Przekroje i obrazki

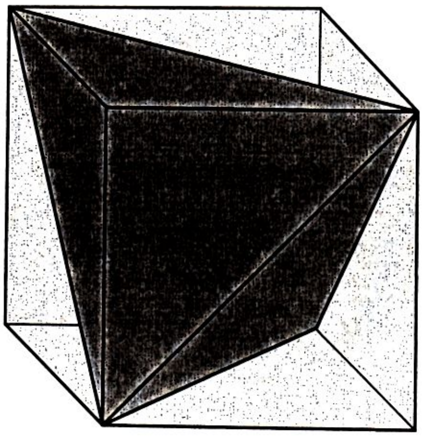
Krzysztof BIAŁKOWSKI, Warszawa,
Zdzisław POGODA, Kraków

Wielościany z jednej strony należą do najprostszych obiektów, z drugiej jednak stanowią wdzięczny obiekt badań i mogą być kopalnią wielu ciekawych problemów, których rozwiązanie można także przewidywać wykorzystując komputer.

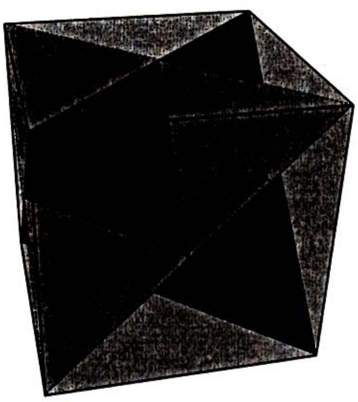
Bardzo efektownym zagadnieniem jest problem przekrojów wielościanów, a także problem części wspólnych kompozycji wielościennych.

Istnieje wiele programów graficznych pozwalających na konstruowanie prostych przekrojów. Za ich pomocą można przewidywać końcowy rezultat, szczególnie gdy przecina się kilka obiektów, a intuicja w takich sytuacjach najczęściej zawodzi.

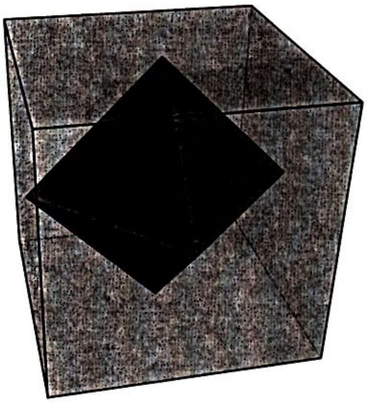
Zacznijmy od prostego i znanego przykładu. W sześcian można wpisać czworościan foremny w ten sposób, żeby jego krawędzie były przekątnymi ścian sześcianu

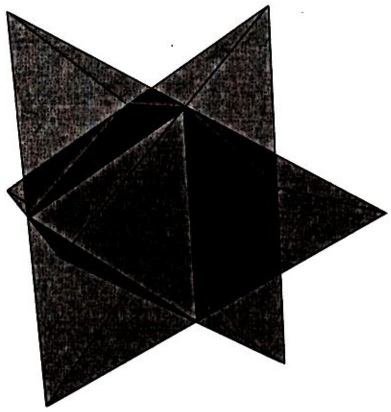


Można tak postąpić na dwa sposoby, czyli w sześcianie można umieścić dwa czworościany foremne. Każdy z wierzchołków sześcianu jest również wierzchołkiem jednego z czworościanów. Otrzymany układ czworościanów nazywany jest gwiazdą ośmioramienną (stella octangula).



Jak wygląda część wspólna obu czworościanów? Nietrudno sprawdzamy, że będzie to ośmiościan foremny.



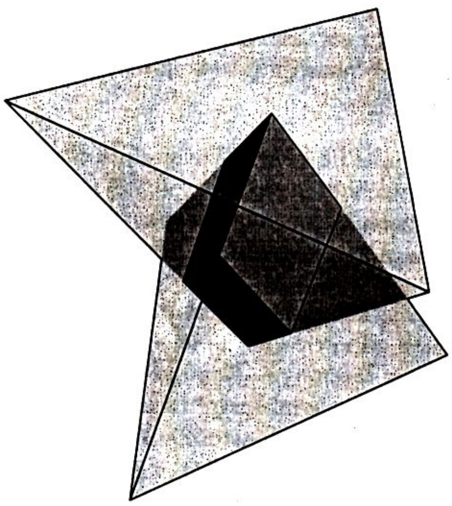


Zauważmy, że stella octangula ma środek symetrii, który jest umieszczony na odpowiednich wysokościach czworościanów w jednej trzeciej licząc od podstawy.

