

Klein, Poincaré, Escher, komputer i ja

Przemysław KICIAK, Warszawa

Zagajenie

Inspiracją tego referatu były cztery znane grafiki M.C. Eschera, stanowiące artystyczne parkietaże płaszczyzny hiperbolicznej, przedstawione w modelu Poincaré. W obrazach tych matematyki jest dużo; chciałem przyjrzeć się jej choć trochę. Szansę na to stworzył mi dostęp do komputera – dzięki niemu mogę odnieść jakieś sukcesy, nie będąc tak pracowitym jak Escher.

Poza elementami geometrii nieeuklidesowej, jedną z najbardziej widocznych rzeczy na tych obrazach są symetrie parkietaży. Aby komputer mógł wykonać podobny obrazek, potrzebne jest znalezienie (dostatecznie dużej liczby) wielokątów, z których składa się parkietaż. Wielokąty te można powiązać z elementami grupy symetrii parkietażu (albo pewnej jej podgrupy), ale trzeba w tym celu umieć „eksplorować” taką grupę.

Conieco o grupach

Na abstrakcyjną definicję skończenie generowanej grupy \mathcal{G} składa się

- element neutralny E ,
- generatory T_1, \dots, T_n ,
- relacje, tj. warunki o postaci

$$T_{i_j}^{p_{i_j}} \dots T_{k_j}^{p_{k_j}} = E, \quad j = 1, \dots, m.$$

Tę samą grupę można zwykle określić na wiele sposobów. Mając dwie definicje grup o takiej postaci można badać, czy określają one tę samą grupę, albo czy jedna grupa jest podgrupą drugiej.

Badanie grupy może ułatwić znalezienie zbioru warstw równoległych do wskazanej podgrupy $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$. Jeśli \mathcal{H} jest dzielnikiem normalnym \mathcal{G} , to znajdziemy w ten sposób elementy grupy ilorazowej \mathcal{G}/\mathcal{H} .

Przyjmijmy, że grupa \mathcal{H} jest generowana przez elementy $S_1, \dots, S_l \in \mathcal{G}$, z których każdy jest przedstawiony w postaci

$$S_j = T_{i_j}^{p_{i_j}} \dots T_{k_j}^{p_{k_j}}.$$

Znalezienie zbioru warstw jest pracą żmudną, która może być wykonana za pomocą komputera. Stosując odpowiedni program można lepiej spóżytkować czas niż robiąc to ręcznie.

Pierwszy pomysł badania grup poprzez znalezienie zbioru warstw podał Moore w 1897 r. W roku 1936 Coxeter i Todd „zmechanizowali” proces wyliczania warstw grupy, czyniąc w ten sposób pierwszy krok do obarczenia tym zadaniem komputerów (których wtedy jeszcze nie było). Pierwszą implementację komputerową zrealizował Haselgrove w roku 1953 na komputerze EDSAC 1.

Procedura wyliczania warstw

Opis procedury wyliczania warstw grupy podali Coxeter i Moser w książce [1]. Stworzenie programu komputerowego na podstawie tego opisu wymagało opracowania pewnych szczegółów; oto one.

Grupa \mathcal{G} , a także podgrupa \mathcal{H} , są określone w postaci opisanej wcześniej. Kolejne znalezione warstwy będziemy oznaczali kolejnymi liczbami naturalnymi, zaczynając od 1, czyli od identyfikatora warstwy \mathcal{H} .

Celem procedury jest otrzymanie *tablicy mnożenia*. Indeksami kolumny w tej tablicy jest generator grupy \mathcal{G} lub jego element odwrotny. Indeks wiersza jest numerem warstwy. Element tablicy to numer warstwy, którą otrzymamy przekształcając warstwę określoną przez numer wiersza, za pomocą elementu, któremu odpowiada kolumna.

Przykład: Opisane tu postępowanie zastosujemy do znalezienia tablicy mnożenia grupy, która ma dwa generatory, T_1 i T_2 , spełniające relacje $T_1^2 = T_2^2 = (T_1 T_2)^2 = E$, przyjmując $\mathcal{H} = \{E\}$.

