

Blossoming

Przemysław KICIAK, Warszawa

Rzecz będzie o krzywych Béziera i B-sklejanych, często stosowanych w grafice komputerowej i w systemach CAD. W teorii tych krzywych występują związane z nimi **formy biegunowe** i **formy tensorowe**. Zastosowanie tych ostatnich daje m.in. elegancki dowód twierdzenia o ciągłości krzywych B-sklejanych. Z drugiej strony, badając krzywe można dowiedzieć się sporo o tensorach symetrycznych. Sposób ujęcia tematu jest oparty na artykule [1].

Algorytm de Casteljau

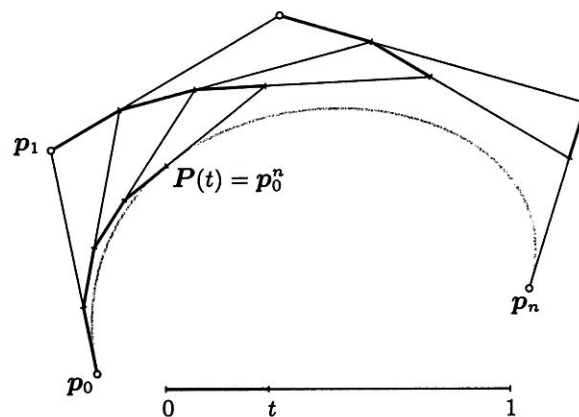
Punktem wyjścia do rozważań będzie **algorytm de Casteljau**, który służy (między innymi) do obliczania punktów krzywych Béziera.

Krzywa Béziera [2] stopnia n jest określona przez ciąg $n + 1$ punktów, p_0, \dots, p_n . Wygodnie jest przyjąć, że reprezentacją krzywej jest łamana złożona z n odcinków, której to są wierzchołki. Dla dowolnego $t \in [0, 1]$ punkt $P(t)$ otrzymujemy dzieląc każdy odcinek łamanej w proporcji $t : 1 - t$ (dla $t \notin [0, 1]$ dokonujemy ekstrapolacji). Otrzymujemy n punktów, które są wierzchołkami nowej łamanej złożonej z $n - 1$ odcinków. Proces ten powtarzamy aż do otrzymania jednego punktu. Możemy to zapisać wzorami

$$p_i^{(j)} = (1 - t)p_i^{(j-1)} + tp_{i+1}^{(j-1)} \quad \text{dla } j = 1, \dots, n, i = 0, \dots, n - j;$$

$$P(t) = p_0^{(n)}$$

i obejrzyć na rysunku 1.



Rys. 1: Algorytm de Casteljau.

Łatwo jest udowodnić, że $P(t) = \sum_{i=0}^n p_i B_i^n(t)$, $B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1 - t)^{n-i}$, a więc punkty p_0, \dots, p_n są wektorowymi współczynnikami krzywej w bazie wielomianów Bernsteina.

Algorytm de Casteljau daje w wyniku także „lokalne” reprezentacje krzywej:

$$P(s) = \sum_{i=0}^n p_0^{(i)} B_i^n(u) = \sum_{i=0}^n p_i^{(n-i)} B_i^n(v),$$

dla $u = \frac{s}{t}$, $v = \frac{s-t}{1-t}$. Najczęściej wykorzystuje się to w celu „dzielenia krzywej na kawałki”, ale wypadałoby udowodnić tę własność algorytmu.

Formy biegunowe

Weźmy dowolny wielomian $P \in \mathbb{R}[t]_n$. Istnieje dokładnie jeden wielomian $p \in \mathbb{R}[t_1, \dots, t_n]_{1, \dots, 1}$, taki że

- przestawianie jego argumentów nie zmienia wartości,
- dla każdego $t \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $P(t) = p(\underbrace{t, \dots, t}_n)$.

Na przykład, jeśli $n = 3$
i $P(t) = t^3 + 3t^2 + 5t + 2$, to
 $p(t_1, t_2, t_3) = t_1 t_2 t_3 + t_1 t_2 + t_1 t_3 +$
 $+ t_2 t_3 + \frac{5}{3}(t_1 + t_2 + t_3) + 2$.

