Geometria kwadryki Q_n – ujęcie historyczne

Michał SZUREK, Warszawa

1. Co to jest kwadryka?

Kwadryką Q_n będzie dla nas zbiór algebraiczny wymiaru n i stopnia 2, określony równaniem

$$\sum_{i,j=0}^{n+1} q_{ij} X_i X_j = 0, \qquad \text{gdzie } q_{ij} = q_{ji}$$

w przestrzeni rzutowej $\mathbf{P}^{n+1}$ (nad ciałem liczb zespolonych $\mathbf{C}$). Interesuje nas w zasadzie kwadryka nieosobliwa (gładka). Warunkiem koniecznym i dostatecznym gładkości Q_n jest nieosobliwość macierzy $[q_{ij}]$; równoważnie: określająca kwadrykę forma kwadratowa ma sygnaturę $n+1$. Nad ciałem liczb zespolonych każda kwadryka jest rzutowo równoważna ze zbiorem postaci $\sum_{i=0}^{r} x_i^2 = 0$, gdzie $1 \leq r \leq n+1$. Dla $r = 1$ kwadryka jest sumą dwóch hiperpłaszczyzn, $r = n+1$ odpowiada kwadryce gładkiej. W geometrii algebraicznej rozpatruje się też tzw. rozmaitości niezredukowane: również dla $r = 0$ otrzymalibyśmy kwadrykę o równaniu $x_0^2 = 0$, czy tzw. podwójną hiperpłaszczyznę. Jako zbiór jest ona tym samym, co „pojedyncza" hiperpłaszczyzna, ale ma bardziej skomplikowaną strukturę algebraiczną: są na niej funkcje wymierne różne od zera, których kwadrat jest równy zero.

Kwadryka rzędu $n+1$ (gładka) ma nieskomplikowaną, ale interesującą geometrię. Zbadał ją dokładnie 20-letni wówczas Corrado Segre, w swojej pracy dyplomowej, obronionej na Uniwersytecie w Turynie 29 maja 1883 r. Artykuł niniejszy poświęcony jest omówieniu tej pracy, ukazaniu jej na tle badań z tamtego okresu, a także krótkiej jej analizie z dzisiejszego, już XXI-wiecznego punktu widzenia.

Segre, C., *Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni.* Mem. Della Reale Academia delle Scienze di Torino, ser. II, Tomo XXXVI, 1883, pp. 3–86. W literaturze określa ją się niekiedy jako pracę doktorską, była to jednak praca dyplomowa (czy nawet licencjacka): dissertatizione di laurea. Ukończenie uniwersytetu było wówczas przywilejem bardzo niewielu.

> **Corrado Segre** urodził się 20 sierpnia 1863 roku w Saluzzo na północy Włoch. Studiował na uniwersytecie w Turynie pod kierunkiem Enrico D'Ovidio. W roku akademickim 1881–1882 D'Ovidio prowadził wykład na temat nowych idei geometrycznych Feliksa Kleina. Wykład nawiązywał też do badań Giuseppe Veronese w zakresie geometrii przestrzeni rzutowej i wyników Weierstrassa dotyczących form dwuliniowych, w szczególności klasyfikacji par form kwadratowych. Wykład ten był tak inspirujący dla Segrego, że najwyraźniej poświęcił cały rok 1882/83 na pracę nad tematami z tego wykładu i w maju 1883 roku uzyskał dyplom na podstawie pracy o kwadrykach wielowymiarowych. Tematyce związanej z zagadnieniami omawianymi na tym wykładzie pozostał Segre wierny przez wiele lat. W 1883 roku Segre został asystentem na Uniwersytecie w Turynie. W 1888 roku zastąpił swojego nauczyciela, d'Ovidio, na katedrze geometrii, którą kierował przez następne 36 lat, aż do swojej śmierci, 18 maja 1924 roku.

W latach osiemdziesiątych XIX wieku geometria była już bardzo dobrze rozwiniętą dyscypliną matematyczną. We wstępie do swojej pracy Segre przypomina kilka najwyraźniej dobrze znanych wtedy pojęć. W sposób dojrzały omawia zasadę dualności. Pisze mianowicie, że równanie (hiper)płaszczyzny

$$\sum_i \xi_i x_i = 0$$

w przestrzeni, w której współrzędnymi są x_i, może być rozumiane jako równanie punktu w przestrzeni (hiper)płaszczyzn – wobec tego „cokolwiek" dowiedzione dla punktów pozostaje prawdziwe i dla hiperpłaszczyzn. Analizuje dokładnie (dziś trochę zapomniane w nauczaniu szkolnym i uniwersyteckim) pojęcie biegunowości i wykorzystuje je w sytuacji, gdzie dziś rozpatrywalibyśmy orbity działania grupy ortogonalnej (p. np. niżej, p. 11). Segre zna twierdzenie o wymiarze przecięcia zbiorów algebraicznych w przestrzeni rzutowej (*kowymiar przecięcia zbiorów w położeniu ogólnym jest sumą kowymiarów danych zbiorów,* Halphen, V., *Recherches de geométrie á n dimensions*, Bull. Soc. Math de France, 2 (1873–74).

Veronese.G., *Behandlung der projectivischen Verhältnissen der Räume vor verschiedenen Dimensionen durch das Prinzip des Projicirens un Schneidens*. Math. Ann, XIX.

Przejście indukcyjne to u Segre po prostu zwrot e cosi via. Zasada indukcji w swojej sformalizowanej postaci pojawiła się w kilkanaście lat później.

nazywa to twierdzeniem Halphena) i twierdzenie Bezouta (*stopień niepustej części wspólnej jest sumą stopni*).

Segre podaje też dowód twierdzenia, że każdy zbiór algebraiczny wymiaru m i stopnia d jest położony w przestrzeni rzutowej wymiaru $m + d - 1$. W każdym razie pisze on, że dla $m = 1$ wiedział to już Clifford w 1878 roku, ogólne zaś twierdzenie, ale bez dowodu, sformułował kilka lat wcześniej Veronese. Oczywiście wszystkie zbiory algebraiczne dane były jako już zanurzone w przestrzeni rzutowej. Definicja rozmaitości (przestrzeni nie związanej a priori z żadnym zanurzeniem w przestrzeń euklidesową czy rzutową) jeszcze się nie wtedy nie narodziła. Dowód biegnie przez indukcję względem wymiaru i w świetle dzisiejszych standardów jest błędny. Nie może być poprawny, skoro samo twierdzenie, jeśli by je rozumieć z 21-wieczną ścisłością, jest nieprawdziwe. Na przykład suma dwóch prostych ma stopień 2 i wymiar 1, ale nie musi mieścić się w płaszczyźnie. W twierdzeniu trzeba bowiem założyć, że zbiór jest spójny i nieco przeredagować tekst dowodu. Segre doskonale rozumiał matematyczną treść tego, co badał, a bardzo rygorystyczny formalizm jest wymysłem dwudziestowiecznym.

Gdy $d = 2$, to $m + d - 1 = m + 1$, możemy zatem *określić* kwadrykę jako zbiór stopnia 2 w przestrzeni dowolnego wymiaru i wyprowadzić stąd, że musi być ona hiperpowierzchnią, opisaną jednym równaniem kwadratowym.

2. Współrzędne Plückera i rozmaitości Grassmanna

W dalszym ciągu wstępu do swojej pracy Segre przedstawia tak nazywane dzisiaj współrzędne Plückera i równania rozmaitości Grassmanna.

Hermann Günther Grassmann spędził większość swojego życia w Szczecinie. Urodził się tam 15 kwietnia 1809 roku, pracował jako nauczyciel w tamtejszym liceum od 1831 do 1875 roku (z przerwą 1834-36, kiedy pracował w Berlinie) i zmarł tam 26 września 1877 roku. Od niego pochodzi konstrukcja (jedna z pierwszych abstrakcyjnych konstrukcji tego typu), w której każdej podprzestrzeni wymiaru m w przestrzeni liniowej wymiaru n jest przyporządkowany punkt przestrzeni wymiaru $\binom{m}{n}$, dany przez współrzędne Plückera. Grassmann zapoczątkował dział algebry zwany dziś algebrą zewnętrzną. Już za życia Grassmann był rozczarowany ograniczonym powodzeniem jego idei (jak często się zdarza, docenionych znacznie później) i w wieku 53 lat usunął się z matematyki, poświęcając się tworzeniu słownika sanskrytu, będącego w użyciu nawet dzisiaj.

Julius Plücker urodził się 16 czerwca 1801 roku w Wuppertal, zmarł 22 maja 1868 roku w Bonn. Studiował w Heidelbergu, Berlinie i Paryżu. W 1834 roku został profesorem matematyki w Halle, a w 1836 roku w Bonn. Zapoczątkował badania nad systemami liniowymi, tzn. podzbiorami kwadryki Kleina, która parametryzuje zbiór linii prostych w $\mathbf{P}^3$.

Clebsch, G., *Über eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie*, Abhandlungen der königl. Gesselschaft der Wissenschaften zu Göttingen, XVII (1872). W późniejszych pracach Segre używa jednak określenia „współrzędne Grassmanna", np. w pracy *Sui complessi lineari di piani nello spazio a cinque dimensioni* (Ann. di matematica pura ed appl.), ser. III, tomo 23, p. 75–122 (1917) pisze: I piani dello S_5 si rappresentano colle note coordinate di Grassmann, p_{hkl}, determinanti estratti independente del piano, predendone le colonne *hkl*.

D'Ovidio, E., *Ricerche sui sistemi indeterminati di equazioni lineari*, Atti Acc. Torino, XII, 1877.

Dieudonné, J., *The tragedy of Grassmann*, Linear and Multilinear Algebra 8 (1) (1979/80), 1–14.

Segre pisze, że współrzędne Pluckera wprowadził Clebsch, a wyprowadzenie równań rozmaitości Grassmanna przypisuje d'Ovidio. Jak zwrócił uwagę m. in. Jean Dieudonne, to wiedział już Grassmann, którego teorie nie zostały od razu zrozumiane.