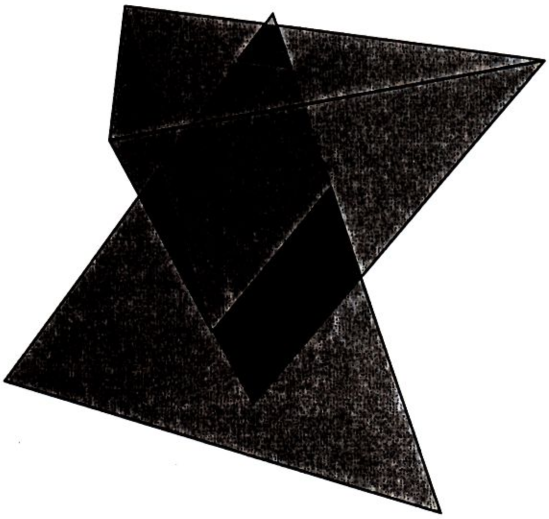
Nasuwa się pomysł zadania:

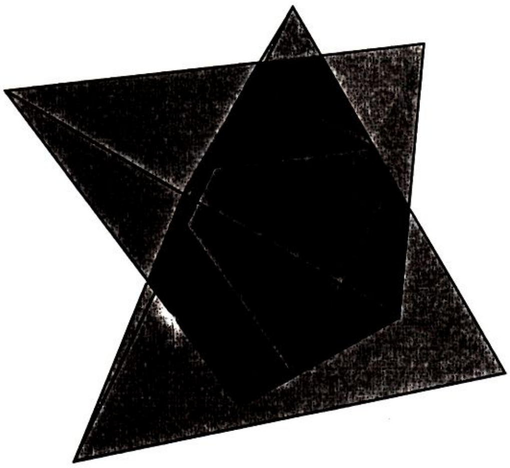
Wybierzmy na wysokości w czworościanie foremnym jej środek, odbijmy czworościan środkowo symetrycznie względem tego punktu. Jak wygląda część wspólna wyjściowego czworościanu i jego obrazu w opisanej symetrii środkowej?

Analizując własności symetrii środkowej nietrudno odgadniemy rozwiązanie.



A co będzie, gdy środek symetrii wybierzemy tak, by dzielił wysokość w stosunku 2 : 1 i 4 : 1 licząc od wierzchołka? Jest to już pewien problem dla naszej intuicji.

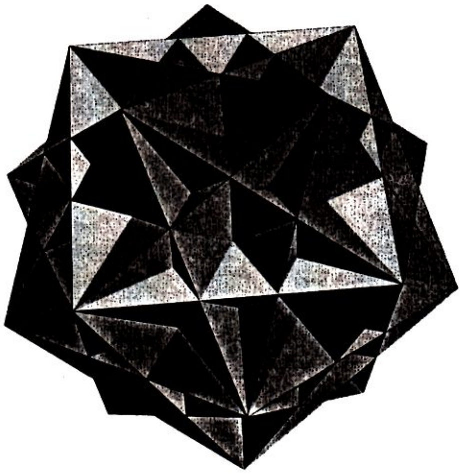




Stella octangula jest najprostszym przypadkiem kompozycji wielościennej zbudowanej z wielościanów foremnych. Żeby ograniczyć liczbę takich kompozycji zazwyczaj zakłada się, że składają się one z wielościanów foremnych jednakowego typu oraz wierzchołki kompozycji są wierzchołkami pewnego wielościanu foremnego, względnie ściany składowych są przedłużeniami ścian również wielościanu foremnego. Dla naszych potrzeb nazwijmy te kompozycje **foremnymi**.

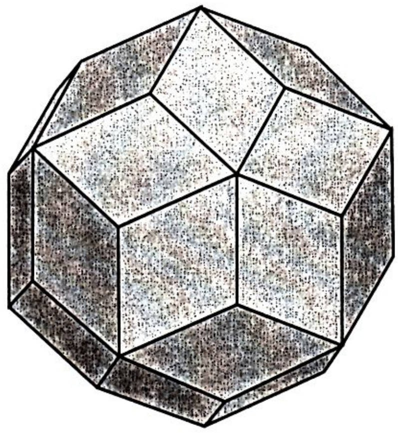
Gwiazda ośmioramienna oczywiście spełnia oba te warunki – jej wierzchołki są wierzchołkami sześcianu, a ściany wyznaczone są przez ośmiościan foremny będący częścią wspólną czworościanów.

Bardziej niezwykłą kompozycją jest układ pięciu sześcianów odpowiednio umieszczonych w dwunastościanie foremnym. Krawędzie każdego z sześcianów są przekątnymi ścian dwunastościanu. W każdym wierzchołku dwunastościanu schodzą się dwa sześciany, gdyż w każdym wierzchołku pięciokąta mamy dwie przekątne.