Tablica mnożenia ma 4 kolumny i początkowo jeden wiersz:

$$\begin{array}{c|cccc} & T_1 & T_1^{-1} & T_2 & T_2^{-1} \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Początkowa zawartość tablic relacji wygląda tak:

$$\begin{array}{cc|cc} T_1 & T_1 & T_2 & T_2 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline T_1 & T_2 & T_1 & T_2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Ponieważ tablice te nie zawierają informacji na temat obrazów jedynej jak dotąd warstwy 1 w przekształceniu odpowiadającym żądanemu z generatorów, więc wprowadzamy identyfikator 2, zakładając, że $1T_1 = 2$. Mając stąd także $2T_1^{-1} = 1$ otrzymujemy

$$\begin{array}{c|cccc} & T_1 & T_1^{-1} & T_2 & T_2^{-1} \\ \hline 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline T_1 & T_1 & T_2 & T_1 & T_2 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ \hline T_1 & T_2 & T_1 & T_2 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}$$

Pierwszy wiersz pierwszej tablicy relacji wypełnił się i otrzymaliśmy przy tym informację $2T_1 = 1$, a więc także $1T_1^{-1} = 2$. Usuujemy ten wiersz i uzupełniamy pozostałe tablice o znalezione informacje:

$$\begin{array}{c|cccc} & T_1 & T_1^{-1} & T_2 & T_2^{-1} \\ \hline 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline T_1 & T_1 & T_2 & T_1 & T_2 \\ \hline 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ & & & 2 & 0 \\ \hline T_1 & T_2 & T_1 & T_2 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}$$

Pora wprowadzić kolejny identyfikator, 3. Zakładamy, że $1T_2 = 3$, a więc $3T_1^{-1} = 1$. Wstawienie tej informacji spowoduje wypełnienie pierwszego wiersza drugiej tablicy, dzięki czemu dowiemy się, że również $1T_2^{-1} = 3$ i $3T_2 = 1$. Tablice z tymi informacjami wstawionymi wszędzie, gdzie się dało, wyglądają tak:

$$\begin{array}{c|cccc} & T_1 & T_1^{-1} & T_2 & T_2^{-1} \\ \hline 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline T_1 & T_1 & T_2 & T_1 & T_2 \\ \hline 3 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ & & & 2 & 0 \\ & & & 3 & 1 \\ \hline T_1 & T_2 & T_1 & T_2 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}$$

Przykład kompletnej tablicy mnożenia:

$$\begin{array}{c|cccc} & T_1 & T_1^{-1} & T_2 & T_2^{-1} \\ \hline 1 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}$$

Zero w tablicy oznacza miejsce do wypełnienia. Początkowo tablica ma tylko jeden wiersz (odpowiadający warstwie nr. 1), z samymi zerami; kolejne wiersze będziemy dodawać w miarę wprowadzania nowych warstw.

Aby znaleźć tablicę mnożenia, procedura tworzy struktury danych, zwane *tablicami relacji*. Każda z nich odpowiada pewnej relacji występującej w definicji grupy. Tablica taka składa się z nagłówka, który jest napisem (ciągami symboli T_i lub T_i^{-1}), na przykład relacji

$$T_1 T_2 T_3 T_2^{-1} T_1^{-1} = E$$

odpowiada nagłówek

$$\begin{array}{cccccc} T_1 & T_2 & T_3 & T_2^{-1} & T_1^{-1} & \\ \hline & & & & & \end{array}$$

Oprócz nagłówka tablica ma wiersze, połączone w listę. Początkowo każda tablica ma tylko jeden wiersz, np.

$$\begin{array}{cccccc} T_1 & T_2 & T_3 & T_2^{-1} & T_1^{-1} & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Podobnie jak w tablicy mnożenia, 0 oznacza miejsce do wypełnienia, zaś inne liczby to identyfikatory warstw. Kolejne wiersze będą dodawane, a po wypełnieniu usuwane.

Dla każdego generatora S_i podgrupy \mathcal{H} tworzymy taką samą tablicę relacji, z nagłówkiem i wierszem z jedykami na końcach. Przetwarzając taką tablicę możemy (po wypełnieniu) usunąć wiersz, ale nie dodamy do niej żadnych nowych.

