Streszczenie referatu z XXVI Szkoły Matematyki Poglądowej „Twierdzenia z pogranicza", Grzegorzewice, 26–30.01.2001

Autor pracuje w Instytucie Matematyki Politechniki Wrocławskiej;
Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław;
e-mail: szajow@im.pwr.wroc.pl

Losowość jako metoda

Krzysztof SZAJOWSKI, Wrocław

W zadaniach optymalizacji i teorii gier zdarza się, iż nie udaje się wyznaczyć rozwiązania w zadanej klasie strategii. Randomizacja jest wówczas jednym z możliwych rozszerzeń klasy strategii prowadzącym do rozwiązania zadania. Dla ilustracji tego problemu rozpatrzone zostaną zagadnienia ze skończonym zbiorem strategii.

1. Zadania optymalizacji ze skończonymi zbiorami decyzji

1.1. Model 1

Rozważmy skończony zbiór na prostej $\mathcal{S} = \{s_1, s_2, \ldots, s_K\} \subset \Re$ i funkcję $f : \mathcal{S} \to \Re$. Elementy zbioru $\mathcal{S}$ nazywać będziemy strategiami. Na początek zajmiemy się zadaniem maksymalizacji funkcji $f(\cdot)$ na $\mathcal{S}$. Istnieje element $s^* \in \mathcal{S}$ taki, że

$$f(s^*) = \max_{s\in\mathcal{S}} f(s). \tag{1}$$

Niech

$$\mathfrak{S} = \{\bar{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_K) : \sum_{i=1}^{K} p_i = 1; p_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, K\}. \tag{2}$$

Oznaczmy

$$\mathbf{E}_{\bar{p}} f(S) = \sum_{i=1}^{K} p_i f(s_i). \tag{3}$$

Liczbę $f^* = \sup_{\bar{p}\in\mathfrak{S}} \mathbf{E}_{\bar{p}} f(S)$ nazywać będziemy wartością rozszerzonego zadania maksymalizacji funkcji $f(\cdot)$.

Lemat 1. *Spełniona jest równość $f^* = f(s^*)$.*

Proof. Ponieważ $\mathcal{S} \subset \mathfrak{S}$, więc $\sup_{s\in\mathcal{S}} f(s) \leq f^*$. Z drugiej strony $f^* = \sup_{\bar{p}\in\mathfrak{S}} \mathbf{E}_{\bar{p}} f(S) \leq f(s^*)$, bo $p_i \geq 0$. □

Oznacza to, że rozszerzenie zbioru strategii $\mathcal{S}$ do zbioru strategii zrandomizowanych $\mathfrak{S}$ nie pozwala na powiększenie wartości zadania maksymalizacji. Interpretacja randomizacji w tym przypadku mogłaby być taka, że wielokrotnie powtarzamy pewien zakład i w zależności od stawki $s \in \mathcal{S}$ otrzymujemy wypłatę $f(s)$. Zastosowanie strategii $\bar{p}$ polega na tym, że stawkę s_i stosujemy w $p_i * 100\%$ przypadków, $i = 1, 2, \ldots, K$.

1.2. Model 2

Rozpatrujemy zbiory strategii jak w podrozdziale 1.1. Określimy funkcję celu $f : [\min(\mathcal{S}), \max(\mathcal{S})] \to \Re$. Niech

$$\bar{f}^* = \sup_{\bar{p}\in\mathfrak{S}} f(\mathbf{E}_{\bar{p}} S). \tag{4}$$

Przy tym podejściu może zdarzyć się, że $f(s^*) < \bar{f}^*$. Ponadto, istnieje $\bar{p}^*$, skupiona na co najwyżej dwóch punktach, taka, że $\bar{f}^* = f(\mathbf{E}_{\bar{p}^*} S)$.

Przykład 1. *Niech $\mathcal{S} = \{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\}$ i niech $f(x) = -x^2$, dla $x \in [-1, 1]$.*

Mamy wówczas $s^* = \frac{1}{2}$ lub $s^* = -\frac{1}{2}$. Wartość zadania maksymalizacji opisanego w podrozdziale 1.1 wynosi $f(s^*) = -\frac{1}{4} = f^*$, natomiast $\bar{f}^*$ wynosi 0, a $\bar{p}^* = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ lub $\bar{p}^* = (\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2})$. Jest więcej strategii losowania dających wartość problemu 0, np. $\bar{p}^* = (\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}, 0)$.