Grassmannian $G(2,4)$, a w notacji rzutowej $G(1,3)$, jest kwadryką wymiaru 4. Jeżeli bowiem $L = L(a,b)$ jest prostą przechodzącą przez punkty $a = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ oraz $b = (b_0, b_1, b_2, b_3)$ $\mathbf{P}^3$, to ciąg wyznaczników

$$P(a,b) = \left(\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_0 & a_3 \\ b_0 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \right)$$

wyznacza punkt przestrzeni pięciowymiarowej $\mathbf{P}^5$ i jako punkt przestrzeni rzutowej jest on niezależny od wyboru szczególnych punktów na prostej $L = L(a,b)$. Jeżeli wyznaczniki te oznaczymy kolejno przez p_{ij}, to spełnione będzie równanie

$$Q(x) = p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12} = 0$$

Patrz np. *Elementy algebry wyższej* Andrzeja Mostowskiego i Marcelego Starka, PWN, 1958.

Udowodnić to najlepiej, korzystając z zapomnianego „uogólnionego rozwinięcia Laplace'a" (polecam wszystkim jako ciekawe zadanie dla studentów!). Wyznacznik

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

jest oczywiście równy zeru. Rozwijając go względem dwóch pierwszych wierszy, otrzymujemy:

$$0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_0 & a_3 \\ b_0 & b_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_0 & a_3 \\ b_0 & b_3 \end{vmatrix} - \ldots =$$

$$= p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12}.$$

A zatem zbiór wszystkich prostych w $\mathbf{P}^3$ jest parametryzowany przez rozmaitość stopnia 2 w przestrzeni $\mathbf{P}^5$, będącą kwadryką, to jest zbiorem opisanym równaniem stopnia 2 w hiperprzestrzeni. Kwadryka opisana tym równaniem jest znana w literaturze pod nazwą *kwadryki Kleina*. Podstawiając

$$p_{01} = x_0 + \mathrm{i}x_1, \quad p_{23} = x_0 - \mathrm{i}x_1, \quad p_{02} = x_2 + \mathrm{i}x_3, \quad p_{13} = x_2 - \mathrm{i}x_3,$$
$$p_{03} = x_4 + \mathrm{i}x_5, \quad p_{12} = x_4 - \mathrm{i}x_5$$

otrzymujemy równanie tej kwadryki *we współrzędnych Kleina*

$$Q(x) = \sum_{j=0}^{5} x_j^2 = 0.$$

Załóżmy, że proste L_1 i L_2 mają punkt wspólny; niech $L_1 = L_1(a,b)$, $L_2 = L_1(a,c)$. Napiszmy jeszcze jeden wyznacznik równy zero

$$0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

i rozwińmy go jak poprzednio. Oznaczając współrzędne Plückera prostej L_1 przez p, a współrzędne prostej L_2 przez p', mamy warunek na współrzędne Plückera prostych przecinających się:

$$Q(L_1, L_2) = p_{01}p'_{23} - p_{02}p'_{13} + p_{03}p'_{12} + p'_{01}p_{23} - p'_{02}p_{13} + p'_{03}p_{12} = 0.$$

We współrzędnych Kleina ten warunek formułuje się jeszcze prościej:

$$\sum_{j=0}^{5} x_j x'_j = 0.$$

Jeżeli przypomnimy sobie równanie przestrzeni stycznej do kwadryki, to zobaczymy, że wzory te wyrażają następujący fakt geometryczny, znany już Grassmannowi:

Dwie proste w przestrzeni $\mathbf{P}^3$ *mają punkt wspólny wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im punkty na kwadryce Kleina leżą wzajemnie w przestrzeniach stycznych w tych punktach.*

Wniosek: Dla danych czterech prostych w $\mathbf{P}^3$ istnieją na ogół dwie proste mające z nimi punkt wspólny. Systemem liniowym prostych nazywamy zbiór linii prostych odpowiadający części wspólnej kwadryki Kleina i hiperpłaszczyzny wymiaru 4 w $\mathbf{P}^5$. Nietrudno podać pełną klasyfikację takich systemów. We współrzędnych Plückera równaniem systemu liniowego jest

$$\sum a_{ij}p_{ij} = 0,$$

gdzie $J = [a_{ij}]$ jest macierzą skośnie symetryczną. Systemy liniowe są rozróżnialne za pomocą współczynnika oznaczanego tradycyjnie przez Ω:

$$\Omega = 2(a_{01}a_{23} - a_{02}a_{31} + a_{03}a_{12}).$$

Gdy $\Omega \neq 0$, to system nazywa się *ogólny*. Systemy mające $\Omega = 0$ są *szczególne*. Widzieliśmy, że systemy szczególne składają się z prostych przecinających ustaloną prostą l, i że jest to przestrzeń styczna do Q_4 w punkcie l. Macierz skośnie symetryczna J o niezerowym wyznaczniku określa interesującą algebraiczną wiązkę wektorową *korelacji zerowej*.

Patrz np. Okonek, Ch., Sneider, M., Spindler, H., *Vector bundles on projectiwve spaces*, Birkäuser (1981).

Zauważmy ciekawą rzecz:

Ogólny system liniowy wyznacza korelację zerową, to znaczy taki izomorfizm i czterowymiarowej przestrzeni liniowej V na V^* taki, że dla każdego $x \in Q_4$ zachodzi $x \in i(x)$.

Oznaczajmy punkty przestrzeni liniowej V przez wektory kolumnowe $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)^T$, to znaczy macierze o jednej kolumnie, a hiperpłaszczyzny przez wektory wierszowe (macierz o jednym wierszu). Jeżeli J jest macierzą współczynników systemu, to przyporządkowanie $x \to x^T J$ jest korelacją zerową. Istotnie

$$(x^T Jx)^T = x^T J^T x = -x^T Jx,$$

a zatem $x^T Jx = 0$, tzn. $x \in x^T J$.

Własności ogólnych systemów liniowych są związane z własnościami algebraicznych wiązek wektorowych, badanych intensywnie w latach 70 i 80 ubiegłego wieku.

Np. M.S. Narasimhan, S. Ramanan, *Moduli of vector bundles on a compact Riemann surface*. Ann. of Math. 89, 14–51 (1969).

Klein był doktorantem Plückera i nic dziwnego, że w swojej pracy doktorskiej w 1868 roku badał systemy liniowe drugiego stopnia, to znaczy zbiory linii prostych odpowiadające części wspólnej kwadryki Q_4 z hiperpowierzchnią stopnia 2 w $\mathbf{P}^5$. W pracy tej Klein używał teorii Weierstrassa dzielników elementarnych. Nawiązuje do niej i Corrado Segre w drugiej części swojej pracy.

Über die Transformation der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen Linien- Koordinaten auf eine kanonische Form. Opublikowana jako *Zur Theorie der Liniencomplexe des ersten und zweiten Grades.* Math. Ann. 2 (1870).

Plücker zmarł wkrótce po obronie pracy doktorskiej Kleina. Klein dokończył potem jego dzieło o geometrii.

Ważną i ciekawą własnością kwadryki Kleina jest jej prostokreślność i interpretacja tej prostokreślności. Niech prosta L będzie zawarta w płaszczyźnie o równaniu $x_0 = 0$. Nietrudno zauważyć, że wtedy jej współrzędne Plückera p_{01}, p_{02} i p_{03} są równe zero. Ale zbiór określony w $\mathbf{P}^5$ równaniami $p_{01} = p_{02} = p_{03} = 0$ jest płaszczyzną (wymiaru 2). Jeżeli natomiast M będzie prostą przechodzącą przez punkt $(1, 0, 0, 0)$, to równe zeru będą jej współrzędne Plückera p_{12}, p_{13} i p_{23}. Zbiór określony w $\mathbf{P}^5$ równaniami $p_{12} = p_{13} = p_{23} = 0$ jest też płaszczyzną (wymiaru 2). Można wykazać, że przez każdy punkt kwadryki przechodzą dwie płaszczyzny zawarte w tej kwadryce (podobnie jak przez każdy punkt na Q_2 przechodzą dwie proste tak, jak na hiperboloidzie. Na Q_4 leżą zatem dwa rodzaje płaszczyzn: jedne odpowiadają pękom prostych, drugie – rodzinom prostych współpłaszczyznowych. To również znali dobrze i Grassmann i Plücker.

W bardziej nowoczesnym ujęciu, rozmaitość Grassmanna $G(k, n)$, parametryzująca zbiór wszystkich podprzestrzeni liniowych W wymiaru k przestrzeni jest podzbiorem przestrzeni $\Lambda^{k+1}V$ złożoną z wektorów prostych, tj. wektorów postaci $w_1 \wedge w_2$. Ale właściwie to już Grassmann widział to w ten sposób.

3. O czym pisał 20-letni student w pracy dyplomowej w 1883 roku?

Praca Corrado Segre składa się z trzech części, poprzedzonych obszernym wstępem. Część pierwsza poświęcona jest geometrii przestrzeni liniowych i kwadryk. Twierdzenia dotyczące kwadryk są nowe. Część druga pracy jest poświęcona snopom (fascio), czyli pękom kwadryk. Zawarta jest w niej geometryczna interpretacja twierdzenia Weierstrassa o równoważności dwóch pęków kwadryk. Część trzecia zawiera szczegółową interpretację wyników w małych wymiarach.

Praca Segre jest charakterem (i poziomem!) zbliżona do dzisiejszych rozpraw habilitacyjnych. Uważamy dziś, że doktorat powinien być pracą głęboką, a rozprawa habilitacyjna – szeroką. Praca Corrado Segre zawiera nowe, bardzo interesujące wyniki, ale główną jej zaletą jest bardzo wszechstronne omówienie tematu. Wiele twierdzeń jest „przetłumaczonych" z języka analizy i algebry na język geometrii; jest kilkanaście dowodów twierdzeń anonsowanych wcześniej bez dowodu, niekiedy zaś autor poprawia błędy swoich poprzedników. Z całej pracy widać, że jej autor doskonale czuł zagadnienie. Po prostu: wiedział, o czym pisze.

4. Czy przestrzenie dowolnego wymiaru mają rację bytu?

Mottem pracy Corrado Segre są dwa zdania z prac Feliksa Kleina.

> *Die mathematische Untersuchungen über Mannigfaltigkeiten mit beliebig vielen Dimensionen würden allerdings sofort geometrische Verwendung finden, wenn die Vorstellung richtig wäre – aber ihr Wert und ihre Absicht ruht gänzlich unabhängig von dieser Vorstellung, in ihrem eigenen mathematischen Inhalte.*

> *Badania matematyczne nad rozmaitościami o dowolnie wielu wymiarach oczywiście znalazłyby natychmiast zastosowania geometryczne, gdybyśmy mieli właściwe o nich wyobrażenie – ale wartość i cel tych badań jest od tego przedstawienia całkowicie niezależna i polega na ich własnej treści matematycznej.*

> *Die Liniegeometrie ist wie die Geometrie auf einer* $M^{(2)}{}_4$ *des* R_5.