Ogólnie, wielomowi $P(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$, odpowiada

$$p(t_1, \dots, t_n) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{\binom{n}{k}} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} t_{j_1} \dots t_{j_k}.$$

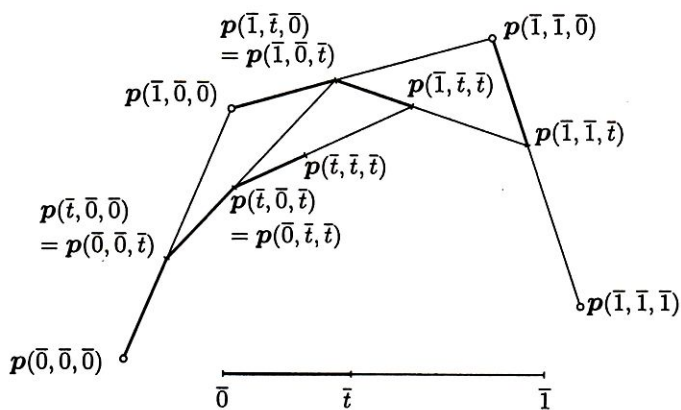
Wielomian P nazywa się **formą diagonalną**, a wielomian p **formą biegunową**. Powiązanie form diagonalnych z biegunowymi nosi nazwę **zasady polaryzacji**.

Krzywej parametrycznej $P \in \mathbb{R}[t]_n^d$, która jest wielomianowym odwzorowaniem $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$, przyporządkowujemy funkcję $p \in \mathbb{R}[t_1, \dots, t_n]_{1, \dots, 1}^d$, która jest odwzorowaniem $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$. Funkcja ta jest afiniczna ze względu na każdy argument i symetryczna, a ponadto $P(t) = p(\underbrace{t, \dots, t}_n)$ dla każdego t .

Przyporządkowanie to jest izomorfizmem, bo $\dim \mathbb{R}[t]_n^d = \dim \mathbb{R}[t_1, \dots, t_n]_{1, \dots, 1}^d = (n+1)d$.

Od tej pory zbiór \mathbb{R} argumentów krzywej będziemy traktować jak przestrzeń afiniczną (i na wszelki wypadek oznaczymy go literą L). Podkreśleniu tego służy oznaczenie $\bar{t} = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$. Przestrzeń \mathbb{R}^d , w której są zawarte zbiory wartości funkcji P i p , też uznamy za afiniczną i oznaczymy ją symbolem Q .

Spójrzmy ponownie na algorytm de Casteljau: przypuśćmy, że znamy wartości formy biegunowej krzywej P w punktach $(\bar{0}, \bar{0}, \dots, \bar{0})$, $(\bar{1}, \bar{0}, \dots, \bar{0})$, \dots , $(\bar{1}, \bar{1}, \dots, \bar{1})$. Wtedy możemy postąpić tak, jak na rysunku 2.



Rys. 2: Algorytm de Casteljau i formy biegunowe.

Wniosek 1: Każdy punkt kontrolny jest wartością formy biegunowej krzywej: $p_i = p(\underbrace{\bar{1}, \dots, \bar{1}}_i, \underbrace{\bar{0}, \dots, \bar{0}}_{n-i})$. Gdyby było inaczej, to albo wymiary przestrzeni

krzywych i form byłyby różne, albo algorytm de Casteljau byłby na ogół niewykonalny, a poza tym niejednoznaczny.

Wniosek 2: Podział krzywej, tj. wyznaczenie jej „lokalnych” reprezentacji związanych z odcinkami $[\bar{0}, \bar{t}]$ i $[\bar{t}, \bar{1}]$ za pomocą algorytmu de Casteljau, jest oczywisty.

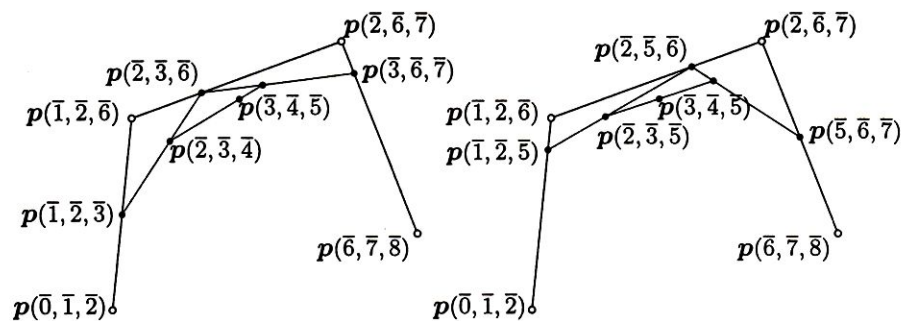
Krzywe B-sklejane

Formę biegunową możemy reprezentować za pomocą wartości $d_0 = p(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n)$, $d_1 = p(\bar{u}_2, \dots, \bar{u}_{n+1})$, \dots , $d_n = p(\bar{u}_{n+1}, \dots, \bar{u}_{2n})$.