Podane przykłady modeli podejmowania decyzji mają na celu przybliżenie pojęcia randomizacji decyzji i strategii zrandomizowanej. Zrandomizowane strategie mają duże znaczenie w modelach gier strategicznych. Ograniczymy się tutaj do gier dwuosobowych.

2. Gry skończone

Matematyczne modele *teorii gier strategicznych* powstały w latach trzydziestych XX wieku. Za twórcę matematycznej teorii gier uważa się J. von Neumanna. Pierwszą monografią teorii gier była książka von Neumanna i Morgensterna [5]. Inne opracowania tej tematyki można znaleźć w książkach G. Owena [6], J. Grenia [1] czy też popularnym opracowaniu M. Malawskiego, A. Wieczorka i H. Sosnowskiej [2]. Gry strategiczne są modelem wielu sytuacji konfliktowych, w których występują strony dążące do przeciwstawnych celów. Strony te nazywamy graczami, a rezultat konfliktu wygraną jednej ze stron. W grze może występować dwóch lub więcej graczy. Grę, w której występują dwaj gracze nazywamy *grą dwuosobową*. Ograniczymy się tutaj do takich gier.

Podstawowymi pojęciami teorii gier są: *strategie graczy* oraz *funkcja wypłaty w grze.* Jeśli zbiory alternatywnych akcji graczy są skończone, to mówimy o grze skończonej. Funkcja wypłaty gry, to przyporządkowanie każdemu wybranemu przez graczy układowi akcji wypłaty przypadającej każdemu z nich. Warunki gry – zbiory strategii i funkcje wypłaty – są znane graczom.

Definicja 1. Grą $\mathcal{G}$ w postaci normalnej nazywamy czwórkę $(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, f_1, f_2)$, gdzie $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ są ustalonymi zbiorami strategii odpowiednio gracza 1 i 2, a $f_k : \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2 \to \Re$, $k = 1, 2$, są funkcjami wypłaty graczy.

Jeśli zbiory strategii są skończone, to wygodną formą zapisu funkcji wypłaty są macierze. Niech $a_{ij} = f_1(s_i^1, s_j^2)$ i $b_{ij} = f_2(s_i^1, s_j^2)$, $i = 1, 2, \ldots, |\mathcal{S}_1|$, $j = 1, 2, \ldots, |\mathcal{S}_2|$, gdzie $s^k_\cdot \in \mathcal{S}_k$, a $|\mathcal{S}_k|$ jest liczbą elementów w zbiorze $\mathcal{S}_k$, $k = 1, 2$. Wówczas postać normalną gry możemy zapisać następująco: $(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, A, B)$, gdzie $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ i nazywać grą dwumacierzową. Jeśli $B = -A$, to mówimy, iż gra jest o sumie zerowej, gdyż przy każdym wyborze strategii przez obu graczy suma ich wypłat jest równa zero. Postać normalna tej gry to trójka $(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, A)$, a A nazywamy macierzą gry. Analiza gier o sumie zerowej jest prostsza i od tej klasy gier zaczniemy rozważania.

2.1. Gry macierzowe o sumie zerowej

Przykład 2. *Gra $\mathcal{G}$ polega na tym, że dwaj gracze 1 i 2 zapisują jednocześnie, w tajemnicy przed sobą, jedna z trzech liczb:* 1, 2, 3. *Jeżeli suma wybranych liczb jest parzysta, to gracz 2 płaci pierwszemu tę sumę. Przy sumie nieparzystej gracz 1 płaci drugiemu sumę zapisanych liczb. Macierz wypłat w tej grze ma postać:*

(5)

Decyzje gracza 2 → *Decyzje gracza 1* ↓	1	2	3
1	−2	3	−4
2	3	−4	5
3	−4	5	−6

Analizując ten przypadek, jak i w innych grach dwuosobowych o sumie zerowej, zakładamy, iż obaj gracze są rozumnymi i antagonistycznie nastawionymi do siebie przeciwnikami. Obaj dążą do wyboru możliwie najlepszej strategii i zdają sobie sprawę, że przeciwnik będzie robił to samo. To oznacza, że każdy z graczy będzie wybierał najostrożniejszą strategię, czyli najlepszą odpowiedź na strategię najlepszą dla przeciwnika.

Sprecyzujemy pojęcie rozwiązania gry w następującej (patrz [6] lub [1] w celu uzupełnienia brakujących szczegółów) definicji.