> *Geometria linii prostych to tak jak geometria na* $M_4^{(2)}$ *w* R_5 (to znaczy na rozmaitości stopnia 2 i wymiaru 4 w przestrzeni pięciowymiarowej, przyp. M.Sz.)

Klein, F., *Vergleichende Betrachtungen Geometrie Über neue geometrische Forschungen*, Erlangen 1872. Drugie zdanie pochodzi z *Über Liniengeometrie und metrische Geometrie*, Math. Ann, 5, str. 261.

Potem Segre kilkakrotnie „usprawiedliwia się", że bada obiekty dowolnego n-tego wymiaru. Dla matematyków tamtych czasów nie było wcale jasne, że zajmowanie się przestrzeniami dowolnych wymiarów ma sens. Geometria n-wymiarowa zdobywała sobie miejsce powoli. Niewiele będzie przesady w stwierdzeniu, że została zapoczątkowana w 1880 roku przez Giuseppe Veronese (1845 – 1917). To właśnie Veronese uczynił z algebry liniowej geometrię i pokazał, jak przejście do wyższych wymiarów upraszcza niektóre sformułowania, a jednocześnie pokazuje geometrię „niskowymiarową" jakby z lotu ptaka. Dobrze to ilustruje późniejsze twierdzenie Corrado Segre: każda płaska krzywa wymierna stopnia d jest rzutem ustalonej krzywej C_d położonej w przestrzeni rzutowej $\mathbf{P}^d$. Przedstawienie parametryczne tej krzywej C_d jest dane wzorami: $x_i = \lambda_i \mu^{d-i}$, gdzie $(\lambda_i : \mu^i) \in \mathbf{P}^1$. Jak piszą Ottaviani i Ghione można powiedzieć, że krzywe płaskie są tylko cieniami (w sensie metafory Platona o jaskini) jednej, nieskomplikowanej rodziny krzywych. Przypomnijmy też, że Stanisław Lem pisał (w kontekście opowieści o smoku), ze jeśli schowamy rękę pod wodę i wystawimy z wody 5 palców to nierozgarnięty obserwator na powierzchni nie skojarzy, że nie jest to 5 niezależnych obiektów, tylko właśnie pięć palców jednej ręki.

Nawet wykładająca mi w 1963 roku geometrię analityczną Wanda Szmielew powiedziała, polecając nam książkę Karola Borsuka „Geometria analityczna w n wymiarach", że nie powinniśmy się bać, bo „to" n będzie równe 2 albo 3.

Ghione, F., Ottaviani, G., *A tribute to Corrado Segre*, w : Complex Projective Geometry, London Mat. Soc. Lecture Notes Series, 179 (Cambridge 1992).

Segre nie był oczywiście pionierem badań nad przestrzeniami dowolnego wymiaru, ale jak widać, potrzeba uzasadniania, że te badania są sensowne, była silna.

Określoną wyżej krzywą C_d Veronese nazwał „normalnym modelem" krzywej C. Segre postawił sobie za cel znalezienie „modeli" rozmaitości wyższych wymiarów, np. powierzchni. Miało to służyć badaniu geometrii powierzchni poprzez badania własności „modelu" i rzutowanie. Już w 1884 roku udowodnił istnienie modeli dla powierzchni pewnego typu; omówienie szczegółów wykracza poza ramy tego artykułu.

Dokładnie: dla wymiernych powierzchni prostokreślnych. Modelami są tu powierzchnie znane dziś pod nazwą powierzchni Hirzebrucha. Z dowodu twierdzenia o istnieniu tych modeli wynika dowód twierdzenia, że każda wiązka wektorowa na sferze Riemanna jest sumą prostą wiązek liniowych! Twierdzenie to udowodnili także Dedekind i Weber, a na nowo Alexander Grothendieck w 1957 roku... i w literaturze nazywane jest ono właśnie twierdzeniem Grothendiecka. Jest jeszcze kilku innych autorów, których można uznać za odkrywców tego twierdzenia; szczegóły podaje np. cytowana książka Christiana Okonka, Heinza Spindlera i Michela Schneidera.

5. Trudne pojęcia

Dla historyka myśli matematycznej bardzo ciekawy jest wstęp do pracy Corrado Segre. Na samym początku autor podaje bowiem określenie ogólnej przestrzeni n-wymiarowej, a następnie n-wymiarowej przestrzeni liniowej. Określenie to brzmi mniej więcej tak (staramy się zachować styl oryginału):

> *Mówimy, że zbiór ciągły dowolnych jednostek, których liczba jest równa m razy nieskończoność (to znaczy, ogólnie, wśród których znajduje się skończona ich liczba spełniających m prostych warunków) tworzy przestrzeń wymiaru m, a obiekty te nazywamy elementami.*

A następnie:

> *Dowolną przestrzeń wymiaru m nazwiemy liniową, gdy można przypisać każdemu jej elementowi wartości liczbowe (rzeczywiste lub zespolone) w ten sposób, że, bez żadnego wyjątku, dowolnej grupie wartości, o których mowa, odpowiada jedyny element rzeczonej przestrzeni i vice versa, każdemu elementowi odpowiada jedyna taka grupa wartości. Te wartości odpowiadające elementom nazywamy współrzędnymi.*

Nic dziwnego, że określenie te zaopatrzone zostały notą redakcyjną, że mają *carattere critico*, ale że jest to bez znaczenia, bo w dalszym ciągu pracy te określenia są w zasadzie nie używane. Szczególnie pierwsze określenie, przestrzeni wymiaru m wydaje się bardzo niedoskonałe (cóż są to „proste warunki"?) a nawet błędne. Wydaje się, że w zdaniu w nawiasie Segre próbuje oddać istotę dzisiejszego pojęcia *bazy przestępnej*. Nieprzywiedlny zbiór algebraiczny X jest wymiaru m nad ciałem k, gdy ciało funkcji wymiernych $k(X)$ jest skończonym rozszerzeniem ciała funkcji wymiernych m *zmiennych* $k(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Na przykład zbiór określony równaniem $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$ jest wymiaru 3, bo są na nim trzy i tylko trzy niezależne algebraicznie funkcje np. x_1, x_2, x_3. W świetle późniejszego twierdzenia Noether o normalizacji jest to prawidłowa definicja.

Patrz np. twierdzenie 1.3 w: Shigeru Iitaka, *Algebraic Geometry*, Graduate Text in Mathematics, 76, Springer Verlag.

Zatem ... *nie zmylił się mistrz taki*. Matematyka w pracy Segre jest dojrzała, nawet w świetle naszych, obecnych standardów. On po prostu rozumiał, co pisze, wiedział, co jest matematyką ... i nie musiał precyzować definicji. W rozwoju matematyki zdarzało się wiele razy, że rozumiano pewne teorie zanim ktoś uporządkował ich logiczne podstawy (teoria liczb zespolonych, rachunek różniczkowy). Warto też przytoczyć fragment, w którym autor jak gdyby tłumaczy silnie akcentowaną potem przez Bertranda Russella – a dla nas dziś oczywistą – opinię, że w badaniach matematycznych nie jest ważna natura badanych obiektów, a tylko jakie zachodzą między nimi relacje:

Koncert Jankiela, [w:] Mickiewicz, A., *Pan Tadeusz, czyli ostatni zajazd na Litwie*. Paryż (1834) i wydania późniejsze.

> *Rozważmy dowolną przestrzeń wymiaru $n - 1$. Nazwiemy punktem każdy z jej elementów, niezależnie od tego, jaką ma naturę (która jest dla nas zupełnie nieważna).*

Pojęcie przestrzeni rzutowej jest również wprowadzone w sposób, który nie wytrzymuje dzisiejszych wymogów ścisłości.

> *Przedstawiając je (tzn. współrzędne) stosunkami m innych wielkości w odniesieniu do $(m + 1)$-ej, stosunki te utworzą $m + 1$ współrzędnych jednorodnych elementu rozpatrywanej przestrzeni, tak, że każdy element tej przestrzeni, bez wyjątku, oznaczony będzie przez wzajemne stosunki tych współrzędnych jednorodnych i posłuży na odwrót do oznaczenia tych ich stosunków.*
>
> *Powinno się jedynie zrobić wyjątek dla przypadku, w którym wszystkie dane współrzędne jednorodne są równe 0 lub równe ∞; tak więc sama definicja współrzędnych jednorodnych dowodzi, że nie istnieje określony element przestrzeni odpowiadający tym wartościom współrzędnych.*
>
> *W m-wymiarowej przestrzeni liniowej jasne jest, że aby wyznaczyć każdy element będzie można wziąć, zamiast $m + 1$ współrzędnych jednorodnych,*

Dzisiaj zwracamy dużą uwagę na formalną poprawność pojęć i wprowadzanych definicji i już w szkole podstawowej zwraca się na to dużą uwagę, często powodując dyskusję o problemach zastępczych (czy zero jest liczbą naturalną, czy można mówić „funkcja ciągła" i czy wysokość trojkąta to odcinek, prosta, półprosta czy liczba). Może i tak trzeba, bo Komputer niczego się nie domyśli. A wsio-taki-żal, jak śpiewał Okudżawa.

innych $m + 1$ wielkości będących proporcjonalnymi do danych funkcji liniowych jednorodnych niezależnych od tych współrzędnych, skoro te dane $m + 1$ wielkości będą również oznaczone w sposób jedyny przez $m + 1$ współrzędnych jednorodnych lub lepiej przez ich stosunki. Tak więc, z definicji, również te $m + 1$ wielkości będzie można przyjąć jako współrzędne jednorodne elementu tej przestrzeni; czyli dany układ współrzędnych jednorodnych dla elementów dla elementów przestrzeni liniowej można zastąpić przez inny układ współrzędnych jednorodnych dla tych samych elementów zadany przez wielkości proporcjonalne do liniowych funkcji jednorodnych współrzędnych pierwotnych. Takie zastąpienie nazywa się transformacją współrzędnych.

