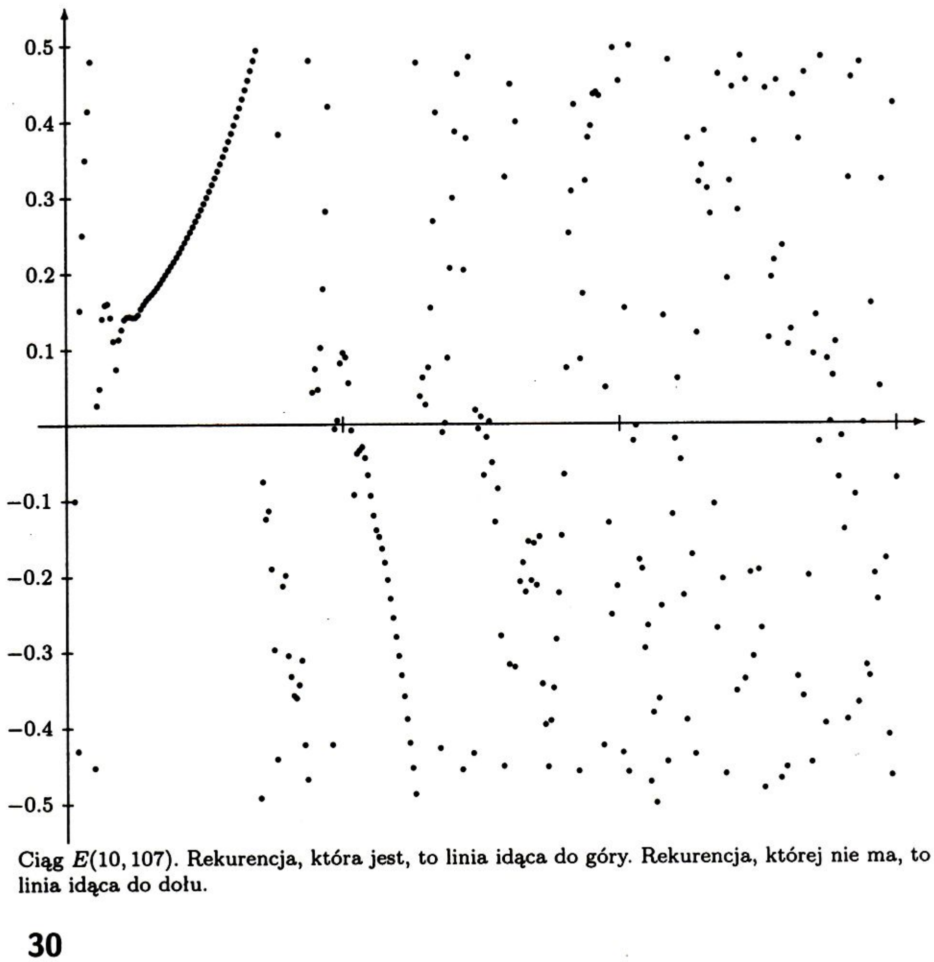
której wielomian charakterystyczny ma największy pierwiastek ≈ 1.28 oraz siedem pierwiastków o module 1: jedynkę i trzy pary pierwiastków zespolonych sprzężonych. Jedynka odpowiada za podniesienie wykresu do góry, a pary pierwiastków sprzężonych są odpowiedzialne za sinusoidalne wahania r_n, jednak nałożenie trzech takich wahań o różnych częstościach daje złudzenie całkowitej losowości.

Rekurencja, którą widać, mimo że jej nie ma

Popatrzmy teraz na wykres zaokrągleń dla ciągu $E(10, 107)$. Rekurencja stopnia 9

$$a_{n+9} = 11a_{n+8} - 3a_{n+7} - 2a_{n+6} - a_{n+5} - a_{n+4} - a_{n+3} - a_{n+2} - a_{n+1} - a_n$$

psuje się dla wyrazu 70-tego.