Warunek konieczny poprawności takiej reprezentacji to $\bar{u}_i \neq \bar{u}_k$ dla $k - i > n$ (praktyczny warunek dostateczny to $u_1 \leq \dots \leq u_n < u_{n+1} \leq \dots \leq u_{2n}$).

Odpowiednio uogólniony algorytm de Casteljau, który oblicza wartość formy biegunowej na podstawie punktów d_0, \dots, d_n , nosi nazwę **algorytmu de Boora**. Stosując go możemy obliczyć $P(\bar{t}) = p(\bar{t}, \dots, \bar{t})$ albo, jeszcze bardziej go uogólniając, wartość formy biegunowej w dowolnym punkcie. Zmieniając kolejność argumentów $\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n$ dostaniemy inne wyniki pośrednie, ale zawsze ten sam wynik końcowy.

Krzywą B-sklejaną określa się wybierając ciąg węzłów $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{N-1} \in L$ ($u_1 \leq \dots \leq u_{N-1}$) oraz ciąg punktów kontrolnych $d_0, \dots, d_{N-n-1} \in Q$.



Rys. 3: Algorytm de Boora.

Dziedziną krzywej jest przedział $[\bar{u}_n, \bar{u}_{N-n}]$. Na odcinku $[\bar{u}_k, \bar{u}_{k+1}]$ jest to krzywa wielomianowa P_k , której forma biegunowa przyjmuje wartości $d_{k-n} = p_k(\bar{u}_{k-n+1}, \dots, \bar{u}_k), \dots, d_k = p_k(\bar{u}_{k+1}, \dots, \bar{u}_{k+n})$.

Krzywa może składać się z dowolnie wielu łuków wielomianowych, ale zawsze łuki P_k oraz P_l mają wspólne $\max(0, n+1 - |l-k|)$ punktów kontrolnych. Jeśli $u_k < u_{k+1} = \dots = u_{k+r} < u_{k+r+1}$ oraz $l = k+r$, to łuki P_k i P_l opisują krzywą na sąsiednich przedziałach. W otoczeniu węzła \bar{u}_k o krotności r krzywa ma ciągłe pochodne do rzędu $n-r$. Można to udowodnić na podstawie następującego twierdzenia:

Twierdzenie: Dwie krzywe wielomianowe stopnia co najwyżej n , P_1 i $P_2: L \rightarrow Q$, dla ustalonego $\bar{u} \in L$ spełniają równości

$$\frac{d^k}{dt^k} P_1(\bar{t})|_{t=\bar{u}} = \frac{d^k}{dt^k} P_2(\bar{t})|_{t=\bar{u}}, \quad k = 0, \dots, m \leq n, \quad (1)$$

wtedy i tylko wtedy gdy ich formy biegunowe, p_1 i p_2 , spełniają równanie

$$p_1(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_m, \underbrace{\bar{u}, \dots, \bar{u}}_{n-m}) = p_2(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_m, \underbrace{\bar{u}, \dots, \bar{u}}_{n-m}) \quad (2)$$

Elementarny dowód twierdzenia o ciągłości funkcji sklejanych: wprowadzamy nowe zmienne, $s = t - u$, $s_1 = t_1 - u, \dots, s_n = t_n - u$. Krzywą $P(\bar{t})$ i jej formę biegunową $p(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n)$ możemy opisać wzorami

$$P(\bar{t}) = \sum_{k=0}^n a_k s^k, \\ p(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{\binom{n}{k}} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} s_{j_1} \dots s_{j_k}$$

Punkt $P(\bar{u})$ i pochodne krzywej P w punkcie u mają wartości

$$\frac{d^k}{dt^k} P(\bar{u}) = k! a_k$$

dla $k = 0, \dots, n$. Podstawiając $\bar{t}_{m+1} = \dots = \bar{t}_n = u$, tj $s_{m+1} = \dots = s_n = 0$, otrzymujemy

$$p^*(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_m) = p(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_m, \bar{u}, \dots, \bar{u}) = \sum_{k=0}^m \frac{a_k}{\binom{n}{k}} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq m} s_{j_1} \dots s_{j_k}$$

ponieważ wszystkie pozostałe składniki są równe 0.

