Jest to zapis odczytu wygłoszonego na XXVI Szkole Matematyki Poglądowej: *Twierdzenia z pogranicza.*

VI problem Hilberta i modele

Zdzisław POGODA, Kraków

W sierpniu 1900 roku David Hilbert wygłosił na II Kongresie Matematyków w Paryżu słynny referat, gdzie przedstawił 23 problemy uznane przez niego za szczególnie ważne dla matematyki wchodzącej w XX wiek. Wśród nich są konkretne zadania, problemy zarysowane mniej precyzyjnie, a także tylko idee pewnych pomysłów lub apele o to, by podjąć niektóre tematy.

Jeden z problemów dziś może budzić szczególne zdziwienie. Mianowicie, w VI problemie Hilbert proponuje aksjomatyzację... fizyki. Dokładniej Hilbert sformułował problem następująco:

> *Wzorując się na podstawach geometrii zaksjomatyzować te dziedziny fizyki, w których matematyka odgrywa istotną rolę: w pierwszej kolejności rachunek prawdopodobieństwa i mechanikę.*

Skąd ten dziwny pomysł, żeby aksjomatyzować dziedzinę nauki na trwałe powiązaną z doświadczeniem? I jeszcze ten rachunek prawdopodobieństwa jako dziedzina fizyki. Zapominamy jednak, że właśnie w XIX wieku rachunek prawdopodobieństwa był uznawany za fragment fizyki. Do takiego stanu rzeczy przyczyniła się między innymi kinetyczno-molekularna teoria budowy materii oraz prace Boltzmanna.

Ponadto, gdy kończył się wiek XIX, wydawało się, że w fizyce praktycznie zrobiono już wszystko. Do rozstrzygnięcia zostały dwa drobiazgi: interpretacja doświadczenia Michelsona–Morleya oraz wyjaśnienie problemu promieniowania ciała doskonale czarnego. Gdy u progu XX wieku młody Max Planck postanowił zająć się fizyką teoretyczną, to szczerze mu to odradzano zwracając uwagę, że praktycznie jest to dziedzina zamknięta.

Jeśli wszystko (lub prawie wszystko) wiadomo, to nadszedł czas uporządkowania teorii, a już Arystoteles zwracał uwagę, że takie uporządkowanie nagromadzonych wyników najlepiej będzie realizowane poprzez aksjomatyczne ujecie teorii. Najsłynniejszą realizacją tej idei są „Elementy” Euklidesa.

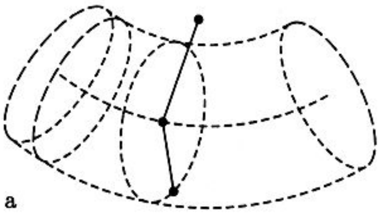
Zauważmy też, że Hilbert zwraca uwagę, iż chodzi o aksjomatyzację tych dziedzin, które są silnie zmatematyzowane.

Nie bez znaczenia był fakt, że na rok przed postawieniem słynnych problemów Hilbert odniósł poważny sukces w uporządkowaniu geometrii; ukazały się jego „Grundlagen der Geometrie” („Podstawy geometrii”), gdzie została podana wolna od usterek aksjomatyka geometrii euklidesowej. Można przypuszczać, że Hilbert, podobnie jak kiedyś Arystoteles i Euklides, uznał, iż aksjomatyka jest najlepszym sposobem uporządkowania teorii.

Sprawy zaczęły się jednak szybko komplikować. W 1905 roku ukazała się niewielka praca Alberta Einsteina pod specjalistycznie brzmiącym tytułem „O elektrodynamice ciał w ruchu”, w której zostały podważone główne zasady mechaniki klasycznej – powstała szczególna teoria względności. Dziesięć lat później Einstein stworzył ogólną teorię względności, teorię wiążącą ze sobą materię, przestrzeń i czas w nierozerwalną całość. Równolegle, wspomniany Max Planck wprowadził do fizyki pojęcie kwantu. W latach dwudziestych zaczęła się krystalizować mechanika kwantowa. W krótkim odstępie czasu powstały dziedziny nieistniejące, gdy Hilbert sformułował swoje problemy. Wydawało się więc, że idee aksjomatyzacji fizyki powinny definitywnie upaść.