Działanie algorytmu zaczyna się od utworzenia opisanych wyżej tablic. Następnie dążymy do ich wypełnienia, zgodnie z regułami podanymi niżej.

- Jeśli w tablicy mnożenia mamy informację $iT_j = k$, to powinniśmy mieć też $kT_j^{-1} = i$, a ponadto, jeśli w tablicy relacji jest

$$\begin{array}{cc} T_j & \\ \hline i & 0 \end{array} \quad \text{albo} \quad \begin{array}{cc} T_j^{-1} & \\ \hline 0 & i \end{array},$$

to w miejsce 0 wstawiamy k , oraz jeśli

$$\begin{array}{cc} T_j & \\ \hline 0 & k \end{array} \quad \text{albo} \quad \begin{array}{cc} T_j^{-1} & \\ \hline k & 0 \end{array},$$

to w miejsce 0 wstawiamy i .

- W chwili wypełnienia wiersza w tablicy relacji otrzymujemy informację, którą wstawiamy do tablicy mnożenia. Jeśli otrzymamy

$$\begin{array}{cc} T_j & \\ \hline i & k \end{array}$$

to do wiersza i w kolumnie T_j wstawimy k , a do wiersza k w kolumnie T_j^{-1} wstawimy i . Wypełniony wiersz tablicy relacji możemy usunąć, ponieważ cała informacja w tym wierszu jest przepisana do tablicy mnożenia.

- Jeśli w tablicy mnożenia w miejscu, do którego wpisujemy informację, jest 0, to informacja ta jest nowa. Trzeba ją będzie wykorzystać do wypełniania wierszy tablic relacji.

Jeśli wstawiany numer warstwy jest identyczny z poprzednią zawartością tablicy mnożenia, to nic nie robimy.

Jeśli tam jest inny identyfikator, to oba identyfikatory oznaczają tę samą warstwę. Wtedy należy jeden z nich zamienić wszędzie na drugi. Może to doprowadzić do wykrycia innych warstw z wieloma identyfikatorami.

W skrajnym przypadku może się okazać, że wszystkie identyfikatory odpowiadają tej samej warstwie $1 = \mathcal{G}$, czyli że $\mathcal{H} = \mathcal{G}$.

Kolejny identyfikator, 4, wstawiamy w miejsce zera w pierwszej tablicy relacji, skąd mamy $3T_1 = 4$, $4T_1^{-1} = 3$, a także, dzięki wypełnieniu tego wiersza, $4T_1 = 3$, $3T_1^{-1} = 4$. Po wstawieniu tych informacji do tablic okazuje się, że można je wypełnić do końca, ponieważ wypełnienie wierszy w tablicy trzeciej relacji daje informacje $2T_2 = 4$ i $4T_2 = 2$. Kończymy dzieło z taką zawartością tablic:

	T_1	T_1^{-1}	T_2	T_2^{-1}
1	2	2	3	3
2	1	1	4	4
3	4	4	1	1
4	3	3	2	2

T_1	T_1	T_2	T_2
3	4	3	
4	3	4	

T_1	T_2	T_1	T_2
1	2	4	3
2	1	3	4
3	4	2	1
4	3	1	2

Badana grupa jest więc czteroelementowa.

- Jeśli tablice nie są wypełnione (tj. w pewnych miejscach są jeszcze zera), ale cała informacja zawarta w tablicach relacji jest w tablicy mnożenia i na odwrót, to trzeba wprowadzić nowy identyfikator warstwy. W tym celu
 - w tablicach relacji wyszukujemy pierwsze zero,
 - wpisujemy w to miejsce kolejną liczbę naturalną (identyfikator warstwy) n ,
 - do każdej tablicy relacji (ale nie dla generatorów podgrupy \mathcal{H}) dołączamy wiersz

$$n \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad n,$$
 - do tablicy mnożenia dołączamy n -ty wiersz, początkowo z samymi zerami
 - i kontynuujemy wypełnianie tablic.

Procedura kończy działanie po wypełnieniu wszystkich tablic albo po osiągnięciu ustalonego limitu liczby identyfikatorów warstw. Oczywiście, w tym ostatnim przypadku nie wiemy, ile jest warstw, a nawet nie mamy informacji, czy każdy identyfikator odpowiada innej warstwie. W zastosowaniu do tworzenia obrazów naśladujących wspomniane na wstępie grafiki Eschera, otrzymany w ten sposób wynik jest jednak użyteczny.