Definicja 1. Dla gry $\mathcal{G} = (\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, A)$ wprowadzamy następujące pojęcia:

1. liczbę

(6)
$$v_1 = \max_{s_i^1 \in \mathcal{S}_1} \min_{s_j^2 \in \mathcal{S}_2} f_1(s_i^1, s_j^2) = \max_{1 \le i \le |\mathcal{S}_1|} \min_{1 \le j \le |\mathcal{S}_2|} a_{ij}$$

nazywamy *dolną wartością gry*, a strategię $s_{i_0}^1 \in \mathcal{S}_1$ taką, że $v_1 = \min_{s_j^2 \in \mathcal{S}_2} f_1(s_{i_0}^1, s_j^2)$ nazywamy *maksyminową*;

2. liczbę

(7) $$v_2 = \min_{s_j^2 \in \mathcal{S}_2} \max_{s_i^1 \in \mathcal{S}_1} f_1(s_i^1, s_j^2) = \min_{1 \leq j \leq |\mathcal{S}_2|} \max_{1 \leq i \leq |\mathcal{S}_1|} a_{ij}$$

nazywamy *górną wartością gry* a strategię $s_{j_0}^2 \in \mathcal{S}_2$ taką, że $v_2 = \max_{s_i^1 \in \mathcal{S}_1} f_1(s_i^1, s_{j_0}^2)$ nazywamy *minimaksową*;

3. jeśli zachodzi równość $v_1 = v_2 = v$, to mówimy, że gra ma *wartość*, a liczbę v nazywamy *wartością gry*.

4. jeśli gra skończona ma wartość, to parę strategii $s^{1^*} \in \mathcal{S}_1$ i $s^{2^*} \in \mathcal{S}_2$ odpowiadającą wartości gry nazywamy odpowiednio *strategią optymalną* gracza 1 i strategią optymalną gracza 2;

5. dla gry macierzowej wartością gry jest punkt siodłowy macierzy gry A, czyli element $a_{i^\bullet j^\bullet}$ macierzy A o własności:

(8) $$a_{ij^\bullet} \leq a_{i^\bullet j^\bullet} \leq a_{i^\bullet j}.$$

Wyznaczenie strategii optymalnych gracza 1 i gracza 2 oraz wartości gry v nazywamy *rozwiązaniem* gry.

Rozwiązanie gry skończonej nie zawsze istnieje. Jest to związane z tym, że punkt siodłowy macierzy $n \times m$ rzadko istnieje. Pokazano w [7], [8] (Autor dziekuje dr Andrzejowi Dąbrowskiemu za wskazanie tych artykułów), że jeśli elementy macierzy są obserwacjami niezależnych, o jednakowym rozkładzie typu ciągłego zmiennych losowych, to prawdopodobieństwo wystąpienia punktu siodłowego w takiej macierzy wynosi $m!n!/(m+n-1)!$.

Przykład 3 (c.d. przykładu 2). *Wartość dolna* $v_1 = -4$, *a wartość górna* $v_2 = 5$. *Mamy tutaj* $v_1 \neq v_2$. *Oznacza to, że wartość gry zgodna z definicją* 1. *nie istnieje.*

Sposobem na rozwiązanie problemu istnienia wartości gry i strategii optymalnych dla obu graczy jest rozszerzenie zbioru strategii tak, jak w (2).

Definicja 3. Jeśli gra $\mathcal{G} = (\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, f)$ jest grą skończoną, to grę $\Gamma = (\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, K)$, gdzie

$$K(\bar{p}, \bar{q}) = \mathbf{E}_{(\bar{p},\bar{q})} f(S_1, S_2) = \sum_{s_i^1 \in \mathcal{S}_1} \sum_{s_j^2 \in \mathcal{S}_2} p_i q_j f(s_i^1, s_j^2)$$
$$= \sum_{1 \leq i \leq |\mathcal{S}_1|} \sum_{1 \leq j \leq |\mathcal{S}_2|} p_i q_j a_{ij}$$

nazywamy *mieszanym rozszerzeniem* gry $\mathcal{G}$. $\mathfrak{S}_1$ oraz $\mathfrak{S}_2$ są zbiorami wszystkich zrandomizowanych strategii gracza 1 i 2, odpowiednio.