Przypuśćmy, że mamy dwie krzywe, P_1 i P_2 i ich formy biegunowe p_1 i p_2 , reprezentowane w podany wyżej sposób za pomocą współczynników odpowiednio $a_{1,0}, \dots, a_{1,n}$ oraz $a_{2,0}, \dots, a_{2,n}$.

Funkcje otrzymane przez podstawienie $\bar{t}_{m+1} = \dots = \bar{t}_n = \bar{u}$ do form p_1 i p_2 oznaczmy symbolami p_1^* i p_2^* . Teraz możemy napisać cztery zdania, z których każde kolejne dwa są równoważne w sposób oczywisty:

1. Równania (1) są spełnione.
2. $a_{1,k} = a_{2,k}$ dla $k = 0, \dots, m$.
3. Funkcje p_1^* i p_2^* są identyczne.
4. Równanie (2) jest spełnione dla dowolnych punktów $\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_m \in L$. \square

dla dowolnych punktów $\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_m \in L$.

Powyższe twierdzenie można „obejrzeć” na wykresie dla $n = 2, d = 1$ (rys. 4). Odkryłem zaskakująco prosty dowód tego twierdzenia [3] i margines obok jest dość szeroki by go pomieścić. Jednak dalej przeprowadzimy inny dowód. Zbożny cel, jakim jest poznanie tensorów, uswięca tak nieszkodliwe środki.

Tensorzy symetryczne

W równaniu

$$p(\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}) = \frac{1}{2} p(\bar{0}, \bar{2}, \bar{3}) + \frac{1}{2} p(\bar{2}, \bar{2}, \bar{3})$$

nieistotne jest konkretne przekształcenie p ; chcielibyśmy przyporządkować argumentom tego przekształcenia obiekty takie, aby było m.in.

$$(a) \quad (\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}) = \frac{1}{2} (\bar{0}, \bar{2}, \bar{3}) + \frac{1}{2} (\bar{2}, \bar{2}, \bar{3}).$$

W zbiorze tych obiektów musi być także

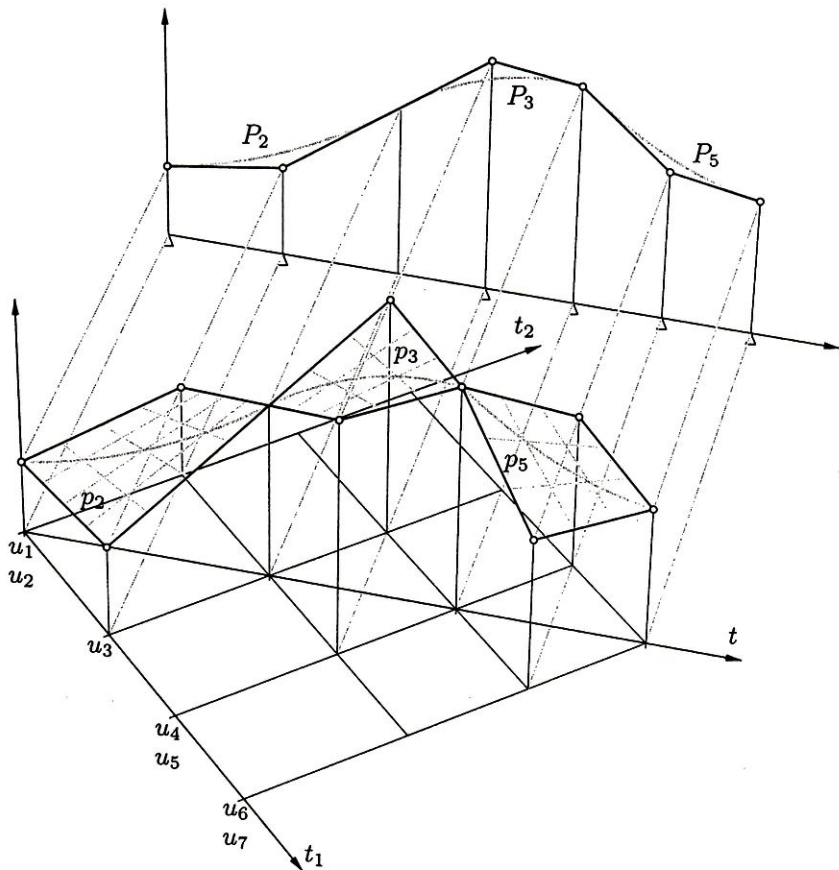
$$(b) \quad (\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}) = (\bar{2}, \bar{1}, \bar{3}) = (\bar{3}, \bar{2}, \bar{1}) = \text{itd.},$$