Pierwszą historycznie książką, w której można znaleźć ślady pojęcia przestrzeni liniowej, jest *Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie* Bolzano (1804). Dobrze rozumiał to pojęcie Grassmann (1844), którego idee wyprzedzały jego czas i zostały docenione po 30 i więcej latach. Obecna definicja przestrzeni liniowej pochodzi od Giuseppe Peano: *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann preceduto dalle operazioni della logica deduttiva* (1888). Jak widać, tytuł pracy nawiązuje do fundamentalnego dzieła Grassmanna. Około 1900 roku można już mówić o ugruntowaniu się teorii przestrzeni liniowych w sensie znanym nam dzisiaj.

Podkreślmy raz jeszcze, że nieprecyzyjność tych określeń nie ma najmniejszego znaczenia dla wywodów zawartych w dysertacji. Jest tam piękna matematyka.

We współczesnej geometrii algebraicznej określamy n-wymiarową przestrzeń rzutową nad dowolnym ciałem jako zbiór ciągów $(n + 1)$-elementowych tego ciała, z pominięciem ciąg zerowego i z utożsamieniem ciągów proporcjonalnych. Przy takim podejściu zapominamy o „pochodzeniu" tego pojęcia: punkty w nieskończoności przestrzeni rzutowej odpowiadają kierunkom linii prostych przestrzeni afinicznej. Topologicznie można określić przestrzeń rzutową (rzeczywistą lub zespoloną) jako sferę podzieloną przez relację polegającą na utożsamieniu punktów antypodycznych. W teorii rozmaitości torycznych przestrzeń rzutowa jest pewnym kompleksem stożków. Zapomniana jest dzisiaj „algebraiczna" interpretacja przestrzeni rzutowej, wykorzystywana w „złotym okresie" włoskiej geometrii algebraicznej, który zaczął się około 1875 roku. Mianowicie: $\mathbf{P}^n = S^n(\mathbf{P}^1)$, tzn. przestrzeń rzutowa wymiaru n jest n-tą symetryczną potęgą prostej. Otóż, uporządkowana n-tka $p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathbf{P}^1 = \mathbf{C}$ wyznacza punkt

$$\{\sigma_0(p), -\sigma_1(p), +\sigma_2(p), \ldots, \pm\sigma_n(p)\} \in \mathbf{P}^n,$$

gdzie $\pm\sigma_j$ są elementarnymi funkcjami symetrycznymi. Inaczej mówiąc, możemy traktować przestrzeń rzutową $\mathbf{P}^n$ jako zbiór wielomianów (jednej zmiennej) stopnia $\leq n$. Wielomiany stopni mniejszych niż n odpowiadają wówczas punktom w nieskończoności, a równoważność tego modelu ze standardowym zapewniają wzory Viète'a (i zasadnicze twierdzenie algebry!). Zamiast wielomianów jednej zmiennej różnych stopni możemy oczywiście używać wielomianów jednorodnych dwóch zmiennych i „jednorodnej" wersji zasadniczego twierdzenia algebry: każdy wielomian jednorodny dwóch zmiennych x, y (dodatniego stopnia) jest iloczynem wielomianów liniowych $ax + by$.

6. Matematyka bez teorii mnogości

Segre używał terminu insieme (zbiór), rozumiejąc go w „naturalny" sposób. W 1883 roku nie powstała bowiem jeszcze Cantora teorii mnogości (o której David Hilbert wykrzyknął *Das ist nicht Mathematik, das ist Theologie*) a matematycy nie troszczyli się tak bardzo o podstawy własnej nauki. Nie podejrzewano, że istnieje wiele rodzajów nieskończoności, a symbol ∞^2 był dla każdego zrozumiały. Tytuł jednej z późniejszych prac Segrego; *Introduzione alla geometria sopra una ente algebraico semplicemento infinito* (Annali di matematica pura e applicata, 1894, serie II, tomo XXII, s. 41–142) będzie niezrozumiały, dopóki nie przeczytamy, że *una varieta semplicemente infinita* (rozmaitość nieskończona w sposób prosty) to po prostu krzywa (*curva*), zaś *doppiamente infinita* (czyli podwójnie nieskończona) to powierzchnia. Segre pisze wiele razy „znajdźmy liczbę przestrzeni o takich a takich własnościach" i podaje odpowiedź w postaci: ∞^k. Dzisiaj napisalibyśmy: *wymiar jest równy k*, chociaż zwrot „ile jest" (w znaczeniu: ile wynosi wymiar odpowiedniej przestrzeni) przetrwał w matematycznym języku mówionym, a niekiedy oznaczenie ∞^k da się zobaczyć na tablicy w czasie wykładu matematyka z Włoch.

7. Jak pisać teksty matematyczne?

Sposób pisania prac matematycznych sto kilkadziesiąt lat temu był inny niż teraz. W pracy Segrego rzadko występuje słowo „twierdzenie", nie występuje też rzeczownik „dowód", chociaż pisze się „udowodnić, udowodniliśmy" itp. Nie ma obowiązującego dziś kanonu: najpierw sformułowanie twierdzenia, a potem dowód. Odwrotnie, niewiele przesady jest w tym, że prace były pisane gawędziarskim stylem: weźmy to, tamto, zobaczmy,...i nagle pojawiało się stwierdzenie: *a zatem udowodniliśmy, że...* Bardziej sztywno pisali oczywiście Niemcy, w pracach zaś matematyków włoskich tamtego okresu („złotego wieku włoskiej szkoły geometrii algebraicznej") często tę samą rzecz dowodzono dwa lub nawet trzy razy ... nie dlatego, żeby przedstawić trzy ciekawe różne dowody, ale żeby ... upewnić siebie i Czytelnika, że twierdzenie jest rzeczywiście prawdziwe. Na przykład Segre przedstawia trzy sposoby wyliczenia, ile jest podprzestrzeni wymiaru m zawartych w kwadryce wymiaru n: przez proste „policzenie", analitycznie i za pomocą nowej wówczas w geometrii algebraicznej metody „projekcji centralnej" (czyli rzutowania środkowego). Pisze on wyraźnie:

> *Si puo pure trovare analiticamente il numero degli S_m contenuti in φ, e ciò servira a confermare le cose dette* (podkreślenie M. Sz.).

Z dzisiejszego punktu widzenia styl pisarski Segre i jemu współczesnych matematyków uznalibyśmy za gawędziarski i w tym sensie dzisiejsze prace bardziej nawiązują do rygorów *Elementów* Euklidesa...

Przestrzenie liniowe zawarte w kwadryce lub styczne do niej

8. Spazi lineari contenuti in una quadrica o tangenti ad essa

Najciekawszym, z dzisiejszego punktu widzenia rozdziałem pracy Corrado Segre jest §3 pierwszej części o prostokreślności kwadryki, czyli o tym, jakie i ile przestrzeni liniowych jest zawartych w nieosobliwej kwadryce Q_n. Przypominamy, że ponieważ rozpatrywane zbiory algebraiczne określone są nad ciałem liczb zespolonych, więc dla każdego wymiaru n istnieje tylko jedna kwadryka nieosobliwa tego wymiaru (bo z twierdzenia o klasyfikacji form kwadratowych wynika, że każda forma rzędu n da się sprowadzić do sumy kwadratów). Własności ogólnej kwadryki lepiej oddaje „rzeczywisty" model obrotowej hiperboloidy jednopowłokowej. Powstaje ona przez obrót prostej wokół innej, skośnej względem niej. Hiperboloida jest więc powierzchnią prostokreślną. Ma jednak dwa systemy tworzących: różne proste jednego z tych systemów nie przecinają się, natomiast dwie proste należące różnych systemów mają jeden punkt wspólny. To samo dotyczy i „sfery" $\sum x_i^2 = 0$, właśnie dlatego, że nie ma różnych gładkich kwadryk dwumiarowych Jeżeli l, l' oznaczymy ogólne proste tych systemów, to na kwadryce Q_2 mamy zatem relacje:

$$(*) \qquad l^2 = 0, \quad l'^2 = 0, \quad ll' = 1.$$

Twierdzenie. *Gładka kwadryka Q_n wymiaru n nie zawiera podprzestrzeni liniowych wymiaru większego niż $n/2$.*

Griffiths, Ph., Harris, J., *Principles of Algebraic Geometry*. Wiley & Sons, 1978.

Zobaczmy, jak dowodzi to Segre i porównajmy z późniejszym o 85 lat tekstem [GH, rozdz. 6.1]. Zobaczmy, jak zmienił się styl pisania. Segre używał nie najwygodniejszych oznaczeń. Zmienne numerował od 1 do n, a więc $x_1, \ldots, x_n$, zatem przestrzeń, w której leżały te punkty miała wymiar $n-1$, a kwadryka, będąca hiperpowierzchnią, miała wymiar $n-2$. Obecnie panuje tendencja, żeby zbiór, który badamy, był „podmiotem" i jego wymiar oznaczamy jak najprostszym symbolem: $\mathbf{P}^n$, S_n to obiekty wymiaru n.

Segre nazywał płaszczyzną (*piano*) to, co dziś określamy mianem hiperpłaszczyzny (podprzestrzeń liniową kowymiaru 1). Kwadryka oznaczona była przez φ, symbol zaś S oznaczał przestrzeń liniową wymiaru takiego, jak stojący przy tej literze wskaźnik. Przytaczamy tekst Segre:

> *Jest jasne, że gdy w płaszczyźnie stycznej do φ w punkcie x wybierzemy inny punkt y należący do niej i do kwadryki, to prosta łącząca y i x leży całkowicie na φ, inaczej mówiąc, takie przecięcia dają nieskończoną liczbę*

prostych przechodzących przez x. Vice versa, jest zupełnie oczywiste, że wszystkie proste przechodzące przez x i styczne do φ leżą w płaszczyźnie stycznej do φ. Ponieważ wszystkie punkty przestrzeni m-wymiarowej S_m leżącej na φ dadzą się połączyć z punktem x prostą leżącą na φ, więc cała S_m jest zawarta w płaszczyźnie stycznej do φ w punkcie x, jak to chcieliśmy udowodnić. To samo zachodzi dla wszystkich punktów x przestrzeni S_m, zatem wszystkie płaszczyzny styczne do φ zawierają S_m. A zatem te płaszczyzny styczne tworzą zbiór Σ_m płaszczyzn, a ich częścią wspólną jest pewna S_{n-m-2}, która nie jest niczym innym, jak tylko przestrzenią biegunową do S_m względem φ. Taka S_{n-m-2} musi zawierać ową S_m, a zatem:

aby przestrzeń liniowa wymiaru m była zawarta w ogólnej kwadryce w przestrzeni n-wymiarowej jest konieczne i wystarczające, by była zawarta w swojej przestrzeni S_{n-m-2} biegunowej względem F.

