Chwalebne ćwierćwiecze reliktów

Marek KORDOS, Warszawa

Poddawana w ostatnich latach najrozmaitszym reformom nasza ojczysta oświata zmienia się. Zmiany te nie mają jednak większego związku z ich deklarowanymi celami. Nie będę wymieniał tych (rozmaitych zresztą) deklaracji. Nie wzbudzi jednak chyba większych wątpliwości stwierdzenie, że podstawowym realnym celem funkcjonowania szkół jest gromadzenie zaświadczeń. Posunęliśmy się na tej drodze bardzo daleko i dziś zaświadczenia są upragnionym celem już nie tylko uczniów, lecz także nauczycieli.

Uczniowie przygotowywani są jedynie do wypełniania przesyłanych im przez Centralną Komisję Egzaminacyjną prymitywnych sprawdzianów. Sprawdziany te zresztą mają decydować o dalszym życiu młodego człowieka, bo obiecuje się nawet, że za okazaniem takiego zaświadczenia można będzie zostać studentem państwowej uczelni, co jest darowizną równoważną w złotówkach wysokiej klasy samochodowi. A w dniu, w którym to piszę (15 czerwca) Polskie Radio ogłosiło, iż okazało się, że w jednym województwie „niektóre" sprawdziany zostały źle sprawdzone – mamy więc złych niezawisłych egzaminatorów.
A same sprawdziany też są, delikatnie mówiąc, wadliwe – mnie najbardziej zaimponowało zadanie 43 ze sprawdzianu dla III klasy gimnazjum GIM3-M-1 ze stycznia 2002: uczeń miał wybrać prawdziwą odpowiedź na pytanie, *na ile sposobów można trapez równoramienny podzielić na dwie części o równych polach*, spośród możliwości 1, 2, 3, 4. Dużo można mi mówić o zaletach tego systemu, ale (chyba nie tylko zresztą ja) nie dam się do niego przekonać. Tylko, że o mnie mniejsza – ale co z młodzieżą? W tym miejscu dyskusja np. o tym, czy ma być czy nie być powszechna matura z matematyki, jest absurdalnym futuryzmem.

Tymczasem nauczyciele zajmują się pogonią za papierkami, które mają im pomóc w pozostaniu w zawodzie. Nauczyciele obecni na odczycie po jego zakończeniu proszą o zaświadczenie, że na nim byli. *Delta* i *Matematyka* wydają kwity, że czyjaś notka została zamieszczona, albo, że tylko wpłynęła. Urządza się *święta nauki*, by dostać zaświadczenie, że jest się aktywnym. I to wszystko zbierają władze oświatowe i ferują wyroki. Nie ma tu miejsca na jakiekolwiek zajęcie się kształceniem uczniów, którzy zresztą mają przecież być przygotowani do sprawdzianów.

Jeden z moich kolegów mówi, że – niezależnie od tego jaki będzie nasz system edukacyjny – ważne jest tylko, aby kraje zachodu uznały go za kompatybilny z ich systemem. Ja jednak podejrzewam, że powyższe zdanie zawiera sądy sprzeczne – chyba, że przeceniam edukację zachodu.

Są też tacy, którzy nadzieję, że stanie się cud i coś się poprawi, pokładają w MENiSie naszej koleżanki, Krystyny Łybackiej – serdecznie Jej życzę, aby mieli rację.

Samoobrona (straszne, ale tak się to nazywa) społeczna wie, że od szkoły niczego, poza ewentualnie korzystnym zaświadczeniem dla dziecka, oczekiwać nie można. I stosuje swoje, społecznie i ekonomicznie słuszne, środki zaradcze – należy poza szkołą nauczyć dziecko angielskiego i windowsów, a będzie miało szanse, by nie należeć do bezrobotnej 1/5.

To faktycznie pomaga. Ale ograniczenie realnie skutecznej edukacji do tych dwóch umiejętności, zdobywanych przeważnie poza szkołą, powoduje tak potworną degradację intelektualną, że strach bierze myśleć o przyszłym statusie Polaków.