Ciąg $E(10, 107)$. Rekurencja, która jest, to linia idąca do góry. Rekurencja, której nie ma, to linia idąca do dołu.

Nietrudno to zresztą zauważyć na wykresie. Drugi co do wielkości pierwiastek jest równy ≈ 1.02797, pozostałe są bezwzględnie znacznie mniejsze od jedynki.

Nie to jest jednak ciekawe. To co widać po 100-nym wyrazie (oś odciętych jest znaczona co 100), nie wygląda na losowe.

Z rysunku można odczytać co następuje: ciąg gubi pierwszą rekurencję na 70-tym wyrazie, ale potem udaje mu się złapać na chwilę następną rekurencję. Świetnie, znajdźmy więc tę rekurencję, skoro tak wyraźnie ją widać. Nic z tego, żadnej rekurencji nie ma. Ale przecież ją widać. To nic, że widać, nie ma żadnej rekurencji!

Może za krótko ciąg spełniał tę rekurencję? Widzimy, że zaokrąglenie r_n dla $n = 127$ chciałoby zejść poniżej -0.5, ale definicja ciągu Pisota na to nie pozwala. Możemy więc przedefiniować nasz ciąg stosując dla $n \geqslant 127$ zasadę, że zaokrąglenia $r_n = \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}} - a_n$ nie muszą mieścić się w przedziale $[-0.5, 0.5)$, ale r_n powinno możliwie najlepiej przybliżać $2r_{n-1} - r_{n-2}$. Mówiąc dokładniej, zamiast ciągu (a_n) rozważamy ciąg (b_n) określony wzorem

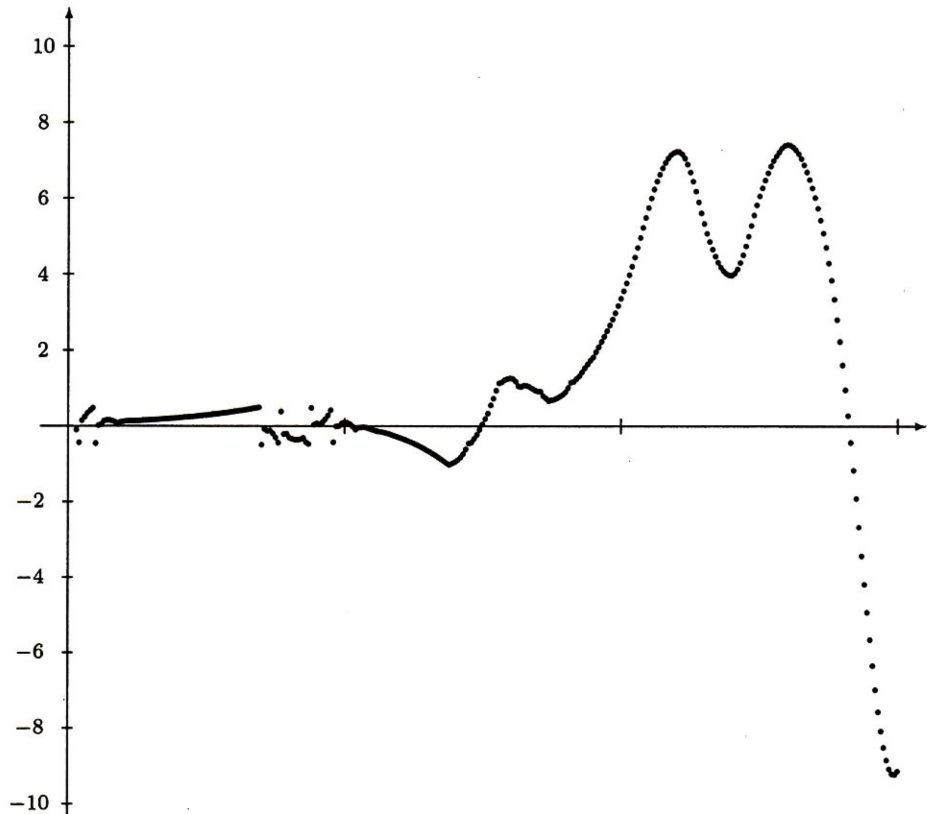
$$b_n = \begin{cases} a_n & \text{dla} \quad n \leqslant 126 \\ \left[\frac{b_{n-1}^2}{b_{n-2}} - 2R_{n-1} + R_{n-2} + \frac{1}{2}\right] & \text{dla} \quad n \geqslant 127\,, \end{cases}$$