Podobnie jak dla gry $\mathcal{G}$, dla jej mieszanego rozszerzenia Γ definiowana jest wartość dolna i wartość górna. Zbiory strategii $\mathfrak{S}_i$, $i = 1, 2$ są zbiorami nieskończonymi. Oznaczmy $k_1 = \inf_{\bar{p}} \sup_{\bar{q}} K(\bar{p}, \bar{q})$ oraz $k_2 = \inf_{\bar{p}} \sup_{\bar{q}} \inf_{\bar{p}} K(\bar{p}, \bar{q})$. Ze względu na to, iż zbiór strategii czystych spełnia $\mathcal{S}_i \subset \mathfrak{S}_i$, $i = 1, 2$, mamy

Lemat 2.

$$v_1 \leq k_1 \leq k_2 \leq v_2.$$

J. von Neumann [4] pokazał, że

Twierdzenie 1. *Dla każdej gry skończonej* $\mathcal{G}$ *jej mieszane rozszerzenie* Γ *ma wartość.*

Zatem w tym przypadku **losowość** jest dobrym sposobem na usunięcie problemu braku wartości gry. Strategie optymalne gracza 1 i 2 można wyznaczyć przez sformułowanie odpowiedniego zadania programowania liniowego i programu dualnego do niego.

Przykład 4 (c.d. przykładu 2 i 3). *W celu wyznaczenia strategii optymalnej w grze mieszanej zwiększamy elementy macierzy wypłat* (5) *tak, aby wartość gry była dodatnia. Dodając* 2 *otrzymamy macierz wypłat gracza 1*

0	5	−2
5	−2	7
−2	7	−4

Jeśli gracz 1 stosuje strategię s_1^1, to stosując strategie $\bar{q}$ gracz 2 przeciętnie traci $5q_2 - 2q_3$ i musi wybrać taki rozkład $\bar{q}$, aby $5q_2 - 2q_3 \leq v$, gdzie v jest wartością mieszanego rozszerzenia gry. Analiza taka prowadzi do następującego zadania programowania liniowego:

$$\begin{array}{rrl} & & \min v \\ & 5q_2 - 2q_3 & \leq v \\ 5q_1 - & 2q_2 + 7q_3 & \leq v \\ -2q_1 + & 7q_2 - 4q_3 & \leq v \\ q_1 \geq 0 & q_2 \geq 0 & q_3 \geq 0 \\ q_1 + & q_2 + q_3 & = 1. \end{array}$$

Rozwiązaniem tego zadania programowania liniowego jest $v = 2$ i $q_1 = q_3 = \frac{1}{4}$, $q_2 = \frac{1}{2}$. Ze względu na symetrię macierzy wypłat strategia optymalna gracza 1 jest taka sama jak gracza 2. Wartość wyjściowego mieszanego rozszerzenia gry o macierzy wypłat (5) *jest równa* 0.

Dla gier macierzowych o sumie zerowej (patrz także [3]), gdy zbiór strategii $\mathcal{S}_i^0 = \{s_1, s_2\}$ jest dwuelementowy, a macierz gry ma postać

(9) $$A = \begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline \end{array}$$

otrzymujemy

Twierdzenie 2. *Dla gry dwuosobowej o sumie zerowej z macierzą gry* (9) *przez bezpośrednie sprawdzenie mamy*

1. *jeśli $[a, d] \cap [b, c] \neq \emptyset$ to gra $\mathcal{G} = (\mathcal{S}_1^0, \mathcal{S}_2^0, A)$ ma rozwiązanie;*
2. *jeśli $[a, d] \cap [b, c] = \emptyset$, to gra $\mathcal{G}$ nie ma rozwiązania. Mieszane rozszerzenie tej gry Γ ma wartość $v = \frac{ad-bc}{b-a+c-d}$. Strategia optymalna gracza 1 to $p_1 = \frac{b-d}{b-a+c-d}$ a gracza drugiego $q_1 = \frac{c-d}{b-a+c-d}$.*

2.2. Gry macierzowe o sumie niezerowej

Niech $\mathcal{G} = (\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, f_1, f_2) = (\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, A, B)$. Analiza gry dwuosobowej o sumie niezerowej sprowadza się do wyznaczenia punktu równowagi Nasha i wartości Nasha.

Definicja 4. Mówimy, że para strategii (s_1^*, s_2^*) jest w równowadze (jest równowagą Nasha), jeśli

$$v_1^* = f_1(s_1^*, s_2^*) \geq f_1(s_1, s_2^*) \text{ dla każdego } s_1 \in \mathcal{S}_1,$$
$$v_2^* = f_2(s_1^*, s_2^*) \geq f_2(s_1^*, s_2) \text{ dla każdego } s_2 \in \mathcal{S}_2.$$

Parę liczb (v_1^*, v_2^*) nazywamy wartością Nasha odpowiadającą równowadze Nasha (s_1^*, s_2^*).