Ale przecież miało być o jubileuszu. Otóż właśnie obchodzą ćwierćwiecze dwa przedsięwzięcia, które za cel postawiły sobie wspieranie matematycznej czołówki młodzieży licealnej. Oczywiście, rolę taką pełni Olimpiada, ale powszechnie wiadomo, że olimpijski fighter to nie jedyny typ intelektualny młodego miłośnika matematyki. Można pomyśleć o zdolności do przedstawienia samodzielnej pracy wykonanej w ciągu wielu tygodni i w kontakcie z kilkoma co najmniej książkami.

Oba przedsięwzięcia wzięły sobie za cel odnalezienie i promocję właśnie tych drugich. Te przedsięwzięcia to *Ogólnopolskie Sejmiki Matematyków* organizowane przez Pałac Młodzieży w Katowicach i Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego i coroczny *Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki* organizowany przez Zarząd Główny Polskiego Towarzystwa Matematycznego i redakcję *Delty*. Warto się im przyjrzeć.

W roku 2001 Jury zaproponowało 8 tematów:

Zastosowania twierdzenia Cevy
Funkcja Π
Konstruowalność figur na płaszczyźnie przy użyciu cyrkla i linijki
Funkcje tworzące i rekurencja
Ciągi rekurencyjne
Zastosowania ułamków łańcuchowych
Współczynniki dwumianowe
Rozkładalność wielomianów o współczynnikach całkowitych.

Bibliografia liczyła łącznie 19 pozycji.

Z około 200 prac zakwalifikowano do finału 16, trzech z finalistów dostało indeksy, wśród nagród rzeczowych były rowery.

Ogólnopolski Sejmik Matematyków to urządzany z początku sporadycznie, a obecnie corocznie, konkurs prac uczniowskich, polegających na opracowaniu jednego z zaproponowanych przez Jury tematów. Jury do każdego tematu dołącza co najmniej dwie pozycje bibliograficzne, w których można znaleźć informacje na dany temat. Oczywiście można też przysyłać prace na tematy spoza listy i Jury je także oceni.

Jury ogłasza tematy we wrześniu (i rozsyła je do wszystkich szkół ponadgimnazjalnych).

Udział w eliminacjach należy zgłosić do końca listopada, a pracę nadesłać do końca pierwszego semestru. W *Sejmiku* biorą udział wyłonieni przez Jury finaliści, ich nauczyciele matematyki, członkowie Jury, goście i organizatorzy – razem ponad 60 osób. *Sejmik* to wyjazdowe, trzydniowe święto matematyki, którego istotną częścią są dziesięciominutowe wystąpienia finalistów. Wyniki to nie tylko werdykt Jury, ale także wynik oddzielnego głosowania finalistów i odzielnego nauczycieli. Nagrody główne dla laureatów wybranych przez Jury to wstęp bez egzaminu na studia matematyczne w Uniwersytecie Śląskim. Ale są i nagrody rzeczowe fundowane przez sponsorów.

Miana reliktu dla tego pięknego i masowego przedsięwzięcia użyłem z tego względu, że jest to impreza organizowana przez Pałac Młodzieży, które to placówki uległy w ostatnich latach niemal totalnej degeneracji. Tymczasem w Katowicach działa nawet w Pałacu Pracownia Matematyki, zatrudniająca dwie osoby i prowadząca imprezy, w których rocznie uczestniczy ponad 3500 osób. A sam sejmik wspiera (nie tylko duchem) Urząd Marszałkowski i Kuratorium Śląskie. W 2002 roku do sponsorów dołączył Real w Czeladzi. To jest to, czego – jak pesymistycznie podejrzewałem – już nie ma: społeczność dbająca o swoje młode pokolenie, jako o całość.

Drugi relikt to *Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki.* Impreza bardzo elitarna, bo wymagająca od uczestników samodzielnego opracowania jakiegoś tematu i wykluczająca prace kompilacyjne. Nadsyłane prace są oceniane przez recenzentów danej specjalności i kilka z nich (średnio 5, ale było i tak, że 1) jest kwalifikowanych do finału, który polega na wygłoszeniu 15 minutowego referatu na Sesji Naukowej Walnego Zgromadzenia Polskiego Towarzystwa Matematycznego oraz obronieniu swojej pracy w dyskusji. *Konkurs* rozpoczął się w 1978 roku w Poznaniu i odbywał się corocznie, z wyjątkiem kompletnie chaotycznego roku 1990.