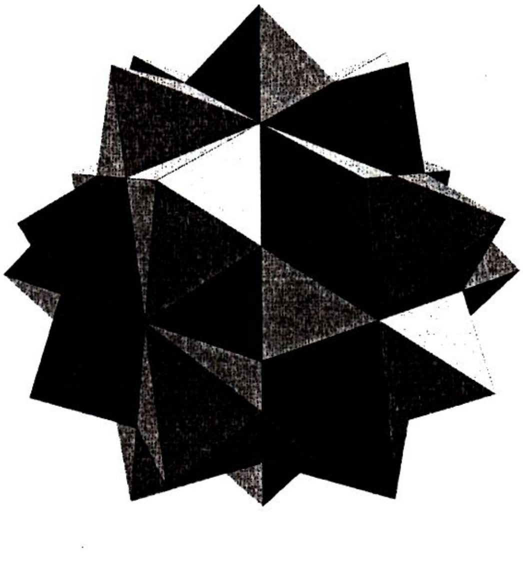


Jak wygląda część wspólna tych pięciu sześcianów? Niewątpliwie będzie to figura wypukła i, ponieważ pięć sześcianów ma trzydzieści ścian, to poszukiwany obiekt powinien mieć również trzydzieści ścian. Wszystkie ściany będą przystające ze względu na symetrię kompozycji. Odrobiny wysiłku wymaga stwierdzenie, iż będą to romby.

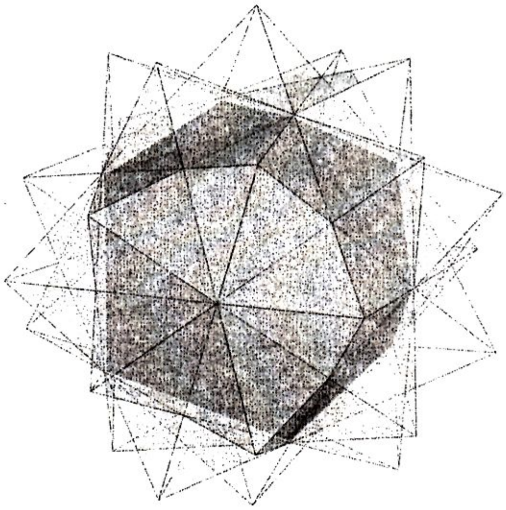
Dostajemy w ten sposób trzydziestościan rombowy.



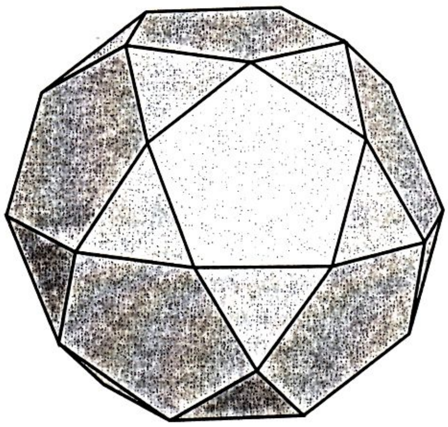
Wiemy, że z każdym z sześcianów możemy związać ośmiościan foremny (jak przy konstrukcji gwiazdy ośmioramiennej). Tak więc kompozycja pięciu sześcianów generuje kompozycję pięciu ośmiościanów.



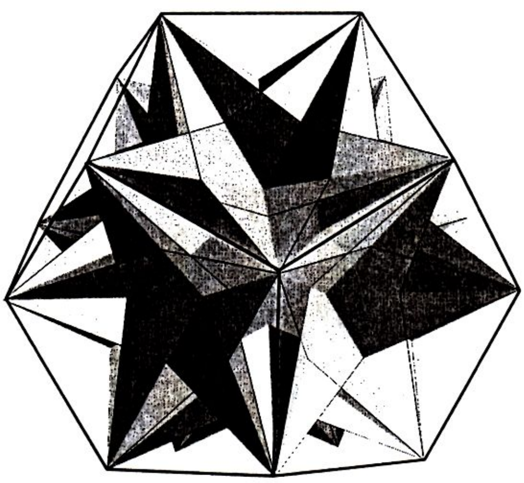
Co jest ich częścią wspólną? Czyżby jakiś czterdziestościan? Jednak nie! Przecięcie pięciu ośmiościanów daje dwudziestościan foremny; jedna ściana dwudziestościanu jest wspólna dla dwóch ścian dwóch ośmiościanów.



Wierzchołki kompozycji ośmiościanów wyznaczają dwudziesto-dwunastościan – jeden z wielościanów archimedesowych.

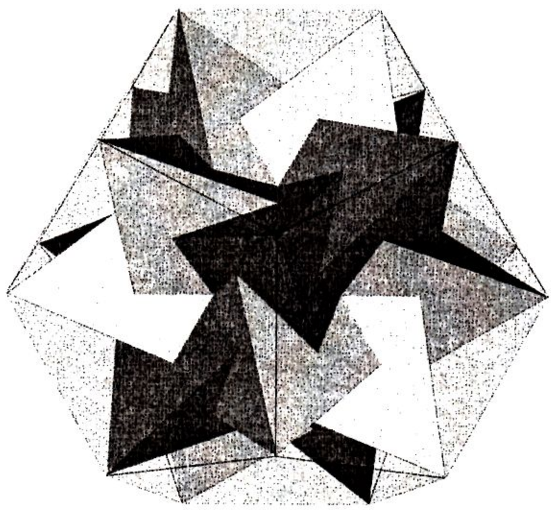


A gdyby tak w pięciu sześcianach umieścić pięć gwiazd ośmioramiennych? Jest to kompozycja dziesięciu czworościanów i choć figura jest skomplikowana