natomiast nie mogą zachodzić równości w rodzaju

$$(c) \quad (\bar{1}, \bar{1}, \bar{1}) = \frac{1}{2} (\bar{0}, \bar{0}, \bar{0}) + \frac{1}{2} (\bar{2}, \bar{2}, \bar{2}).$$

Dlatego nie interesuje nas sama przestrzeń L^n (tu: L^3), w której wprawdzie zachodzą relacje typu (a), ale nie zachodzi (b), natomiast zachodzi (c).

Odpowiednia przestrzeń, która spełnia naszkicowane warunki, to n -ta symetryczna potęga tensorowa przestrzeni L , tj. pewna przestrzeń afiniczna $\odot^n L$ oraz przekształcenie $\varphi: L^n \rightarrow \odot^n L$, takie że dla dowolnej przestrzeni afinicznej Q każde symetryczne przekształcenie n -afiniczne $p: L^n \rightarrow Q$ można przedstawić w postaci $p = p^\odot \circ \varphi$, gdzie przekształcenie $p^\odot: \odot^n L \rightarrow Q$ jest afiniczne i jednoznacznie określone.



Rys. 4: Wykresy form biegunowych funkcji sklejanej drugiego stopnia.

Element $\varphi(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n)$ przestrzeni $\odot^n L$ oznaczmy symbolem $\bar{t}_1 \odot \dots \odot \bar{t}_n$ – to jest **tensor symetryczny**, albo **iloczyn tensorowy** (na poziomie elementów) punktów $\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n \in L$.

Dowód, że wspomniane obiekty istnieją, można przeprowadzić wskazując i badając konkretny model. Najprostszym modelem takich tensorów symetrycznych są wielomiany jednej zmiennej stopnia n ; bierzemy

$$\bar{t}_1 \odot \dots \odot \bar{t}_n = (Z - t_1) \cdot \dots \cdot (Z - t_n).$$

Łatwo jest przekonać się, że tworzą one przestrzeń afiniczną, w której dla $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in L$, $\bar{a} \neq \bar{b}$ mamy

$$(a) \quad \bar{c} \odot \bar{t}_2 \odot \dots \odot \bar{t}_n = \frac{b-c}{b-a} (\bar{a} \odot \bar{t}_2 \odot \dots \odot \bar{t}_n) + \frac{c-a}{b-a} (\bar{b} \odot \bar{t}_2 \odot \dots \odot \bar{t}_n),$$

a ponadto dla dowolnej permutacji σ jest

$$(b) \quad \bar{t}_1 \odot \dots \odot \bar{t}_n = \bar{t}_{\sigma(1)} \odot \dots \odot \bar{t}_{\sigma(n)},$$

oraz dla $a + b = 1$ na ogół nie zachodzi równość

$$(c) \quad a(\bar{t}_1 \odot \dots \odot \bar{t}_n) + b(\bar{s}_1 \odot \dots \odot \bar{s}_n) = (a\bar{t}_1 + b\bar{s}_1) \odot \dots \odot (a\bar{t}_n + b\bar{s}_n).$$

Wielomian, który ma n rzeczywistych miejsc zerowych, modeluje tzw. **tensor prosty**, któremu odpowiada pewien układ n punktów. Nie każdy wielomian spełnia ten warunek, a zatem nie każdy tensor jest prosty. Wymiar tej przestrzeni afinicznej (a także każdej innej, która jest modelem przestrzeni $\odot^n L$) jest równy n .