Można zadać pytanie na temat kosztu algorytmu. Zależy on oczywiście od rozwiązania pewnych szczegółów implementacji. Można je rozwiązać tak, aby koszt był proporcjonalny do liczby utworzonych i wypełnionych miejsc w tablicach, czyli do iloczynu liczby utworzonych identyfikatorów warstw i sumy długości nagłówek tablic (tj. sumy długości wyrażeń opisujących relacje spełniane przez generatory warstw). W tym celu trzeba całkowicie wyeliminować przeszukiwanie tablic. Można to zrobić tworząc *listy* liniowe, w każdej takiej liście przechowywane są miejsca w tablicach, do których trzeba będzie wpisać określony wynik, gdy tylko się pojawi.

Grupy przekształceń związane z parkietami

Grupy symetrii parkietazy, które leżą u podstaw obrazów, jakie chciałbym otrzymać, mają trzy generatory, R_1 , R_2 i R_3 , spełniające następujące relacje:

$$R_1 R_1 = R_2 R_2 = R_3 R_3 = E,$$

$$(R_1 R_2)^p = (R_2 R_3)^q = (R_3 R_1)^2 = E,$$

dla pewnych liczb p i q . Określona w ten sposób grupa oznacza się symbolem $\{p, q\}$.

Przekształcenia odpowiadające wymienionym generatorom są odbiciami symetrycznymi płaszczyzny względem trzech prostych, na których leżą boki pewnego trójkąta T . Kąty tego trójkąta są równe π/p , π/q i $\pi/2$.

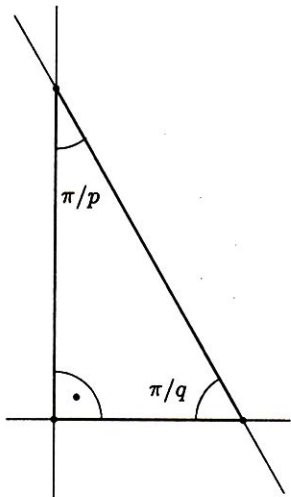
Każde odbicie jest inwolucją, co wyrażają pierwsze 3 relacje. Złożenie dwóch różnych odbić jest obrotem, odpowiednio o kąt $2\pi/p$, $2\pi/q$ i π , wokół odpowiedniego wierzchołka trójkąta T .

Trójkąt T jest **obszarem fundamentalnym** grupy; jego obrazy we wszystkich przekształceniach z grupy stanowią parkietaz płaszczyzny.

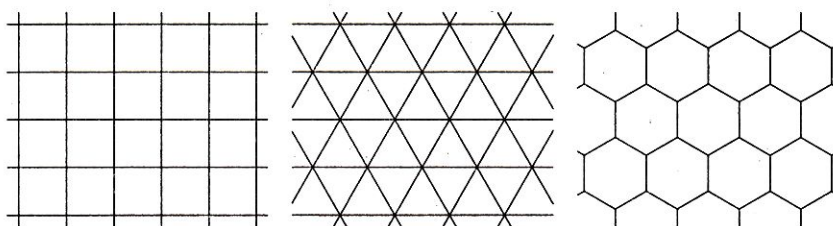
Grupa $\{p, q\}$ jest grupą symetrii parkietazu złożonego z p -kątów foremnych, spotykających się po q w każdym wierzchołku. Każdy taki p -kąt składa się z $2p$ trójkątów przystających do T . Istnieją podgrupy, dla których taki p -kąt jest obszarem fundamentalnym.