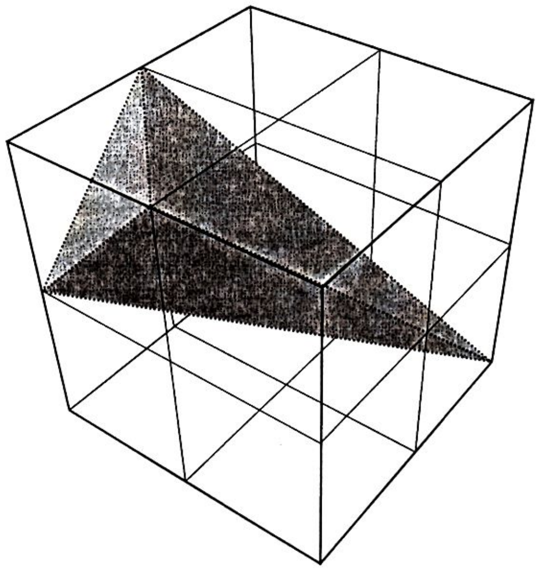
bez trudu zauważamy, że jej wierzchołki są wierzchołkami dwunastościanu foremnego, a część wspólna jest dwudziestościanem foremnym.

Podobnie będzie, gdy z każdej z pięciu gwiazd usuniemy po jednym czworościanie. Mamy wtedy kompozycję pięciu czworościanów. Ciekawe, że są dwie lustrzane wersje takich kompozycji.



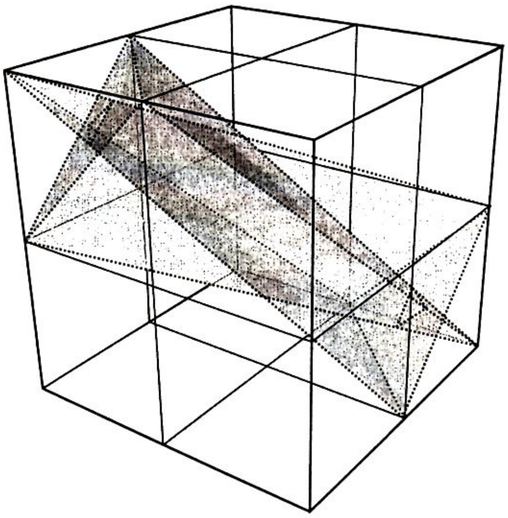
Dowodzi się, że więcej kompozycji foremnych nie ma.

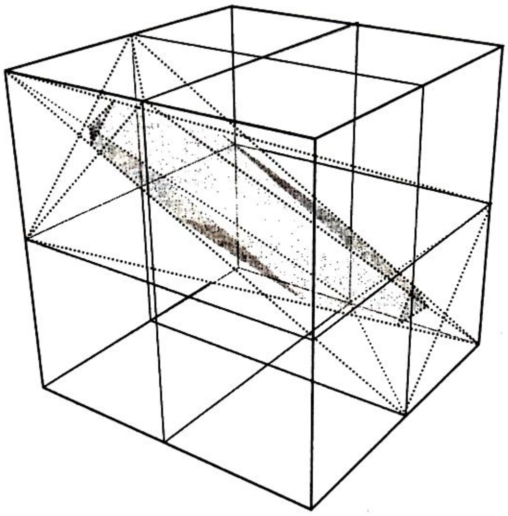
Przyjrzyjmy się teraz trochę innemu problemowi. W sześcianie wybierzmy jeden z wierzchołków i na krawędziach schodzących się w wierzchołku przeciwległym wybierzmy środki.



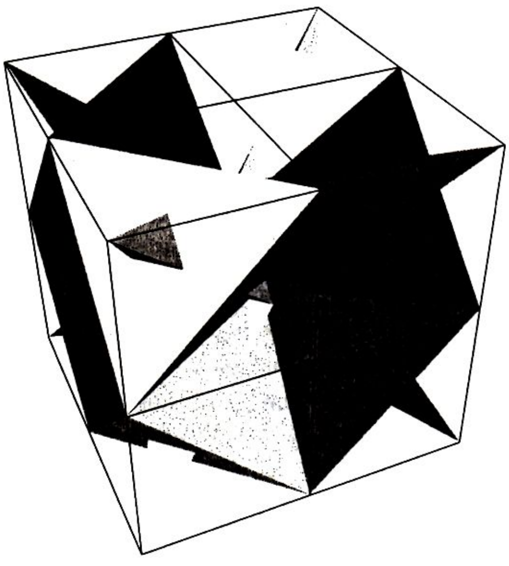
Cztery tak wyróżnione punkty są wierzchołkami czworościanu, już nieforemnego. Wykonajmy tę konstrukcję w każdym wierzchołku sześcianu. Dostaniemy układ ośmiu jednakowych czworościanów. Jak wygląda ich część wspólna? Tu intuicja jest już bezradna. Nawet analiza poszczególnych etapów nie sugeruje wyniku końcowego.