Musi zatem być $m \leq n-2-m$, skąd $m \leq (n-2)/2$. Zatem

ogólna kwadryka nie zawiera przestrzeni liniowych, których liczba wymiarów przewyższa połowę liczby wymiarów kwadryki.

Zobaczmy, jak inaczej (trudniej, ale elegancko) dowodzą tego Griffiths i Harris (op. cit) :

Odwzorowanie Gaussa

$$G : F \to \mathbf{P}^n$$

przyporządkowuje punktowi $p \in F$ płaszczyznę [przestrzeń, przyp. M. Sz.] styczną $T_p(F) \in \mathbf{P}^{n*}$. Ponieważ płaszczyzną styczną w punkcie $p = [a_0, \dots, a_n]$ do kwadryki opisanej przez formę kwadratową $Q(X,X) = \sum_{i,j=0}^{n} q_{ij} X_i X_j$ jest

$$T_p(F) = \Big(\sum_{i,j} q_{ij} a_j X_i = 0\Big),$$

widzimy więc, że odwzorowanie Gaussa G jest po prostu obcięciem do F odwzorowania wymiernego $\mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^{n*}$ określonego przez macierz Q. Jeżeli F jest gładka, to G jest izomorfizmem, a rozmaitość dualna $F^* = G(F) \subset \mathbf{P}^{n*}$ jest znów gładką kwadryką. Odzworowanie G jest w tym przypadku obcięciem izomorfizmu liniowego $\mathbf{P}^{n+1} \to \mathbf{P}^{n_1 *}$ do F. Rodzina płaszczyzn stycznych do F wzdłuż podprzestrzeni liniowej $\Lambda_k \subset F$ tworzy k-wymiarową podprzestrzeń liniową w $\mathbf{P}^{n*}$. Ponieważ w każdym punkcie Λ przestrzeń styczna do F zawiera, a co więcej, obraz $G(\Lambda)$ leży całkowicie w $(n-k)$-wymiarowej podprzestrzeni w $\mathbf{P}^{n+1*}$ płaszczyzn przechodzących przez Λ, więc

$$k \leq n-k,$$

tzn. $k \leq n/2$.

Przeprowadźmy inne porównanie. Zobaczmy, w jaki sposób Segre wyliczył wymiar rodziny wszystkich k-płaszczyzn na kwadryce z tym, jak to „się robi" współcześnie (patrz np. [GH], op. cit.). Zachowajmy styl wypowiedzi. Najpierw Segre (1883):

> *Dla $m \leq (n-2)/2$ łatwo jest zobaczyć, że kwadryka φ istotnie zawiera nieskończenie wiele S'_m. Weźmy dowolny punkt x należący do φ i dowolny punkt x' z przecięcia płaszczyzny stycznej z φ. Prosta S'_1 łącząca x' z x jest zawarta w φ. Płaszczyzna styczna do φ w punkcie x' przechodzi przez x i przecina płaszczyznę styczną w x wzdłuż S'_{n-3} zawierającej owo S'_1: następnie bierzemy poza nią nowy punkt x'' należący do φ i łączymy go za pomocą S'_1 z x'. Otrzymujemy S'_2 całkowicie zawarte w φ i przechodzące między innymi przez punkty x, x', x''. Płaszczyzna styczna do φ w punkcie x'' przecina S'_{n-3} wzdłuż S'_{n-4} (przecięcie płaszczyzn stycznych w x, x', x'') zawierającej S'_2. W części wspólnej takiej S'_{n-4} z φ znajdujemy nowy punkt x''' poza S'_2 i łączymy go z S'_2 za pomocą S'_3, która zawiera x, x', x'', x'''. Kontynuując, otrzymujemy przestrzenie liniowe zawarte w φ, rosnących wymiarów. Chcemy rozpatrywać, ogólnie, liczbę takich, które przechodzą przez daną S'_k zawartą w φ, pod warunkiem, że $k < m$. Zauważmy, że w tej poprzedniej konstrukcji*

punkt x' możemy wybrać na ∞^{n-2} sposobów, punkt x' z przecięcia φ z płaszczyzną styczną w x można wybrać na ∞^{n-3} sposobów, punkt x'' z przecięcia φ z płaszczyznami stycznymi w x i x' można wybrać na ∞^{n-4} sposobów, ..., punkt $x^{(k)}$ na ∞^{n-2-k} sposobów, ..., i w końcu punkt $x^{(m)}$ na ∞^{n-2-m} sposobów. Punkty $x, x', \ldots, x^{(k)}$ wyznaczają daną przestrzeń zawartą w φ, a łącznie z punktami $x^{(k+1)}, \ldots, x^{(m)}$ wyznaczają S'_m zawartą całkowicie w φ i przechodzącą przez ową S'_k. Pierwsze punkty można wybrać na

$$\infty^{n-2-k-1} \times \infty^{n-2-k-2} \times \ldots \times \infty^{n-2-m} = \infty^{(m-k)(2n-m-k-5)/2}$$

różnych sposobów. Tę liczbę trzeba podzielić przez $\infty^{(m-k)m}$, ponieważ punkty $x^{(k+1)}, \ldots, x^{(m)}$, jako dowolne punkty S'_n, można wybrać na $\infty^{(m-k)m}$ sposobów. Otrzymujemy wynik, że przez daną S'_k na kwadryce przechodzi $\infty^{(m-k)(2n-3m-k-5)/2}$ przestrzeni S'_m. W szczególności, przyjmując $k = 0$ widzimy, że przez punkt na kwadryce przechodzi $\infty^{m(2n-3m-5)/2}$ S'_m w niej zawartych. Bezpośrednio stąd wynika, że na całej kwadryce jest $\infty^{(m+1)(2n-3m-4)/2}$, ponieważ jest ∞^{n-2} punktów x, z których ∞^m należy do S'_m.

Jak dowodzą tego Griffiths i Harris? W ich rozumowaniu występują dwa charakterystyczne motywy współczesnej geometrii algebraicznej. Po pierwsze „uzmienniamy" nie tylko k-płaszczyznę na Q_n, ale i kwadrykę: rozpatrujemy zbiór $\mathbf{F}$ wszystkich kwadryk. Ponieważ wymiar przestrzeni form kwadratowych $n+2$ zmiennych jest równy $q_n = \frac{(n+2)(n+3)}{2}$, więc kwadryk w $(n+1)$-wymiarowej przestrzeni rzutowej jest $\dim \mathbf{F} = \frac{(n+2)(n+3)}{2} - 1$. Drugim charakterystycznym motywem rozumowania jest rozpatrywanie *zbioru incydencji*. W naszym kontekście jest to zbiór złożony z par (Q, P), gdzie Q jest kwadryką, $Q \in \mathbf{F}$, zaś P jest k-płaszczyzną, oraz zachodzi warunek

$$P \subset Q.$$

Możemy napisać $P \subset \mathbf{G}$, gdzie $\mathbf{G}$ jest rozmaitością Grassmanna $G(k, n+1)$. Już Grassmann wiedział, że $\dim \mathbf{G} = (k+1)(n-k+1)$ i z tego skorzystamy. Jeżeli $\mathbf{I}$ oznacza zbiór incydencji, to mamy dwa naturalne rzutowania $\pi_1 : \mathbf{I} \to \mathbf{F}$ oraz $\pi_2 : \mathbf{I} \to \mathbf{G}$. Zauważmy, że wymiar przestrzeni, o którą nam chodzi, to wymiar włókna ogólnego odwzorowania $\pi_1 : \mathbf{I} \to \mathbf{F}$. Obliczamy inne wymiary. Form kwadratowych $k+1$ zmiennych jest $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$, zatem wymiar włókna rzutowania π_2 jest równy różnicy

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{(k+1)(k+2)}{2} - 1.$$

Suma tej liczby i wymiaru bazy, na którą się rzutuje, tzn. $\mathbf{G}$, jest wymiarem zbioru incydencji $\mathbf{I}$, tzn.

$$\dim \mathbf{I} = (k+1)(n-k+1) + \frac{(k+2)(k+3)}{2} - \frac{(k+1)(k+2)}{2} - 1.$$

Poszukiwany wymiar rodziny wszystkich k-płaszczyzn na kwadryce jest zatem równy różnicy

$$\dim \mathbf{I} - \dim \mathbf{F} == (k+1)(n-k+1) - \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Pozostawiamy Czytelnikowi sprawdzenie, że wynik Segre zgadza się z tym współczesnym, dokładniej, że różnica polega tylko na oznaczeniach.

Zgodnie z przyjętym ówcześnie stylem, Segre przedstawia jeszcze jeden dowód powyższego wzoru, a potem podaje jeszcze inny dla kwadryki parzystowymiarowej Q i podprzestrzeni liniowych wymiaru $(\dim Q)/2$. Pierwszy z tych dowodów nazywa analitycznym. Pisze tak:

Możemy teraz znaleźć analitycznie liczbę przestrzeni S'_m zawartych w φ, co będzie służyć potwierdzeniu dyskutowanych zagadnień. Niech $x, x', \ldots, x^{(n)}$ będzie układem $n+1$ punktów, które wyznaczają S'_m. Aby cała ta przestrzeń była zawarta w φ, dla dowolnych wartości λ musi zachodzić

$$\varphi(\lambda x + \lambda' x' + \ldots + \lambda^{(m)} x^{(m)}) = 0,$$

stąd

$$\lambda 2\varphi(x) + \lambda'^2 \varphi(x') + \ldots + \lambda^{(m)2} \varphi(x^{(m)}) + 2\lambda\lambda' \varphi(x, x') + \ldots = 0.$$

Zatem jest

$$\varphi(x) = 0, \quad \varphi(x') = 0, \quad \ldots, \quad \varphi(x^{(m)}) = 0,$$
$$\varphi(x, x') = 0, \quad \ldots, \quad \varphi(x^{(m-1)}, x^{(m)}) = 0.$$

Równania te występują w liczbie $(m+1)(m+2)/2$ i wyrażają fakt, że $m+1$ punktów $x, x', \ldots, x^{(m)}$ leżą na φ, a także, że są parami sprzężone względem φ, czyli są w płaszczyznach stycznych do φ – zgodnie z rezultatami rozważań syntetycznych. Ponieważ punkty $x, x', \ldots, x^{(m)}$ możemy wybrać w dowolny sposób na szukanej, musimy zatem nałożyć m warunków i w ten sposób mamy $(m+1)(m+2)/2 + m(m+1)$ równań, podczas gdy liczbą niewiadomych (są nimi współrzędne punktów) jest $(m+1)(n+1)$. Zatem układ jest nieoznaczony

$$(m+1)[(n-1) - (m+2)/2 - m] = (m+1)(2n - 3m - 4)/2$$

razy, innymi słowy kwadryka φ zawiera $\infty^{(m+1)(2n-3m-4)/2}$ przestrzeni S'_m, jak to już wiedzieliśmy wcześniej.