gdzie $R_n = \frac{b_{n-1}^2}{b_{n-2}} - b_n$. Ta zmiana definicji daje zupełnie inny obrazek.

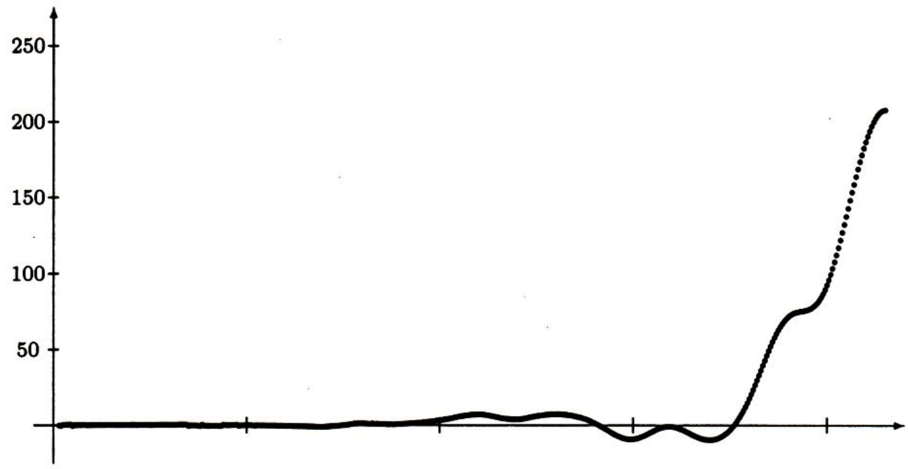
Teraz regularność rysunku rozciąga się znacznie dalej. Tak zmodyfikowany ciąg okazuje się spełniać rekurencję liniową 95-tego stopnia! Dla ciągu (b_n) mamy bowiem

$$\begin{gathered} b_{n+95} = 11b_{n+94} - 3b_{n+93} - 2b_{n+92} - b_{n+91} - b_{n+90} - b_{n+89} - b_{n+88} - \\ - b_{n+87} - b_{n+86} + b_{n+25} + b_{n+24} + b_{n+23} + b_{n+22} + b_{n+21} + b_{n+20} + b_{n+19} - \\ - b_{n+7} - b_{n+6} - b_{n+5} - b_{n+4} - b_{n+3} - b_{n+2} - b_{n+1} - b_n\,, \end{gathered}$$

co jest prawdą aż do wyrazu $b_{n+95} = b_{430}$ i to na dodatek (czego z rysunku nie widać) od samego początku, tzn. od $n = 1$.



Zaokrąglenia R_n dla ciągu (b_n) - modyfikacji ciągu $E(10, 107)$.



Zaokrąglenia R_n dla ciągu (b_n) - modyfikacji ciągu $E(10,107)$.

Z pomocą ciągu (b_n) znaleźliśmy więc rekurencję 95-go stopnia, którą spełnia ciąg $(a_n)_{n=1}^{126}$. Każdy widzi istnienie tej rekurencji na wykresie. Każdy wie też, że mówienie o rekurencji 95-go stopnia wyznaczonej przez 126-wyrazowy kawałek ciągu jest absurdem, gdyż do wyznaczenia rekurencji stopnia k potrzeba co najmniej $2k$ wyrazów ciągu.