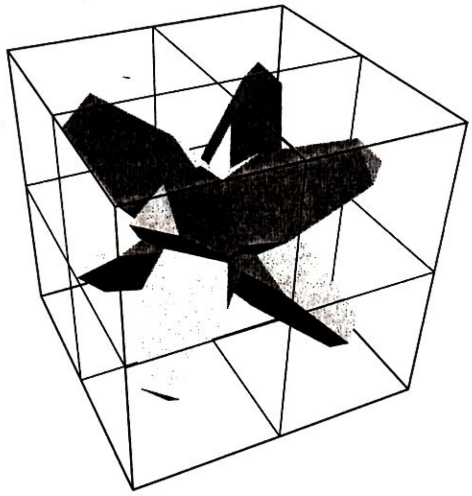
Przecięcie dwóch przeciwległych czworościanów jest ośmiościanem o ścianach trójkątnych i pięciokątnych.

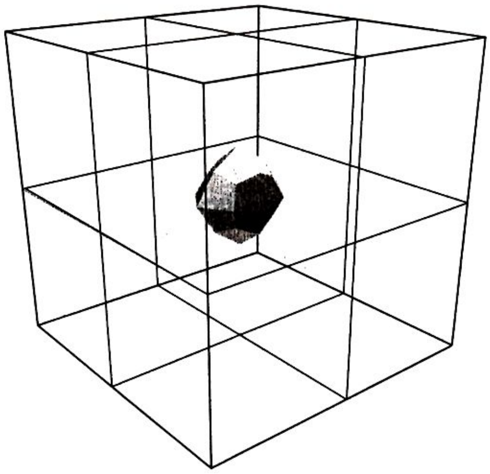




Z tej konstrukcji wynika jednak, że poszukiwany obiekt nie będzie miał 32 ścian, lecz 24, i wszystkie będą przystające. Graficzna analiza przekrojów prowadzi do dwudziestoczterościanu, którego ścianami są deltoidy.

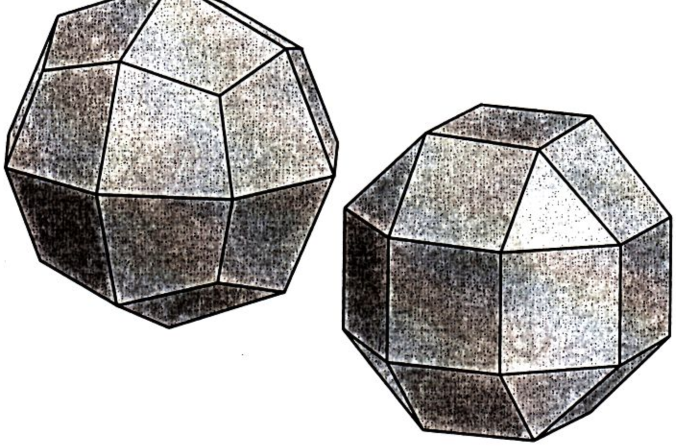






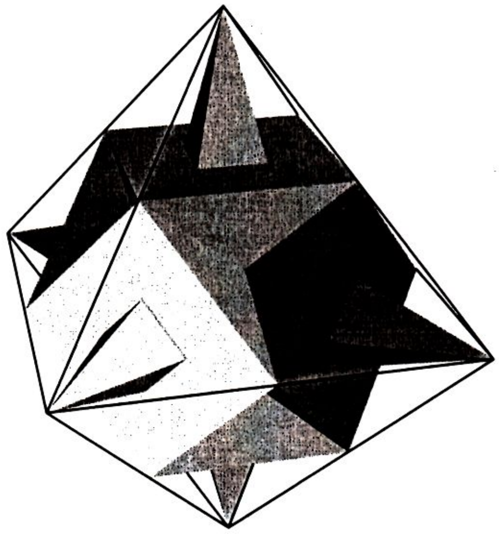
Jest to jeden z wielościanów dualnych do wielościanów archimedesowych nazywanych też wielościanami Catalana. Charakteryzują się one tym, że mają wszystkie ściany przystające niekoniecznie foremne. Powstają przez łączenie środków sąsiednich ścian wielościanów archimedesowych. Można je też otrzymać prowadząc odpowiednie proste prostopadłe przez środki krawędzi wielościanów archimedesowych.

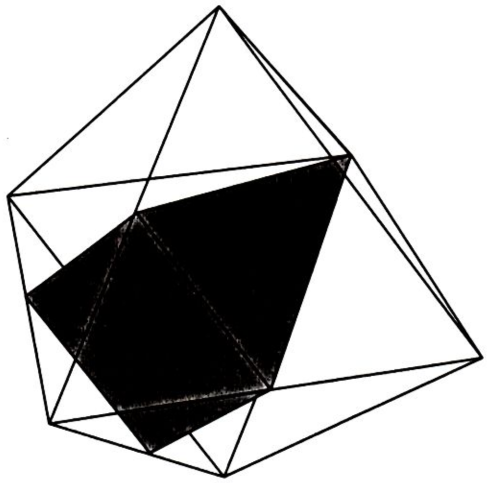
Otrzymany w wyniku graficznej analizy wielościan jest nazywany czasem w literaturze (Cundy, Rollet, *Modele matematyczne*, PWN, 1967) dwudziesto-czworościanem trapezowym. Jest to wielościan dualny do sześcio-ośmiościanu rombowego.