Ten konkurs jest reliktowy głównie w tym sensie, że nie ma w nim materialnej nagrody (jeśli nie liczyć nagród MENiSa w wysokości około 400 złotych) – nagrodą dla finalistów jest występ przed tak dostojnym audytorium, a dla zwycięzców medale w kolorze złotym, srebrnym lub brązowym (nie zawsze przyznaje się wszystkie, może być też kilka takich samych). W dzisiejszych czasach jest to zjawisko endemiczne – taka wiara w bezinteresowną ambicję młodzieży jest dziś uważana za chorobliwą.

Ale, o dziwo, są chętni. I są wspaniali zwycięzcy. Trzykrotnie laureaci złotego medalu zostali z rekomendacji *Konkursu* reprezentantami Polski w *Konkursie Prac Młodych Naukowców* organizowanym przez Komisję Europejską (do którego trzyosobowa reprezentacja Polski jest dopuszczona od 1995 roku) i za każdym razem wrócili z nagrodą: raz z drugą, raz z trzecią, a raz z wyróżnieniem – oczywiście tam nagrody są bardzo wysokie. Jest to tym bardziej godne uwagi, że konkurs dotyczy wszystkich dyscyplin nauk ścisłych i przyrodniczych, i że wszystkie nagrody matematyczne od początku (1989) to nagrody Polaków.

W tym miejscu można by mnie zapytać – po co ten kasandryczny początek? Odpowiedź jest prosta: takie relikty powszechnego nauczania, jak te dwa konkursy, nie pasują do tego, co się dzieje, więc trzeba być czujnym, aby nie zaginęły, bo nie wolno zmarnować pereł, jakie rzucane są przed wieprze reformatorów naszej edukacji. A więc koniecznie popierajcie Jubilatów!
A obok jedna z prac w dwadzieścia lat później.

O pewnym problemie z elementarnej teorii liczb

Mariusz SKAŁBA, IV LO w Krośnie

(streszczenie pracy nagrodzonej złotym medalem
na Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki w 1982 roku,
napisane w tymże roku przez Autora;
praca została napisana pod opieką mgr Lucyny Rędziak)

Do napisania niniejszej pracy zainspirowała mnie lektura książki W. Sierpińskiego *Teoria liczb*, cz. II. Znajduje się w niej dowód Andrzeja Schinzla, że 7 jest jedyną liczbą pierwszą spełniającą przy naturalnych x, y równanie

$$p = \frac{2x^2 - 1}{7} = 2y^2 - 1. \tag{1}$$

Znalazłem inny dowód tego twierdzenia. Oto jego szkic.

Z (1) wynika, że

$$\begin{cases} 7p + 1 = 2x^2, \\ p + 1 = 2y^2, \end{cases}$$

skąd po wymnożeniu stronami i oznaczeniu $2xy = k$ otrzymujemy:

$$p(7p + 8) = (k + 1)(k - 1). \tag{2}$$

Ponieważ p jest liczbą pierwszą, więc $p|k + 1$ lub $p|k - 1$. Rozpatrzmy zatem dwa przypadki.

Niech $p|k + 1$. Wtedy $k + 1 = lp$ i $k - 1 = lp - 2$, gdzie $l \in N$. Jeżeli podstawimy te wartości do równania (2) i rozwiążemy je względem p, to dostaniemy

$$p = \frac{8 + 2l}{l^2 - 7}.$$

Nie może być $l = 1$ ani $l = 2$, gdyż byłoby wtedy $p < 0$. Dla $l = 3$ wzór powyższy daje $p = 7$. Sprawdzamy natychmiast, że trójka liczb $p = 7$, $x = 5$, $y = 2$ spełnia (1).
Nie może być wreszcie $l \geq 4$, gdyż wtedy

$$l(l - 1) > 11 \iff \frac{8 + 2l}{l^2 - 7} < 2,$$

gdy tymczasem dla każdej liczby pierwszej p jest $p \geq 2$. Rozważając analogicznie przypadek $p|k - 1$ stwierdzamy, że nie ma innych liczb spełniających (1).