W celu ilustracji tej koncepcji podane zostaną przykłady gier dwumacierzowych z dwuelementowymi zbiorami strategii graczy. Macierze wypłat są wówczas wymiaru 2 × 2. Koncepcja Nasha rozwiązania gry dwumacierzowej nie jest podejściem zadowalającym. Punkt równowagi zgodny z definicją 4 nie zawsze istnieje. Jeśli istnieje, to nie musi być wyznaczony jednoznacznie.

Przykład 5 (Walka płci). *Pewne małżeństwo każdej niedzieli stoi przed dylematem: pójść na zawody sportowe albo do kina. Mężczyzna woli, przeciwnie niż kobieta, imprezę sportową niż kino. Spędzanie czasu osobno nie daje zadowolenia żadnemu z nich. Mamy zatem $\mathcal{S}_M = \mathcal{S}_K = \{s, k\}$ i macierz wypłat*

(10)

żona → *mąż ↓*	s	k
s	$(4, 1)$	$(0, 0)$
k	$(0, 0)$	$(1, 3)$

W tej grze mamy dwie pary strategii w równowadze: (s, s) oraz (k, k). Dają one odpowiednio wartości Nasha: $(4, 1)$ oraz $(1, 3)$.

Przykład 6. *Niech* $\mathcal{S}_1 = \{g, d\}$, $\mathcal{S}_2 = \{l, p\}$ *i macierz wypłat*

(11)

$B\rightarrow$ $A\downarrow$	l	p
g	$(2,2)$	$(4,1)$
d	$(4,1)$	$(3,3)$

Ta gra dwumacierzowa nie ma punktu równowagi Nasha zgodnego z definicją 4.

Przykład 7 (Dylemat więźnia). *Dwóch przestępców złapanych na gorącym uczynku osadzono w celach bez możliwości porozumiewania się. Obaj wiedzą, iż obowiązują następujące reguły przy wyznaczaniu wysokości wyroku:*

1. *jeśli się przyznasz, a kolega się nie przyzna, to dostaniesz* 1 *miesiąc, a kolega* 10 *miesięcy więzienia;*

2. *jeśli obaj się przyznacie, to dostaniecie po* 5 *miesięcy więzienia;*

3. *jeśli żaden z was nie przyzna się, to dostaniecie po* 2 *miesiące.*

Mamy zatem $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2 = \{p, n\}$ *i macierz wypłat*

(12)

$W_2 \rightarrow$ $W_1 \downarrow$	p	n
p	$(5,5)$	$(1,10)$
n	$(10,1)$	$(2,2)$

Gracze chcą znaleźć rozwiązanie, które **zminimalizuje** *im wyrok (zrealizuje przeciwne nierówności w definicji* 4. *W tej grze mamy parę strategii w równowadze:* (p, p). *Daje ona wartości Nasha:* $(5, 5)$. *Wprawdzie, jeśli obaj „pomyla się" i zagrają* (n, n), *to uzyskają lepszy wynik* $(2, 2)$. *Jednak istnieje możliwość „wpadki", jeśli jeden z graczy będzie chciał drugiego przechytrzyć.*

Przytoczone przykłady pokazują, iż podana definicja punktu równowagi Nasha nie jest zadowalająca. Przykład 6 nie ma rozwiązania w myśl definicji 4. Mieszane rozszerzenie gry dwumacierzowej pozwoli na usunięcie tej niedogodności. Wprowadzimy oznaczenie:

$$\begin{aligned} K_k(\bar{p}, \bar{q}) = \mathbf{E}_{(\bar{p},\bar{q})} f_k(S_1, S_2) &= \sum_{s_i^1 \in \mathcal{S}_1} \sum_{s_j^2 \in \mathcal{S}_2} p_i q_j f_k(s_i^1, s_j^2) = \\ &= \sum_{1 \le i \le |\mathcal{S}_1|} \sum_{1 \le j \le |\mathcal{S}_2|} p_i q_j a_{ij}(k), \end{aligned}$$

gdzie $k = 1, 2$. Zbiory $\mathfrak{S}_1$ oraz $\mathfrak{S}_2$ są zbiorem wszystkich zrandomizowanych strategii gracza 1 i 2, odpowiednio. Jeśli elementy zbiorów $\mathfrak{S}_i$ interpretować jako wektory wierszowe, to

$$K_k(\bar{p}, \bar{q}) = \bar{p} A(k) \bar{q}^T.$$

Definicja 5. Jeśli gra $\mathcal{G} = (\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, f_1, f_2) = (\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, A(1), A(2))$ jest grą dwuosobową o sumie niezerowej, skończoną, to grę $\Gamma = (\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, K_1, K_2)$, nazywamy mieszanym rozszerzeniem gry $\mathcal{G}$.