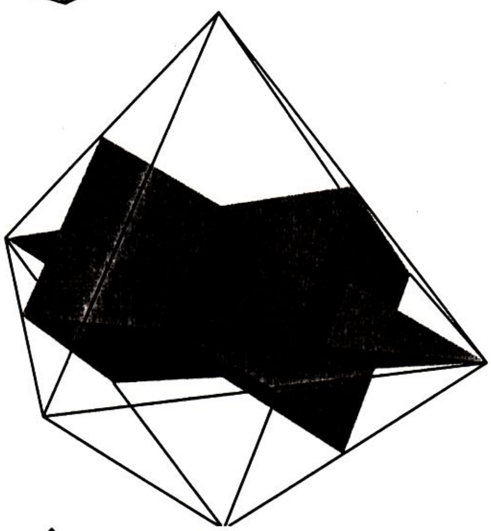


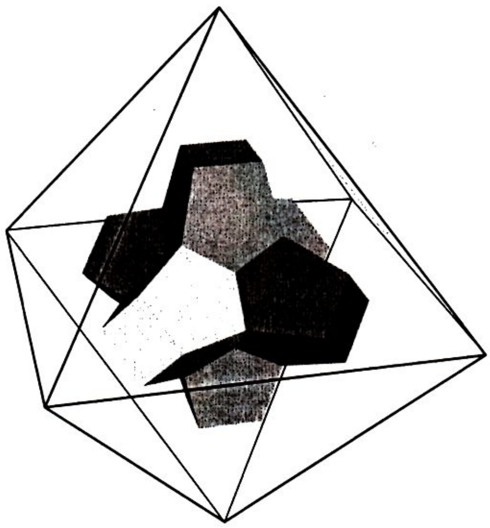
Podobne konstrukcje możemy wykonać dla innych wielościanów foremnych. Przez analogię do kompozycji foremnych nazwijmy je kompozycjami regularnymi.

Dla ośmiościanu foremnego kompozycja regularna składa się z sześciu ostrosłupów o podstawie kwadratowej. Pytanie o część wspólną składników tej kompozycji też nie jest takie banalne. Mamy już pewne doświadczenie i możemy się spodziewać wielościanu o ścianach jednakowych. Jest to znów dwudziestoczteroscian, tym razem o ścianach trójkątnych.

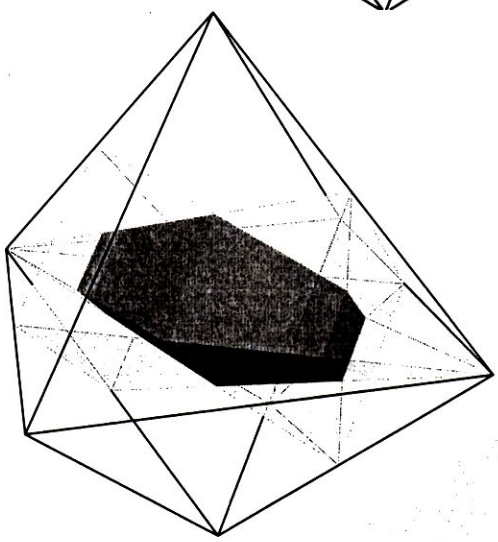


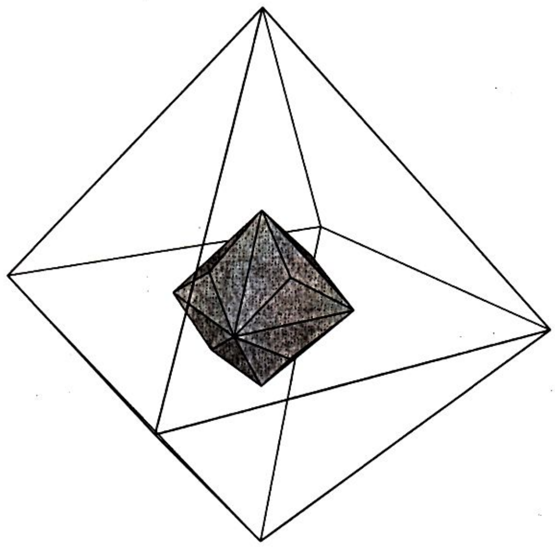






Jak poprzednio, powstały obiekt należy do rodziny wielościanów Catalana i jest wielościanem dualnym do sześcianu ściętego.