Twierdzenie: Dla każdej formy biegunowej $p: L^n \rightarrow Q$ istnieje jednoznacznie określone przekształcenie afiniczne $p^\odot: \odot^n L \rightarrow Q$, takie że $p = p^\odot \circ \varphi$. Złożenie dowolnego przekształcenia afinicznego p^\odot z φ jest formą biegunową.

Dowód (dla modelu wielomianowego): Druga teza jest oczywista – przekształcenie $p^\odot \circ \varphi$ jest symetryczne, a ustalając wszystkie argumenty z wyjątkiem jednego dostajemy przekształcenie afiniczne.

Dla dowodu pierwszej tezy możemy wziąć punkty $(\bar{0}, \bar{0}, \dots, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{0}, \dots, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1}, \dots, \bar{1}) \in L^n$. Odpowiadają im wielomiany $Z^n, Z^{n-1}(Z-1), \dots, (Z-1)^n$, które stanowią bazę afiniczną naszego modelu przestrzeni $\odot^n L$.

Dla ustalonej formy biegunowej p przyjmujemy $p^\odot(Z^k(Z-1)^{n-k}) = p(\underbrace{\bar{1}, \dots, \bar{1}}_{n-k}, \underbrace{\bar{0}, \dots, \bar{0}}_k)$. Istnieje dokładnie jedno

przekształcenie afiniczne $p^\odot: \odot^n L \rightarrow Q$, które spełnia te warunki. Wartość $p^\odot(\prod_{k=1}^n (Z-t_k))$ możemy obliczyć za pomocą algorytmu de Casteljau, który daje jednoznaczny wynik, równy $p(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n)$. \square

Formy tensorowe

Przekształcenie $p^\odot: \odot^n L \rightarrow Q$, takie że forma biegunowa p jest złożeniem φ i p^\odot , nazywa się **formą tensorową**. Na marginesie jest przykład, jak może to wyglądać w naszym modelu.

Badanie krzywych wielomianowych (form diagonalnych) może więc być zastąpione badaniem ich form tensorowych – zysk polega na tym, że forma diagonalna jest na ogół przekształceniem nieliniowym, a forma tensorowa jest przekształceniem afinicznym. Co prawda, ma ona bardziej skomplikowaną dziedzinę.

Aby postąpić dalej, trzeba dokonać **homogenizacji**, tj. przejść od przestrzeni afinicznych do liniowych, zwiększając jeszcze wymiary. Dotąd rozpatrywaliśmy punkty $\bar{t} = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} \in L$. Teraz dopuszczamy wektory o postaci $\begin{bmatrix} t \\ w \end{bmatrix}$ dla dowolnego $w \in \mathbb{R}$. Dzięki temu mamy możliwość reprezentowania m.in. wektorów swobodnych przestrzeni $L: \bar{s} - \bar{t} = \begin{bmatrix} s \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s-t \\ 0 \end{bmatrix}$. Homogenizacja jest konieczna dlatego, że pochodne krzywej parametrycznej w przestrzeni afinicznej Q są wektorami swobodnymi, a ich dotyczy twierdzenie, które chcemy udowodnić.

Przestrzeń jednorodną przestrzeni L oznaczmy symbolem L_* i podobnie przestrzeń afiniczną Q rozszerzymy do Q_* . Modelem przestrzeni $\odot^n L_*$ jest przestrzeń jednorodnych wielomianów *dwóch zmiennych*, np. $(w_1 Z - t_1 X) \cdot \dots \cdot (w_n Z - t_n X)$. Wymiar wszystkich przestrzeni form „afinicznych” jest równy $(n+1)d$, zaś jednorodnych $(n+1)d+1$.

Zauważmy, że waga tensora $\bar{t}_1 \odot \dots \odot \bar{t}_n$ (w modelu wielomianowym współczynnik przy Z^n) jest iloczynem wag (współrzędnych „ w ”) wektorów $\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n$. Każda jednorodna forma tensorowa p_*^\odot odpowiadająca „afinicznej” formie diagonalnej zachowuje tę współrzędną.