Jeśli $(p-2)(q-2) = 4$, to suma kątów trójkąta jest równa π ; trójkąt leży w płaszczyźnie euklidesowej i mamy grupy nieskończone

$$\{4, 4\}, \{3, 6\}, \{6, 3\}.$$



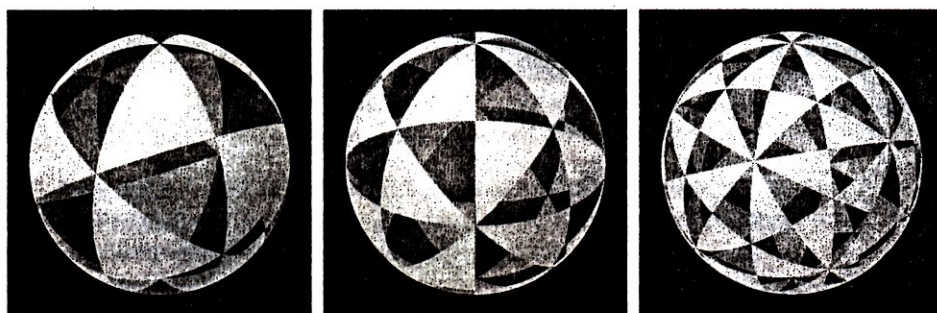
Parkietaze, których to są grupy symetrii, są pokazane na rysunku niżej.



Jeśli $(p - 2)(q - 2) < 4$, to suma kątów trójkąta jest większa od π ; mamy geometrię sferyczną i są tylko takie przypadki:

$$\{2, q\}, \{p, 2\}, \{3, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 3\}, \{3, 5\}, \{5, 3\}.$$

Każda z tych grup jest skończona. Parkietaze sfery, składające się z obrazów trójkąta fundamentalnego we wszystkich przekształceniach, z których składają się grupy $\{3, 3\}$, $\{3, 4\}$ i $\{3, 5\}$, wyglądają tak:



Jeśli $(p - 2)(q - 2) > 4$, to suma kątów trójkąta jest mniejsza niż π . Taki trójkąt możemy skonstruować na płaszczyźnie hiperbolicznej, dobierając odpowiednie długości boków. Grupy $\{p, q\}$ są w tym przypadku nieskończone. Aby wykonać odpowiadające im obrazy, trzeba przypomnieć kilka podstawowych faktów z geometrii hiperbolicznej i pewne własności modeli płaszczyzny hiperbolicznej.

Modele płaszczyzny hiperbolicznej

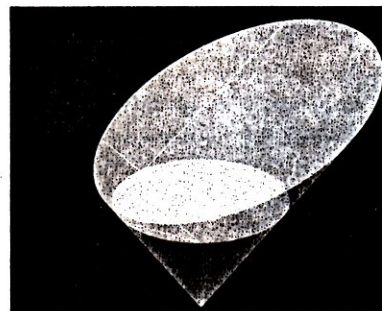
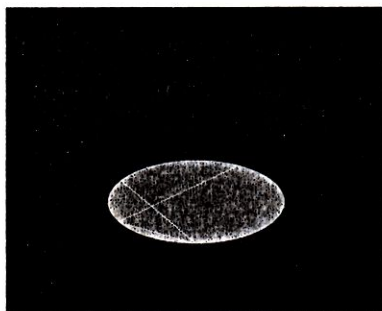
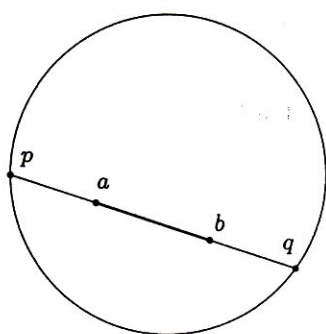
Model Kleina

Modelem płaszczyzny hiperbolicznej, wymyślonym przez Cayleya, a dopracowanym w szczegółach przez Kleina, jest wnętrze elipsy (np. wnętrza koła). Prosta w tym modelu jest cięciwą obszaru (tj. odcinkiem).

Odległość punktów a i b jest określona wzorem (zgodnym z oznaczeniami na rysunku obok)

$$\rho(a, b) = \frac{1}{2} \left| \ln \frac{a-p}{q-a} : \frac{b-p}{q-b} \right|,$$

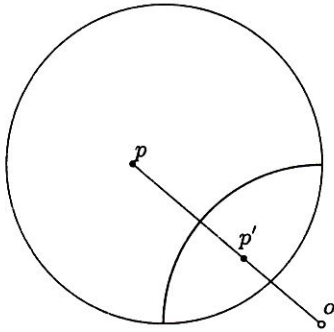
na który patrząc można zauważyć, że dwa różne modele Kleina są związane pewnym przekształceniem rzutowym. Przykład jest przedstawiony na rysunku.