Współczesny recenzent kazałby to napisać inaczej. Najpierw obliczamy, że rozwiązania układu $(m+1)(m+2)/2$ równań z $(m+1)(n-1)$ niewiadomymi tworzą zbiór wymiaru równego różnicy liczby niewiadomych i liczby równań, a potem od tego musimy odjąć $m(m+1)$, uwzględniając fakt, że wiele różnych układów punktów może generować tę samą przestrzeń S'_m.

A zatem, na przykład na kwadryce Q_n jest $2n-3$ wymiarowa rodzina prostych. Na Q_2 są, jak wiemy, dwie ich rodziny: dwie rodziny tworzących hiperboloidy jednopowłokowej. Rozmaitość, którą tworzą podprzestrznie liniowe wymiaru m na Q_{2m}.

Twierdzenie. *Jeżeli $n = 2m+1$ jest liczbą nieparzystą, to Q_n zawiera nieprzywiedlną rodzinę m-płaszczyzn i wymiar tej rodziny jest równy $(m+1)(m+2)/2$. Jeżeli $n = 2m$ jest liczbą parzystą, to Q_n zawiera dwie nieprzywiedlne rodziny m-płaszczyzn i wymiar każdej z nich jest równy $m(m+1)/2$.*

Segre nie miał formalnej definicji „nieprzywiedlności" czy „nieredukowalności" zbioru algebraicznego, ale rozumiał to twierdzenie bardzo dobrze. Sformułowanie nie wymaga tłumaczenia:

> *In una quadrica generale nello spazio ad $n-1$ dimensioni stanno solo degli spazi lineari il cui numero delle dimensioni è al più uguale ad $(n-3)/2$ o ad $(n-2)/2$ secondo che n è impari o pari; nel 1^0 caso vi sono $\infty^{(n-1)(n-1)/8}$ $S_{(n-3)/2}$, nel 2^0 caso sono $\infty^{n(n-2)/8}$ $S_{(n-2)/3}$ formanti due sistemi.*

Zanalizujmy ten tekst dla parzystego wymiaru. Gdy kwadryka jest położona w przestrzeni wymiaru $n-1$, to sama ma wymiar $n-2$. Zatem n ze sformułowania Corrado Segre jest równe $2m+2$ ze sformułowania Griffithsa i Harrisa. Punkt 2^0 wyjaśnia wtedy, że gdy n (a więc i $n-2$) jest liczbą parzystą, to są dwa systemy, „formowane" przez dwie rodziny wymiaru $n(n-2)/8 = (2m+2)2m/8 = m(m+1)/2$. Wynik Segre jest więc taki sam, co Griffitha i Harrisa.

Segre nie był pierwszym, który zauważył różnicę między geometrią kwadryki parzysto- i nieparzystowymiarowej. Zagadnienie to rozpatrywał już wcześniej Veronese. Jak zauważył właśnie Segre, w rozumowaniu Veronese był błąd: na kwadryce wymiaru 5 jest „tylko" ∞^6 płaszczyzn dwuwymiarowych, a nie, jak wyliczył Veronese, ∞^9. Dziś, gdy sito recenzenckie jest gęste, takie pomyłki się zdarzają rzadziej.

9. Metoda rzutowania środkowego

Panuje obiegowa, ale poniekąd słuszna opinia, że włoska szkoła geometrii algebraicznej nie mogła osiągnąć więcej, gdyż nieznane było wtedy pojęcie (ko)homologii. Dzisiaj zbadanie relacji zachodzących w pierścieniu kohomologii jest ważnym ogniwem badania geometrii danej rozmaitości. Przypomnimy, że dla rozmaitości algebraicznej X – product określa w sumie prostej grup $\bigoplus H^p(X, \mathbf{Z})$ strukturę pierścienia. Dla $X = \mathbf{P}^n$ generatorami grup kohomologii w kolejnych parzystych wymiarach są klasy podprzestrzeni $\mathbf{P}^k$, $k = 0, \ldots, n$. Relacje w pierścieniu są proste: jeżeli H_k jest klasą przestrzeni kowymiaru k, to $H_k H_l = H_{k+l}$ dla $k + l \leq n$, a $H_k H_l = 0$, gdy suma $k + l$ przekracza n. Segre dowodzi wzoru, który należy uznać za najbardziej istotny dla opisu pierścienia $\mathbf{H}^*(\mathbf{Q}, \mathbf{Z})$. Oczywiście Segre ani nie używa tych pojęć, ani tak naprawdę nie bada struktury tego pierścienia. Nie antycypuje zatem późniejszych badań.

W czasach młodości Segrego rozwijano intensywnie nową metodę badawczą: rzutowanie środkowe. Oczywiście samo pojęcie jest znaczne starsze, ale zastosowanie do badań zbiorów algebraicznych pochodzi z prac Noethera

Np. w dysertacji Feliksa Kleina *Über Liniengeometrie und metrische Geometrie*, Math. Ann, 5, p. 257.

i Kleina, a potem Veronese i innych. Zobaczmy, jak Segre zastosował ją do udowodnienia wzoru na liczbę punktów wspólnych dwóch systemów liniowych na kwadryce. Przytoczmy najpierw początek §4, zatytułowanego *Applicazaioni della proiezione centrale alla geometria su una quadrica. Nuovi teoremi rigurdanti questa geometria.*

> *W badaniach nad geometrią kwadryki więcejwymiarowej wielce pożyteczna jest metoda projekcji centralnej (rzutowania z punktu). Niech będzie dana kwadryka φ wymiaru $n-2$, o której zakładamy, że nie jest osobliwa. W przestrzeni liniowej S wymiaru $n-1$, w której zawarta jest rzeczona kwadryka, wybieramy dowolnie płaszczyznę, czyli przestrzeń* $\mathbf{S}$ *o $n-2$ wymiarach oraz ustalony punkt P na kwadryce, lecz położony poza* $\mathbf{S}$. *Łączymy ten punkt za pomocą (prostych) S_1' ze zmiennymi punktami M kwadryki φ. Każda taka prosta przebija* $\mathbf{S}$ *w punkcie* $\mathbf{M}$. *W ten oto sposób dostajemy projekcję centralną kwadryki w ten sposób, że każdemu punktowi M na φ odpowiada punkt* $\mathbf{M}$ *na* $\mathbf{S}$ *i odwrotnie, każdemu punktowi* $\mathbf{M}$ *na* $\mathbf{S}$ *odpowiada na ogół jedyny punkt M na φ. W tej odpowiedniości są jednak elementy wyjątkowe. Rozpatrzmy oto płaszczyznę φ styczną do φ w punkcie P oraz jej część wspólną* $\mathbf{I}$ *wymiaru $n-3$ z* $\mathbf{S}$. *Punkty leżące na* $\mathbf{I}$ *nie mają jednoznacznie przypisanych odpowiedników na φ. Rozpatrzmy kwadrykę* $\mathbf{C}$ *wymiaru $n-4$, wzdłuż której* $\mathbf{I}$ *przecina φ. W odpowiedniości między punktami kwadryki $(n-2)$-wymiarowej φ i $(n-2)$-wymiarowej przestrzeni liniowej* $\mathbf{S}$, *punktowi P na φ odpowiadają na* $\mathbf{S}$ *wszystkie punkty przestrzeni liniowej* $\mathbf{I}$ *wymiaru $n-3$, które to punkty w pewien sposób reprezentują kierunki na kwadryce w punkcie P. Wśród punktów na* $\mathbf{I}$ *są i takie, które leżą na kwadryce* $\mathbf{C}$ *wymiaru $n-4$ w* $\mathbf{S}$. *One odpowiadają nie jednemu punktowi, lecz wszystkim punktom prostej przechodzącej przez P. Jeżeli rozpatrzmy na φ przestrzeń algebraiczną dowolnego stopnia i wymiaru S_n^g nie przechodzącą przez P, to odpowiada jej na* $\mathbf{S}$ *przestrzeń algebraiczna* $\mathbf{S}_n^g$ *tego samego stopnia i wymiaru.*

Następnie dowodzi:

> *Niech $S_n^{(lm)}$ będzie zbiorem algebraicznym zawartym w kwadryce φ wymiaru $2p$, który przecina ogólny generator pierwszego systemu w l punktach, a ogólny generator drugiego systemu w m punktach. Niech $S_p^{(l'm')}$ będzie zbiorem algebraicznym zawartym w kwadryce φ, który przecina ogólny generator pierwszego systemu w l' punktach, a ogólny generator drugiego systemu w m' punktach. Wówczas $S_n^{(lm)}$ i $S_n^{(l'm')}$ mają $lm' + l'm$ punktów wspólnych, gdy p jest liczbą nieparzystą, zaś $ll' + mm'$ punktów wspólnych, gdy p jest liczbą parzystą.*