Przejdźcie do form jednorodnych prześledzimy na przykładzie. Formie diagonalnej P z przykładu na marginesie odpowiada jednorodna forma diagonalna

$$P_* \left(\begin{bmatrix} t \\ w \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} t^3 + 3t^2w + 2w^3 \\ w^3 \end{bmatrix}.$$

Formie biegunowej p odpowiada jednorodna forma biegunowa

$$p_* \left(\begin{bmatrix} t_1 \\ w_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t_2 \\ w_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t_3 \\ w_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} t_1 t_2 t_3 + t_1 t_2 w_3 + t_1 w_2 t_3 + w_1 t_2 t_3 + 2w_1 w_2 w_3 \\ w_1 w_2 w_3 \end{bmatrix}.$$

Wreszcie, możemy obliczyć

$$\begin{aligned} (w_1 Z - t_1 X)(w_2 Z - t_2 X)(w_3 Z - t_3 X) = \\ = -t_1 t_2 t_3 X^3 + (t_1 t_2 w_3 + t_2 t_3 w_1 + t_1 t_3 w_2) X^2 Z - (t_1 w_2 w_3 + t_2 w_3 w_1 + t_1 w_3 w_2) X Z^2 + \\ + w_1 w_2 w_3 Z^3 = a X^3 + b X^2 Z + c X Z^2 + d Z^3. \end{aligned}$$

Na tej podstawie formie tensorowej p^\odot odpowiada jednorodna forma tensorowa, p_*^\odot , która jest przekształceniem liniowym przestrzeni $\odot^n L_* \rightarrow Q_*$:

$$p^\odot(a X^3 + b X^2 Z + c X Z^2 + d Z^3) = \begin{bmatrix} -a + b + 2d \\ d \end{bmatrix}.$$

Dowód twierdzenia o ciągłości funkcji sklepanych

Aby udowodnić podane wcześniej twierdzenie, które wiąże klasę ciągłości funkcji sklepanych z formami biegunowymi, zajmiemy się pochodnymi funkcji

$$P(\bar{t}) = p_*^\odot(\bar{t}^n)$$

Formie diagonalnej (wielomianowi) trzeciego stopnia

$$P \left(\begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} t^3 + 3t^2 + 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

odpowiada forma biegunowa

$$\begin{aligned} p \left(\begin{bmatrix} t_1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t_2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t_3 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \\ = \begin{bmatrix} t_1 t_2 t_3 + t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_1 t_3 + 2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

i forma tensorowa p^\odot , która w przedstawionym modelu wielomianowym jest taka: ponieważ

$$\begin{aligned} (Z - t_1)(Z - t_2)(Z - t_3) = \\ = -t_1 t_2 t_3 + (t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_1 t_3) Z - \\ - (t_1 + t_2 + t_3) Z^2 + Z^3, \end{aligned}$$

więc

$$\begin{aligned} p^\odot(a + bZ + cZ^2 + Z^3) = \\ = \begin{bmatrix} -a + b + 2 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Wektorowi $\begin{bmatrix} t \\ w \end{bmatrix} \in L_*$ odpowiada w naszym modelu iloczyn tensorowego czynnika $(wZ - tX)$, a zatem wektorowi δ odpowiada czynniki $-X$. Stąd tensor $e_k = \delta^k \odot \bar{u}^{m-k}$ jest w tym modelu reprezentowany przez wielomian $(-X)^k (Z - uX)^{m-k}$. Podprzestrzeń przestrzeni $\odot^m L_*$ rozpięta przez e_k, e_{k+1}, \dots, e_m jest więc zbiorem wielomianów podzielnych przez X^k .

(teraz napis \bar{t}^n jest skrótem $\underbrace{\bar{t} \odot \cdots \odot \bar{t}}_n$). Ponieważ przekształcenie p_*^\odot jest

liniowe, więc

$$\frac{d}{dt} P(\bar{t}) = \frac{d}{dt} p_*^\odot(\bar{t}^n) = p_*^\odot\left(\frac{d}{dt} \bar{t}^n\right) = p_*^\odot\left(n \bar{t}^{n-1} \frac{d}{dt} \bar{t}\right) = n p_*^\odot(\delta \odot \bar{t}^{n-1}),$$

gdzie $\delta = \frac{d\bar{t}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Przez indukcję, dla $k = 0, \dots, n$ mamy

$$\frac{d^k}{dt^k} P(\bar{t}) = \frac{n!}{(n-k)!} p_*^\odot(\delta^k \odot \bar{t}^{n-k}).$$

Mamy dowieść, że dla ustalonego \bar{u} oraz $m \leq n$ równania (1) są spełnione wtedy i tylko wtedy gdy równanie (2) jest spełnione przez wszystkie punkty $\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_m \in L$. W tym celu przedstawimy (1) w postaci tensorowej:

$$(\odot) \quad p_{1*}^\odot(e \odot \bar{u}^{n-m}) = p_{2*}^\odot(e \odot \bar{u}^{n-m}),$$

dla $e = e_k = \delta^k \odot \bar{u}^{n-k}$, $k = 0, \dots, m$ (czynniki $\frac{n!}{(n-k)!}$ po obu stronach upraszcza się).