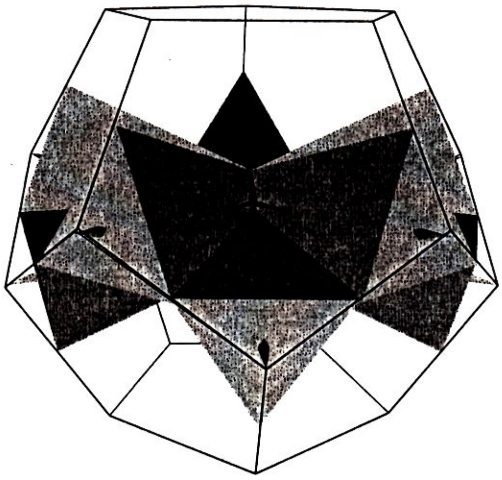


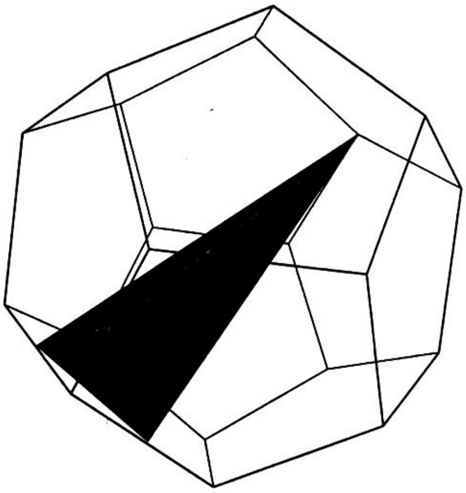
W literaturze można spotkać nazwę ośmiościan potrójny; na ścianach ośmiościanu foremnego umieszczono spłaszczone ostrosłupy.

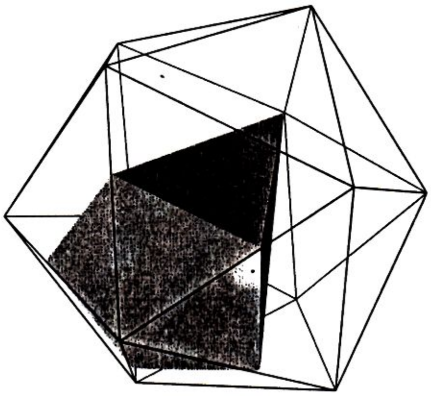
Mamy zatem hipotezę:

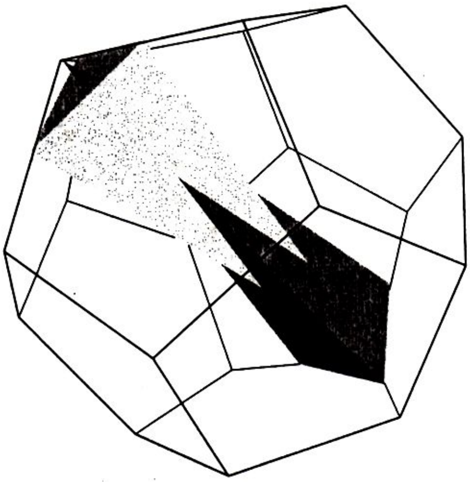
część wspólna składowych kompozycji regularnej jest wielościanem Catalana.

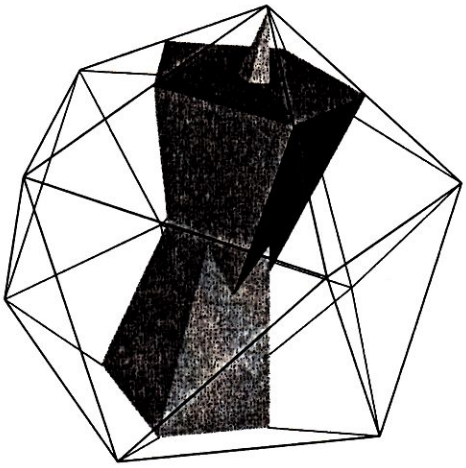
Do zbadania zostały praktycznie jeszcze dwa przypadki: kompozycja związana z dwunastościanem i dwudziestościanem foremnym. W pierwszym przypadku mamy kompozycję dwudziestu czworościanów, w drugim dwunastu ostrosłupów pięciokatnych.