Odbicia symetryczne w modelu Kleina są odpowiednimi przekształceniami rzutowymi.

Model Poincaré

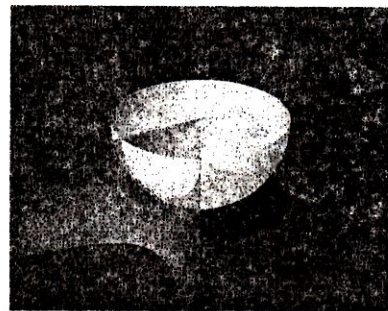
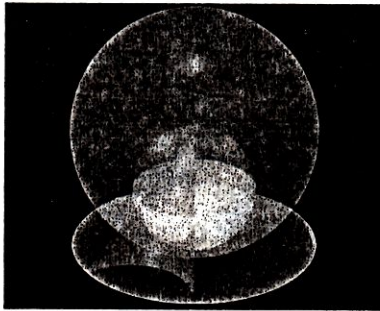
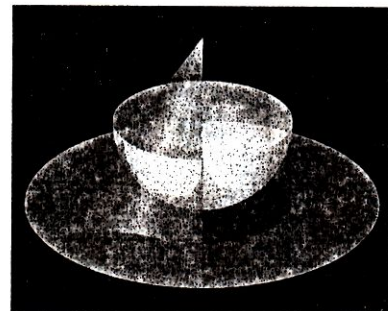
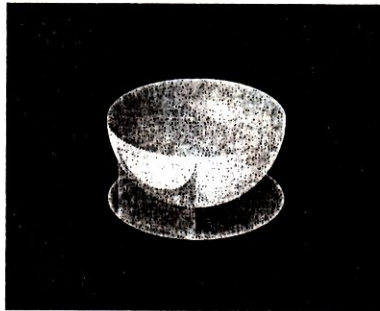
Model Poincaré w kole jest wnętrzem koła. Prosta w tym modelu jest średnicą koła lub łukiem okręgu prostopadłego w obu punktach przecięcia do brzegu koła. Model ten jest wiernokątny, łatwo jest więc w nim skonstruować trójkąt o wskazanych kątach.



Odbicie symetryczne w tym modelu jest inwersją; obrazem punktu p jest punkt p' , taki że

$$|op| \cdot |op'| = r^2.$$

Związek modelu Poincaré z modelem Kleina jest przedstawiony na rysunkach niżej. Przyjąłem model Kleina w kole jednostkowym; punkty tego koła (czyli płaszczyzny hiperbolicznej) można rzutować na półsferę, która jest jeszcze jednym modelem płaszczyzny hiperbolicznej. Następnie, wykonując rzut stereograficzny, odwzorowujemy go na model Poincaré w kole o dwa razy większej średnicy.

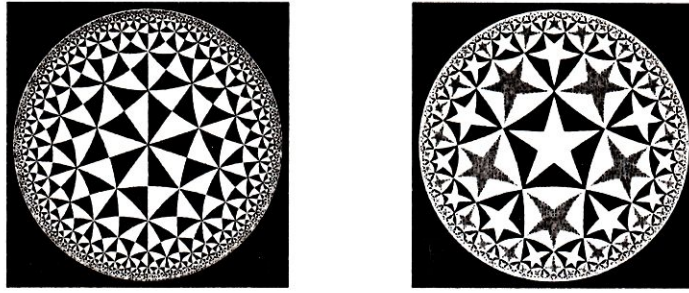


Rzut stereograficzny jest inwersją względem sfery, której środkiem jest środek rzutowania. Na podstawie znanych własności inwersji łatwo jest pokazać, że obrazem w rzucie stereograficznym pionowego półokręgu (prostej w modelu sferycznym) jest łuk okręgu przecinającego prostopadle brzeg koła — modelu Poincaré (czyli prosta w tym modelu). Ostatni rysunek jest dygresją — istnieje wiele jeszcze innych modeli płaszczyzny hiperbolicznej, na przykład płaszczyzna euklidesowa, w której modelami prostych są proste przechodzące przez pewien punkt oraz gałęzie hiperbol, których asymptotami są te proste.