Z drugiej strony, warunek (2) w postaci tensorowej ma postać równania (\odot) , które musi być spełnione dla każdego tensora $e = \bar{t}_1 \odot \cdots \odot \bar{t}_m$, tj. dla każdego iloczynu tensorowego m punktów w przestrzeni L .

Zbiór tensorów $e \in \odot^m L_*$ spełniających równanie (\odot) jest pewną podprzestrzenią liniową $S \subset \odot^m L_*$. Tensory e_0, \dots, e_m stanowią bazę przestrzeni $\odot^m L_*$, a więc (1) zachodzi wtedy gdy $S = \odot^m L_*$. Ale przestrzeń $\odot^m L_*$ ma też inne bazy, w tym bazę złożoną z tensorów prostych będących iloczynami punktów prostej L : $\{\bar{0}^m, \bar{0}^{m-1} \odot \bar{1}, \dots, \bar{1}^m\}$. \square

Zakończenie

Przedstawione w tym referacie spojrzenie na tensory dotyczy tylko jednego z wielu związanych z nimi zagadnień; w ogóle nie zajmowaliśmy się np. przekształceniami przestrzeni sprzężonych ani skutkami przedstawiania przekształceń wieloliniowych w różnych bazach. Niemniej, poruszony aspekt jest najbardziej podstawowym elementem definicji tensorów. Twierdzenie o ciągłości funkcji sklepanych stało się dla nas w ten sposób okazją do przyjrzenia się temu pojęciu, zrozumienia go, a także, w razie potrzeby, wytłumaczenia innym.

Na koniec spróbuję wyjaśnić, dlaczego tytuł referatu jest po angielsku.

Blossoming to po polsku rozkwitanie. Słowo to (wprowadzone do terminologii przez L. Ramshawa) wiąże się z ujawnieniem wewnętrznej struktury ukrytej w wielomianie jednej zmiennej i nie bardzo daje się spolszczyć, jeśli jednocześnie trzeba przełożyć słowo *blossom*, używane na określenie formy biegunowej („kwiatek”?). Poza tym w dramacie *Hamlet, prince of Denmark* znajduje się taki oto fragment:

*Thus was I, sleeping, by a brother's hand,
Of life, of crown, of queen, at once despatch'd:
Cut off even in the blossoms of my sin ...*

Nie wiem, czy William Shakespeare pisząc te słowa przewidział związki form biegunowych z krzywymi sklejanymi (a w szczególności z tzw. obcinaniem narożników, ang. *cutting corners*, bardzo ważną procedurą, o której tu nie było mowy z braku miejsca), ale wykluczyć tego nie mogę. W każdym razie usprawiedliwić domorosłego tłumaczenia Szekspira nie byłbym w stanie.

Literatura

- [1] Ramshaw L. *Blossoms are polar forms*, Digital Equipment Corp. technical report #34, 1989.
- [2] Farin G. *Curves and surfaces for Computer Aided Geometric Design*, Academic Press, 1993.
- [3] Kiciak P. *A simple look at polar forms*, Computer Aided Geometric Design, 2001, 18, p. 503-504.

W naszym modelu wielomianowym tensory $\bar{0}^m, \bar{0}^{m-1} \odot \bar{1}, \dots, \bar{1}^m$ są reprezentowane przez wielomiany $Z^m, Z^m(Z-X), \dots, (Z-X)^m$. Dowodzimy, że równości (1) i (2) są spełnione wtedy, gdy formy tensorowe p_{*1}^\odot i p_{*2}^\odot są identyczne w zbiorze wszystkich tensorów reprezentowanych przez wielomiany stopnia n podzielne przez $(Z-uX)^{n-m}$.