Mówimy, że para strategii mieszanych $(\bar{p}^*, \bar{q}^*) \in \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2$ jest w równowadze (jest równowagą Nasha), jeśli

$$\begin{aligned} v_1^* &= K_1(\bar{p}^*, \bar{q}^*) \geq K_1(\bar{p}, \bar{q}^*) \text{ dla każdego } \bar{p} \in \mathfrak{S}_1, \\ v_2^* &= K_2(\bar{p}^*, \bar{q}^*) \geq K_2(\bar{p}^*, \bar{q}) \text{ dla każdego } \bar{q} \in \mathfrak{S}_2. \end{aligned}$$

Parę liczb (v_1^*, v_2^*) nazywamy wartością Nasha odpowiadającą mieszanej równowadze Nasha $(\bar{p}^*, \bar{q}^*)$.

Lemat 3 [3]. *Niech* $|\mathcal{S}_1| = |\mathcal{S}_2|$ *oraz niech* $A(k)$, $k = 1, 2$, *będą macierzami nieosobliwymi wypłat gracza* 1 *i* 2. *Oznaczmy* $= (1, 1, \ldots, 1)$. *Jeśli gra* $\Gamma = (\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, K_1, K_2)$ *ma istotnie mieszaną równowagę Nasha* $(\bar{p}^*, \bar{q}^*)$, *to jest ona jedyna i można ją wyznaczyć ze wzorów:*

$$\begin{cases} \bar{p}^* = v_2 A^{-1}(2), \\ \bar{q}^* = v_1 A^{-1}(1)^T, \end{cases}$$

gdzie $v_k = \frac{1}{A^{-1}(k)^T}$, $k = 1, 2$, *jest wartością gry.*

Przykład 8 (c.d. przykładu 5). *W przykładzie zwanym „walka płci" prócz dwóch czystych punktów równowagi jest jeszcze istotnie mieszany punkt równowagi. Z Lematu* 3 *otrzymujemy* $\bar{p} = (\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$, $\bar{q} = (\frac{1}{5}, \frac{4}{5})$ *i* $(v_1^*, v_2^*) = (\frac{4}{5}, \frac{3}{4})$.

Przykład 9 (c.d. przykładu 6). *Mieszany punkt równowagi ma postać:* $\bar{p} = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$, $\bar{q} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ *oraz* $(v_1^*, v_2^*) = (\frac{10}{3}, \frac{5}{3})$.

3. Ciąg dalszy

Przytoczone przykłady zastosowania losowości w zadaniach optymalizacji i teorii gier pokazują jedynie, iż takie zastosowania są celowe i dość eleganckie. Randomizacja, czy też metody losowe w optymalizacji, nie kończą się na uściśleniach rozwiązań modeli teorii gier. Łatwość uzyskania losowych wielkości z pomocą programów komputerowych otworzyła wiele metod wcześniej niedostępnych w praktyce i słabo zbadanych teoretycznie. Jest to pole współczesnych badań, dalekie od wyczerpania pytań i problemów.

Bibliografia

[1] J. Greń, *Gry statystyczne i ich zastosowania*, Państwowe Wydawnictwa Ekonomiczne, Warszawa, 1972.

[2] M. Malawski, A. Wieczorek, H. Sosnowska, *Konkurencja i kooperacja. Teoria gier w ekonomii i naukach społecznych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1997.

[3] H. Moulin, *Game theory for the social sciences*, New York University Press, New York, 1986.

[4] J. von Neumann, *Zur theory der gesellschaftspiele*, Mathematische Annalen **100** (1928), 295–320.

[5] J. von Neumann and O. Morgenstern, *Theory of games and economic behavior*, Princeton University Press, 1944.

[6] Guillermo Owen, *Teoria gier*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1975.

[7] Gábor J. Székely (ed.), *Chance of having a saddle-point*, vol. 13(2), p. 60, Springer, 2000, Problem corner: Problem No. 17.

[8] Gábor J. Székely (ed.), *Chance of having a saddle-point*, vol. 13(4), p. 54, Springer, 2000, Problem corner: Solution to Problem No. 17.