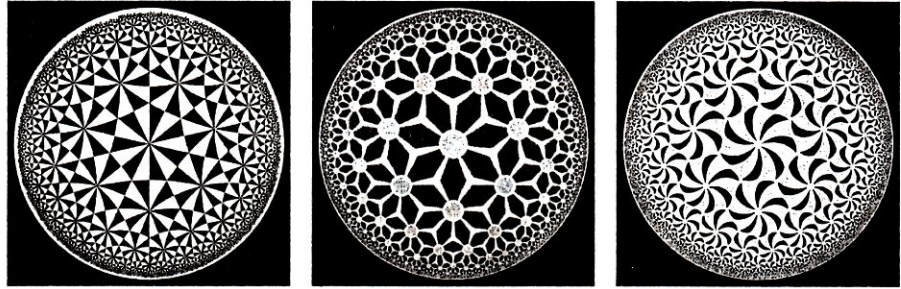
Obrazy parkietaży

Tworzenie obrazów parkietaży było poprzedzone wykonaniem procedury wylizywania warstw. Procedura ta znalazła tablice mnożenia dla ok. 6000 elementów każdej grupy $\{p, q\}$ (na tyle wystarczyło pamięci peceta). Następnie obrazek utworzony przez pewne wielokąty był poddawany przekształceniom należącym do wybranej podgrupy grupy $\{p, q\}$ i rysowany.

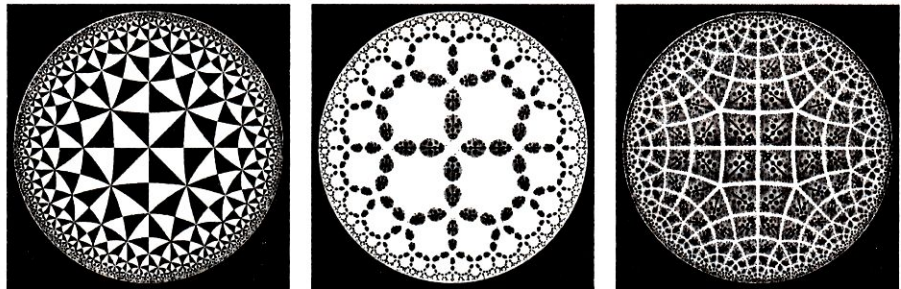
Obliczenia numeryczne były wykonywane w modelu Kleina. Jest on do tego wygodniejszy od modelu Poincaré, ponieważ pewne proste w tym ostatnim modelu są łukami okręgów, a inne średnicami koła; wykonując odbicie należałoby stosować różne wzory. Przejście między modelami, przedstawione wyżej na rysunkach, jest bardzo łatwe do zaprogramowania.



Grupa $\{p, 4\}$ jest grupą symetrii parkietażu złożonego z p -kątów foremnych, które są prostokątami. Na rysunkach wyżej $p = 5$.



Grupa $\{7, 3\}$ jest pełną grupą symetrii figury na środkowym obrazku. Parkietaż na obrazku z prawej strony jest niezmienny tylko względem podgrupy obrotów w grupie $\{7, 3\}$.



Zwykle, mając dwie definicje grupy za pomocą generatorów i ich relacji, dość trudno jest rozpoznać, że to ta sama grupa. To samo dotyczy identyfikacji grupy na podstawie odpowiadających jej obrazów. Na rysunku jest zilustrowana (na trzy sposoby) grupa $\{4, 5\}$.



Powyższe trzy obrazki odpowiadają szczególnemu przypadkowi tzw. grupy Dycka; jej elementami są odbicia symetryczne względem prostych, na których leżą boki sześciokątów, z których składają się pokazane tu parkietáže, oraz osi symetrii obrazka w każdym takim sześciokącie. Wszystkie trzy obrazki są identyczne z dokładnością do przesunięcia.

Bibliografia

- [1] Coxeter H.M.S., Moser W.O.J., *Generators and relations for discrete groups*, Springer, 1973.
- [2] Coxeter H.M.S., *Wstęp do geometrii dawnej i nowej*, PWN, Warszawa, 1967.
- [3] Sommerville D.M.Y., *The elements of non-euclidean geometry*, Dover Publications, 1958.