Omówimy ten znakomity dowód Segrego. Oznaczmy szukaną liczbę przez X_p. Rzutujemy kwadrykę Q z punktu $P \in Q$ na podprzestrzeń liniową $\mathbf{S}$. Rzuty zbiorów $S_n^{(lm)}$ i $S_n^{(l'm')}$ są zbiorami algebraicznymi stopni odpowiednio $l+m$ oraz $l'+m'$. Zatem przecinają się w $(l+m)(l'+m')$ punktach. Nie znaczy to, że $S_n^{(lm)}$ i $S_n^{(l'm')}$ mają tyle punktów wspólnych, trzeba bowiem pamiętać, że rzutowanie nie jest jednoznaczne na $\mathbf{I}$. A zatem od $(l+m)(l'+m')$ trzeba odjąć liczbę punktów wspólnych tych systemów na $\mathbf{C}$. Ta kwadryka jest wymiaru o 2 mniejszego niż φ, zatem wymiar jej jest również parzysty. Mamy zatem wzór indukcyjny

$$X_p = (l+m)(l'+m') - X_{p-1}.$$

Wynika stąd, że $X_p = X_{p-2}$. Wystarczy więc obliczyć X_1 oraz X_2, czyli liczbę punktów wspólnych odpowiednich systemów w kwadryce wymiaru 2 i w kwadryce wymiaru 4. Wzór dla kwadryki wymiaru 2 wynika wprost z relacji $(*)$ napisanych wyżej. Dla wymiaru 4 korzystamy z interpretacji kwadryki jako przestrzeni parametryzującej rodzinę linii prostych w przestrzeni wymiaru 3. System $S_4^{(lm)}$ to rodzina złożona z l pęków prostych (to znaczy zbiorów prostych przechodzących przez ustalony punkt) i rodzina prostych

Segre nazywa to twierdzeniem Chaslesa i cytuje jego pracę *Propriétés générales des courbes gauches traché es sur l'hyperboloïde*, Compt. Rend. 53 (1861).

leżących na m płaszczyznach. To samo dotyczy drugiego z tych systemów. Jeżeli pierwszy z systemów składa się z prostych przechodzących przez jeden z punktów $x_1, x_2, \ldots, x_l$, oraz z prostych leżących na jednej z płaszczyzn $S_1, S_2, \ldots, S_m$, a drugi odpowiednio z prostych przechodzących przez jeden z punktów $y_1, y_2, \ldots, y_l'$, oraz z prostych leżących na jednej z płaszczyzn $T_1, T_2, \ldots, T_m'$, to systemy mają następujące elementy wspólne: proste łączące x_i z y_j oraz wspólne krawędzie płaszczyzn S_i i T_j – łącznie $ll' + mm'$ punktów.

Segre pisze o tym tak: *ta własność przedstawia ważne twierdzenie Halphena o liczbie punktów wspólnych dwóch podwójnie nieskończonych systemów linii prostych.*

Segre pisze dalej, że ta odpowiedniość między punktami kwadryki a punktami przestrzeni liniowej ma *una grandissima importanza.* Używa jej do wyprowadzenia (po raz trzeci!) liczby przestrzeni $S'_{(n-2)/2}$ zawartych w kwadryce nieosobliwej parzystego wymiaru n. W dowodzie tym (Segre, op. cit, §4.) wykorzystuje się ten sam pomysł, co i w rozumowaniu przedstawionym poniżej: za pomocą rzutowania dochodzi się do wzoru indukcyjnego.

10. Pęki kwadryk i twierdzenie Weierstrassa

Bardzo wartościową częścią pracy Segre jest interpretacja geometryczna twierdzenia Weiestrassa o równoważności pęków kwadryk i szczegółowa ich klasyfikacja w wymiarach 3 i 4. Pękiem kwadryk nazywamy system $\lambda P + \mu Q$, gdzie P i Q są kwadrykami (formami kwadratowymi), zaś λ oraz μ – parametrami. Część wspólna kwadryk P i Q jest rozmaitością stopnia 4 (kwartyką). Zawiera ona wszystkie punkty bazowe systemu.

Kwadryka ma tylko jeden niezmiennik rzutowy: rząd (geometrycznie: wymiar zbioru osobliwości). Dwie kwadryki tego samego rzędu są liniowo równoważne (to znaczy można przekształcić jedną na drugą za pomocą przekształcenia liniowego o niezerowym wyznaczniku). To już w czasach Segre było świetnie znane. Klasyfikacja pęków kwadryk jest zadaniem o wiele trudniejszym. Rozwiązał je Weierstrass wprowadzają pojęcie „dzielników elementarnych". Segre nie tylko wyjaśnił znaczenie geometryczne rozważań Weierstrassa, ale – dzięki tej nowej interpretacji – stworzył bardzo ładny opis geometryczny takich pęków.

Weierstrass, K., *Zur Theorie der bilinearen und quadratische Formen.* Monatsberichte der königl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, maj 1868 r.

Niech A i B oznaczają macierze symetryczne n na n, odpowiadające $(n-1)$-wymiarowym kwadrykom P i Q. Dla pewnych stosunków λ/μ kwadryka $\lambda P + \mu Q$ jest osobliwa; równoważnie, rząd macierzy $\lambda A + \mu B$ jest mniejszy niż n, niech rząd ten będzie równy $n - h + 1$. Ponieważ każdy podwyznacznik jest kombinacją liniową wyznaczników mniejszego rzędu, więc jeżeli λ'/μ' zeruje wszystkie wyznaczniki rzędu $n - h + 1$, to zeruje też wyznaczniki wyższych rzędów. Oznaczmy – zachowując oznaczenia Segrego – przez $l, l', l'', \ldots, l^{(h-1)}$ krotności dywizora $\lambda/\mu - \lambda'/\mu'$ w wyznacznikach kolejnych kowymiarów. Mamy $l \geq l' \geq l'' \geq \ldots \geq l(h-1)$, ciąg kolejnych różnic $e = l - l'$, $e' = l' - l''$, ..., $e^{(h-1)} = l^{(h-1)}$ składa się z liczb nieujemnych. Kolejne potęgi $(\lambda/\mu - \lambda'/\mu')e$ Weierstrass nazwał dzielnikami (dywizorami) elementarnymi i wykazał, że pęki kwadryk są równoważne liniowo wtedy i tylko wtedy, gdy mają te same dzielniki elementarne. Segre nazwał zespół liczb

$$(e_1, e_1', \ldots, e_1^{(h-1)}), \quad (e_2, e_2', \ldots, e_2^{(k-1)}), \quad (e_2, e_2', \ldots, e_2^{(l-1)}), \ldots$$

charakterystyką pęku i podał jej interpretację w terminach dotyczących geometrii kwartyki bazowej pęku, np. typ $(1,1,1,1\ldots1)$ odpowiada pękowi generowanemu przez $\sum_i \lambda_i x^2$ i $\sum_i \mu_i x^2$ oraz kwartyce nieosobliwej.

Suma wszystkich liczb występujących w charakterystyce pęku jest równa n, zatem dla małych n można pokusić się o analizę wszystkich przypadków. Na przykład dla $n = 4$ (czyli kwadryki wymiaru 3) mamy 13 możliwości:

$$(1,1,1,1), (2,1,1), (3,1), (2,2), (4);$$
$$[(1,1),1,1], [(2,1),1], [(1,1),2], [(3,1)], [(2,2)];$$
$$[(1,1),(1,1)];$$
$$[(1,1,1),1], [(2,1,1)],$$

które Segre dokładnie analizuje, pisząc że jest to dokładniejsze przedstawienie znanych już wyników. Następnie przechodzi do przypadku czterowymiarowego.

11. Systemy wzajemnie odwrotne

Ta interesująca własność kwadryki jest dzisiaj zapomniana. Segre podaje następujące określenie: dwa systemy liniowe wymiaru $m-1$ w przestrzeni wymiaru $n-1$ są wzajemnie odwrotne, jeżeli każdemu punktowi pierwszego systemu odpowiada $(m-2)$-wymiarowy podsystem drugiego i na odwrót, każdemu punktowi drugiego systemu odpowiada $(m-2)$-wymiarowy podsystem pierwszego. Ujmując rzecz precyzyjnie, system

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \ldots + \lambda_m U_m = 0$$

nazywa się odwrotnym do

$$\mu_1 V_1 + \mu_2 V_2 + \ldots + \mu_m V_m = 0$$

gdy istnieje macierz $A = [a_{ik}]$, taka, że $\sum_{i,j}^{n} a_{ik}\lambda_i\mu_k = 0$.

Symbole U_i i V_j oznaczają funkcje opisujące podrozmaitości kowymiaru 1. Niezbyt trudnym zadaniem z algebry liniowej jest:

> Znaleźć miejsce geometryczne punktów x należących do jednej z podrozmaitości U_i i wszystkich V_j.

Odpowiedź: Równaniem tym jest

$$\begin{vmatrix} 0 & U_1 & U_2 & \ldots & U_m \\ V_1 & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ V_2 & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ V_m & a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix} = 0.$$

Na przykład, gdy $U_i = V_i = x_i$, A jest zaś macierzą jednostkową, to wartością tego wyznacznika jest $-\sum_{i=1}^{n} x_i^2$. Widzimy zatem, że kwadryka ta może być zrealizowana jako miejsce geometryczne punktów odpowiadających dwóm systemom odwrotnym (hiper)płaszczyzn, w sensie jak napisaliśmy wyżej.

Zbiorem punktów bazowych systemów nazywamy zbiór punktów należących do wszystkich rozmaitości tego systemu; na przykład punktem bazowym pęku prostych na płaszczyźnie jest punkt wyznaczający ten pęk. Jeżeli $2m \geq n$, to dwa systemy wzajemnie odwrotne (hiper)płaszczyzn stopnia $m-1$ nie mają punktów bazowych, a gdy $2m < n$, to zbiorem tych punktów bazowych jest przestrzeń liniowa S wymiaru $n-m-1$, zawarta w kwadryce, którą te systemy generują. Łatwo zauważyć, że zbiór punktów bazowych systemów odwrotnych, generujących daną kwadrykę, leży na tej kwadryce.

Segre dowodzi interesującego faktu, w pewnym sensie odwrotnego do poprzedniego stwierdzenia. Mianowicie, że dana kwadryka może być otrzymana z systemów odwrotnych płaszczyzn o zadanym zbiorze punktów bazowych. Dokładniej, dla każdej przestrzeni linowej S wymiaru $n-m-1$, zawartej w kwadryce φ, istnieją takie systemy odwrotne, które generują φ i których zbiorem punktów bazowych jest S.