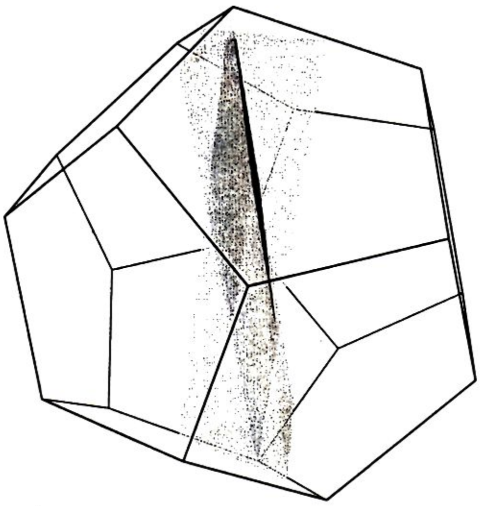


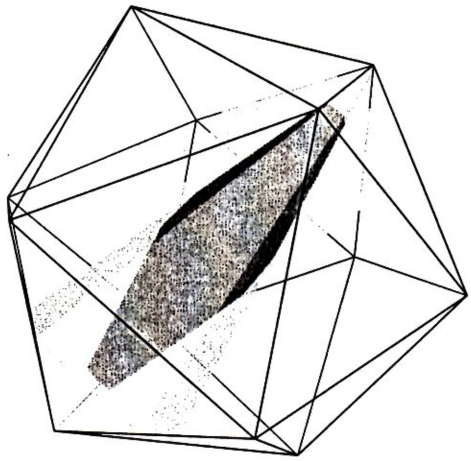


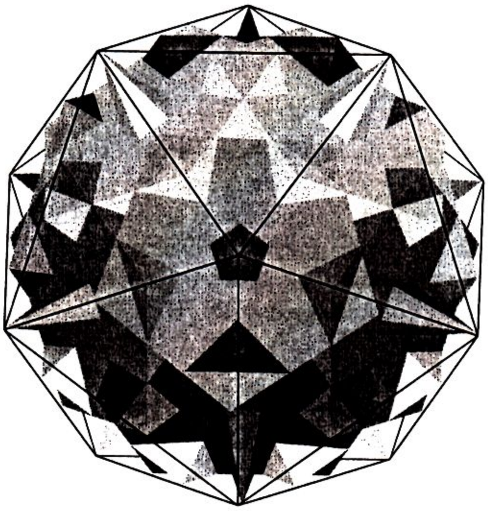


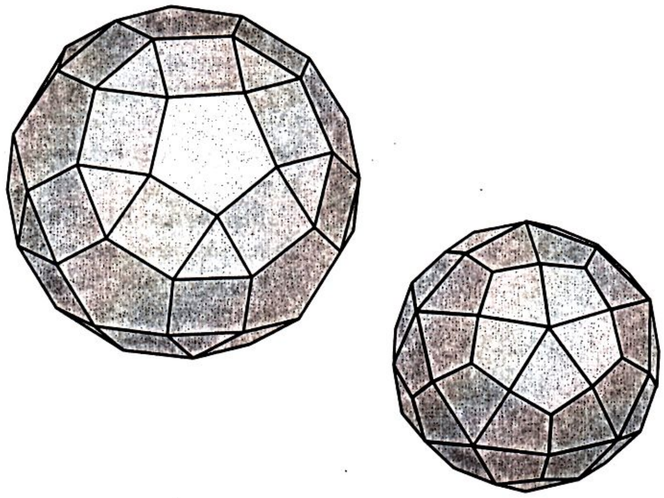




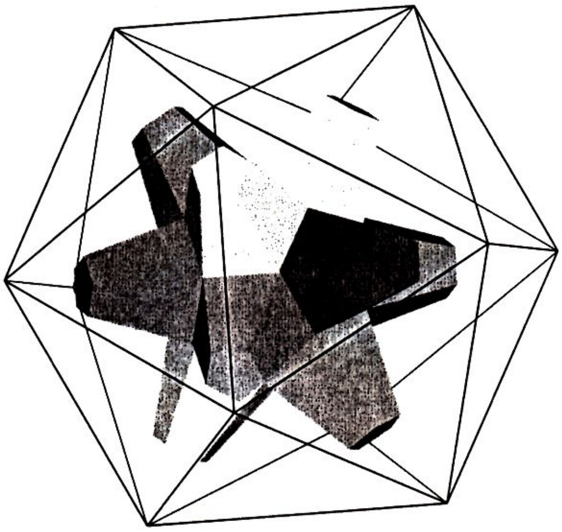


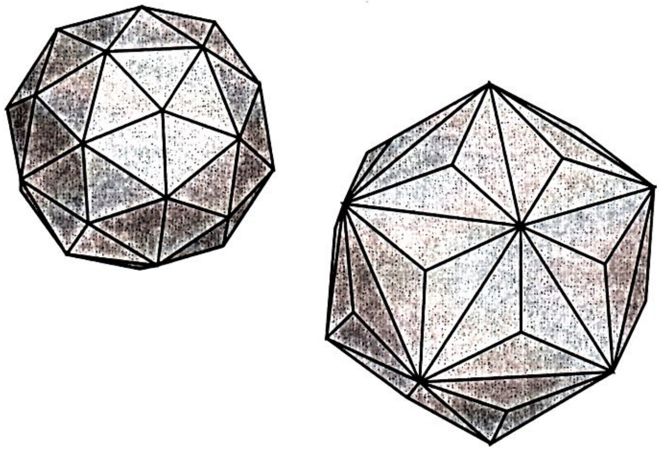






oraz dwudziestościan potrójny, dualny do dwunastościanu ścietego (dwudziestościan potrójny).





Analiza graficzna przekrojów pokazuje, że powstają odpowiednio: sześćdziesięciościan o ścianach deltoidalnych, dualny do dwudziesto-dwunastościanu rombowego małego (sześćdziestościan trapezowy),

Podobne problemy możemy postawić dla kompozycji w wielościanach archimedesowych, wielościanach Catalana, czy też dla innych rodzin wielościanów. Można je rozwiązywać metodami tradycyjnymi, jednak analiza graficzna pozwala na szybkie postawienie hipotezy, której weryfikacja staje się już praktycznie tylko formalnością.