Z analizy tego dowodu wynikła możliwość uogólnienia powyższego wyniku.

Twierdzenie 1
Niech dla $i = 1, 2$, $f_i(x)$ będzie trójmianem kwadratowym o współczynnikach wymiernych, Δ_i – jego wyróżnikiem, a A_i – współczynnikiem przy x^2. Jeżeli $\Delta_1\Delta_2$ jest kwadratem liczby wymiernej oraz $A_1\Delta_2 - A_2\Delta_1 \neq 0$, to istnieje co najwyżej skończenie wiele takich liczb pierwszych, że

$$p = f_1(x) = f_2(y), \textit{ gdzie } x,\ y \textit{ są całkowite.}$$

Z dowodu twierdzenia 1 wynika ponadto efektywna metoda znajdowania wszystkich takich liczb pierwszych w konkretnych przypadkach.

Przykład. Niech m będzie liczbą naturalną oraz

$$f_1(x) = \frac{x^2}{m^2 + 1}, \quad f_2(y) = y^2 + 1.$$

Ponieważ spełnione są założenia twierdzenia 1, więc istnieje co najwyżej skończenie wiele takich liczb pierwszych p, że

$$p = \frac{x^2 + m^2}{m^2 + 1} = y^2 + 1, \quad \text{gdzie } x,\ y \in N. \tag{3}$$

równanie (3) ma natomiast nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach naturalnych p, x, y, gdyż sprowadza się do równania Pella:

$$x^2 - (m^2 + 1)y^2 = 1.$$

Korzystając ze wspomnianej efektywnej metody można w tym konkretnym przypadku udowodnić twierdzenie o wiele bardziej precyzyjne, a mianowicie:

jeżeli liczby naturalne p, x, y spełniają (3) oraz p jest liczbą pierwszą, to

$$p = 4m^2 + 1, \quad x = 2m^2 + 1, \quad y = 2m.$$

Twierdzenie 2 (uzupełniające)
Jeżeli wyróżnik trójmianu kwadratowego $f(x)$ o współczynnikach wymiernych jest kwadratem liczby wymiernej, to istnieje co najwyżej skończenie wiele takich liczb pierwszych, że

$$p = f(x), \textit{ gdzie } x \textit{ jest całkowita.}$$

Analiza założeń twierdzenia 1 i intuicja skłoniły mnie do wysunięcia następujących przypuszczeń.

Przypuszczenie 1
Jeżeli żadna z liczb Δ_1, Δ_2, $\Delta_1\Delta_2$ nie jest kwadratem liczby wymiernej i spełnione są warunki:

1) *równanie $n = f_1(x) = f_2(y)$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych n, x, y,*
2) *nie ma takiej liczby naturalnej $m > 1$, że dla każdej trójki liczb całkowitych n, x, y spełniającej równanie $n = f_1(x) = f_2(y)$ jest $m|n$,*

to istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych p takich, że

$$p = |f_1(x)| = |f_2(y)|, \textit{ gdzie } x,\ y \textit{ całkowite.}$$

Przypuszczenie 2
Jeżeli żadna z liczb Δ_1, Δ_2 nie jest kwadratem liczby wymiernej, $\Delta_1\Delta_2$ jest takim kwadratem oraz $A_1\Delta_2 - A_2\Delta_1 = 0$ i spełnione są warunki 1) i 2), to zachodzi teza przypuszczenia 1.

Już gdy napisałem swoją pracę, profesor Andrzej Schinzel podał mi kontrprzykład obalający przypuszczenie 1.

Natomiast przypuszczenie 2 jest prawdopodobnie prawdziwe, gdyż wynika z następującej znanej hipotezy:

jeżeli $f(x)$ jest nierozkładalnym trójmianem kwadratowym o współczynnikach całkowitych i nie ma stałego czynnika większego od 1, to istnieje nieskończenie wiele takich liczb pierwszych p, że

$$p = |f(x)|, \textit{ gdzie } x \textit{ jest całkowite.}$$