Teoria grup w czasach Segre była dobrze rozwinięta, ale „program Kleina" najwyraźniej nie ugruntował się jeszcze w świadomości matematyków. Segre oblicza wymiar grupy ortogonalnej, nie używając explicite tego pojęcia. Oblicza on, „ile" jest układów n punktów, z których każdy jest biegunowy do każdego (względem kwadryki danej). Ładne rozważania prowadzą do wyniku: $n(n-1)/2 + h(h-1)/2$, gdzie h jest wymiarem zbioru punktów osobliwych kwadryki. Wobec tego jest $n(n-1)/2 + h(h-1)/2$ razy nieskończoność sposobów przeprowadzenia kwadryki w siebie. Segre zauważa, że jest to więcej, niż liczba przestrzeni liniowych S wymiaru $n-m-1$, zawartych w kwadryce, zatem istotnie każdą kwadrykę da się otrzymać za pomocą systemów odwrotnych o z góry zadanym locusie punktów bazowych. Oblicza także, ile jest takich systemów.

12. Kwadryka dzisiaj

Co się tyczy samej geometrii kwadryki, praca Segrego była bardzo kompletna. Dzisiaj znamy oczywiście różne niezmienniki topologiczne kwadryki, jej grupy (ko)homologii i pierścień kohomologii.

Tematyka „kwadryki" nawet dzisiaj nie jest zamkniętym rozdziałem geometrii algebraicznej. W późnych latach siedemdziesiątych ubiegłego wieku odkryto bowiem bardzo interesujące związki między algebraiczną teorią wiązek wektorowych (głównie: konstrukcja przestrzeni *moduli*) a klasycznymi zagadnieniami geometrii algebraicznej XIX wieku. Okazało się, że własności wiązek wektorowych bardzo ściśle wiążą się z geometrią przestrzeni, na której są określone.

Ghione i Ottaviani, op.cit. piszą: *We would like to reflect on how the irregular flow of the mathematical (and cultural) fashions, with its whirlpools, can bury, for decades, entire theories, outstanding results and methods, to see them come again out of necessity but without apparent link with their origin.*

Poświęcona im jest np. rozprawa doktorska Feliksa Kleina. P. też Jessop...

[GH] Griffiths, Ph., Harris, J., *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley & Sons, New York 1978.

Np. Arrondo, E., Sols, I., Classification of smooth congruences of low degrees, Journal f. reine u. angewandte Math. 393, pp. 199–219 (1989).

Najważniejszą kwadryką jest położona w rzutowej przestrzeni pięciowymiarowej kwadryka Kleina Q_4. Parametryzuje ona zbiór wszystkich linii prostych w $\mathbf{P}^3$, zatem jej badanie jest równoważne z badaniem konfiguracji linii prostych w przestrzeni trójwymiarowej. Część wspólna Q_4 i hiperpłaszczyzny w $\mathbf{P}^5$ jest nazywana liniowym systemem linii prostych (linear line complex). Takie systemy były już dobrze zbadane w początkach ubiegłego wieku, a dokładniejsze informacje znajdzie Czytelnik np. w książce Griffithsa i Harrisa. Wiele wiemy też o *kongruencjach* małych stopni, to znaczy o klasyfikacji powierzchni położonych na kwadryce Kleina. Bardzo ciekawe są związki między geometrią Q_4 a geometrią przestrzeni moduli algebraicznych stabilnych wiązek wektorowych rangi 2 o klasach Cherna $c_1 = 0$, $c_2 = 1$ (są tak zwane wiązki korelacji zer).

Patrz np. Okonek, Schneider, Spindler, *Moduli of vector bundles on projective spaces*, Birkhäuser 1981, a także: Jaczewski, K., Szurek, M., Wiśniewski, J. *Jumping lines of Tango bundles*, Teubner Texte zur Mathematik, Berlin 1984.

Ottaviani, G., Szurek, M., op. cit.

Często zbiór linii prostych na rozmaitości algebraicznej X nazywa się rozmaitością Fano, $F(X)$, od nazwiska matematyka włoskiego Gino Fano. Jest zrozumiałe, że $F(Q_2) = \mathbf{P}_1 \cup \mathbf{P}_1$ (dwie kopie prostej rzutowej) Wiadomo, że $F(Q_3)$ ma naturalną strukturę trójwymiarowej przestrzeni rzutowej. To wiedziano już na przełomie wieków XIX i XX, a z rozwijanej intensywnie teorii Mori można otrzymać zadziwiające opisy niektórych $F(X)$, jak również dowód znanej Grassmannowi zależności, że $F(\mathbf{P}^3) = Q_4$.

Wyczerpującym źródłem wiadomości o teorii Mori może być: Kawamata, Y., Matsuda, K., Matski, K., *Introduction to the Minimal Model Problem*. Proc. Sendai Conf. Adv. In Pure Math., 10 (1987).

Patrz np. Szurek, M., Wiśniewski, J., *On Fano manifolds, which are P^k-bundles over P^2*. Nagoya Math. Journal, 120, p. 89–101 (1990).

Szczegóły np. w pracy, Szurek, M., Wiśniewski, J., *On Fano manifolds...*, Nagoya Math. Jour. 120, pp 89–101 (1990).

Zauważmy ciekawą rzecz:
Każde zanurzenie kwadryki wymiaru 3 w kwadrykę wymiaru 4:

$$Q_3 \subset Q_4,$$

wyznacza izomorfizm i czterowymiarowej przestrzeni liniowej V na V^* taki, że dla każdego $x \in Q_4$ zachodzi $x \in i(x)$. Wyznacza także utożsamienie $F(X)$ z przestrzenią trójwymiarową $\mathbf{P}^3$.
Dowód I („dziewiętnastowieczny"). Niech V oznacza przestrzeń afiniczną, której projektywizacją jest $\mathbf{P}^3$. Przy zanurzeniu $Q_3 \subset Q_4$ prosta L jest zawarta w dokładnie dwóch płaszczyznach P_1, P_2, pochodzących z dwóch systemów tworzących na Q_4. Niech $P_1 = \{l \subset \mathbf{P}^3 : x \in l\}$, $P_2 = \{l \subset \mathbf{P}^3 : l \subset P\}$. Wówczas odpowiedniość $L \to x$ określa izomorfizm $F(Q_3)$ na $\mathbf{P}^3$, zaś odpowiedniość $L \to P$ określa izomorfizm $F(Q_3)$ na $\mathbf{P}^{3*}$.
Dowód II („współczesny", szkic). Rozpatrzmy wiązkę spinorową S na Q_3. Jest to wiązka stabilna rangi 2, o klasach Cherna $c_1 = 1$, $c_2 = -1$. Na każdej prostej $L \subset Q_3$ mamy $S|L = O \oplus O(1)$. Projektywizacja $P(S)$ jest rozmaitością Fano wymiaru 4. Można wykazać, że system liniowy ξ_i definiuje odwzorowanie $P(S)$ w $\mathbf{P}^3$ i że jest to kontrakcja w sensie teorii Mori. Ponieważ $S|L = O \oplus O(1)$, więc w projektywizacji $\pi : P(S) \to Q_3$ istnieje krzywa l, która przekształca się izomorficznie na l. Musi być ona zatem ściągnięta do punktu przez odwzorowanie wyznaczone przez system liniowy ξ_S.

Ottaviani, G., Szurek, M., *Moduli of rank-2 vector bundles with small Chern classes on Q_3*. Annali di. Math. Pura ed appl. (1984).

Ottaviani, G., *Spinor bundles on Quadrics*, Trans. Amer. Math. Soc. 307, 1, p. 301-316 (1988).

Do badań nad „geometrią kwadryki" zaliczyć można też prace poświęcone przestrzeniom moduli algebraicznych wiązek wektorowych na niej. Z „praktyki matematycznej" wynika bowiem, że wiedza o tym, jakie wiązki wektorowe mogą istnieć na danej rozmaitości, może dawać ciekawe informacje o geometrii tej rozmaitości. Wspomnimy tu wynik o tym, że struktura przestrzeni moduli stabilnych wiązek rangi 2 o klasach Cherna $c_1 = 0$, $c_2 = 2$ na Q_3 daje się opisać w terminach geometrii symplektyczno-symetrycznej na $\mathbf{P}^3$ to znaczy geometrii przestrzeni $\mathbf{P}^3$, w której dane są dwie formy: kwadratowa (symetryczna) i symplektyczna (skośnie symetryczna).

Segre mógł tylko wyliczyć wymiar rodziny przestrzeni liniowych zawartych w Q_n. Pytanie o strukturę algebraiczną tego zbioru jest znacznie późniejsze.

Rozmaitość parametryzująca jedną z rodzin przestrzeni liniowych wymiaru $(\dim Q)/2$ nosi miano rozmaitości spinorowej i jest dość dobrze zbadana.

Dodatek

Współrzędne Plückera jako ćwiczenie z algebry liniowej dla studentów.

Niech $L = L(a, b)$ będzie linią prostą przez dwa punkty $a = (a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbf{P}^3$, $b = (b_0, b_1, b_2, b_3) \in \mathbf{P}^3$. W języku pakietu Mathematica funkcję, zwracającą (jak to mawiają informatycy) współrzędne Plückera prostej może być

```
plucker[{p_, q_}] :=

Flatten[Minors [{Table [p[[j]], {j,1,4}], Table [q[[j]],

{j,1,4}]}, 2]]
```

Procedurą wyznaczającą prostą, gdy dane są jej współrzędne Plückera jest

```
prosta [{ p_{01}_, p_{02}_, p_{03}_, p_{12}_, p_{13}_, p_{23}_}] :=

NullSpace %[ {{0, p_{23}, -p_{13},
p_{12}}, {p_{23},0,-p_{03},p_{02}}, {p_{13},-p_{03},0,p_{01}},
{p_{12},-p_{02},p_{01},0}} ]
```

i można poprosić komputer o sprawdzenie, że tak jest naprawdę.

Kiedy dwie proste się przecinają?

```
czyprzecina[ {p_,q_} ] :=

If [ p.(Times[ {1,-1,1,1,-1,1},Reverse[q]])==0, True, False ]
```

Następująca zaś funkcja podaje równanie (dokładniej: formę liniową) opisującą hiperpłaszczyznę złożoną z prostych przecinających prostą (o współrzędnych Pluckera) p.

```
przecina[p_] := p.{p_{23}, -p_{13}, p_{12}, p_{03}, -p_{02}, p_{01}}
```

Można „poprosić" komputer o wyznaczenie prostych przecinających cztery dane, można komputerowo badać własności systemów liniowych. Można użyć programu Macaulay do „wyprowadzenia" równania kwadryki Kleina i prowadzić wiele innych badań, ale geometrię kwadryki da się jeszcze ogarnąć „ludzkim" okiem i umysłem.