Jeśli jednak propozycję Hilberta potraktujemy jako zadanie polegające na budowaniu matematycznego modelu dla danej teorii fizycznej, to problem pozostaje aktualny. I tu właśnie okazało się, że pewne sukcesy są możliwe. W szczególności udało się stworzyć elegancki, choć należy przyznać, dość skomplikowany, matematyczny model dla klasycznej mechaniki.

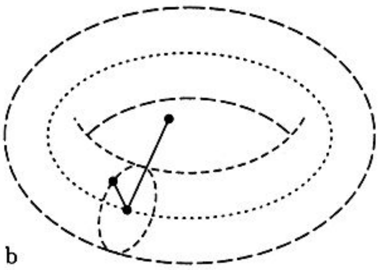
Mechanika była dziedziną najwcześniej i najlepiej zmatematyzowaną. Zasada wariacyjna, formalizm Lagrange'a i Hamiltona oraz wiele innych pięknych wyników przyczyniło się do tego, iż u progu XX wieku mechanika miała bardzo



a

solidne podstawy matematyczne i to właśnie ona była pierwszym kandydatem do aksjomatyzacji.

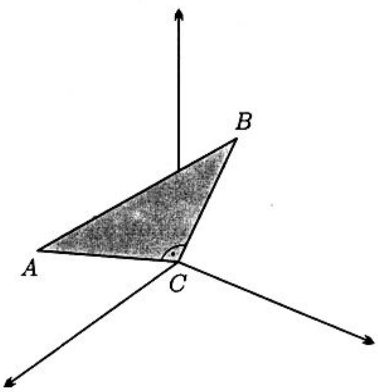
Fundamentalnym pojęciem dla modelu matematycznego mechaniki (a także i innych) jest pojęcie rozmaitości różniczkowej, które w tej dziedzinie występuje w różnych sytuacjach i pod różnymi nazwami – jedna z podstawowych to przestrzeń konfiguracyjna. Ogólnie przestrzeń konfiguracyjna dla punktu lub układu punktów jest to zbiór możliwych położeń tegoż punktu lub układu.



b

Rozważmy na przykład płaskie wahadło matematyczne. Zbiór położeń końca tego wahadła jest okręgiem (dopuszczamy, że wahadło może obracać się dokoła punktu zaczepienia). Jeśli na końcu tego wahadła zaczepimy drugie wahadło płaskie, to otrzymamy wahadło płaskie podwójne. Przestrzenią konfiguracyjną dla tego wahadła (tj. dla jego końca) będzie torus – iloczyn kartezjański dwóch okręgów. Położenie końca wahadła podwójnego może być opisane za pomocą dwóch liczb, kątów wychylenia od ustalonych położeń początkowych.

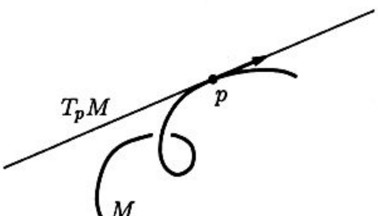
Dla uproszczenia możemy zapisać $S^1 \times S^1$ przyjmując na przykład, że wahadła mają jednostkową długość. Przestrzeń konfiguracyjna dla wahadła płaskiego potrójnego (trzy wahadła płaskie, jedno zaczepione na końcu drugiego) jest torusem trójwymiarowym $S^1 \times S^1 \times S^1$. Zamiast wahadła płaskiego możemy badać wahadła sferyczne (zbiór dopuszczalnych położeń końca jest sferą) – ich kombinacje i kombinacje z wahadłami płaskimi prowadzą do przestrzeni konfiguracyjnych postaci $S^2 \times S^2$, $S^2 \times S^1$, $S^2 \times S^1 \times S^1$, $S^2 \times S^2 \times S^1 \times S^1$ itp., które są już rozmaitościami wielowymiarowymi.



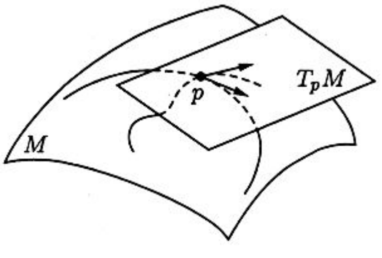
I jeszcze jeden przykład. Rozważmy trójkąt prostokątny o wierzchołkach A, B, C obracający się wokół wierzchołka C kąta prostego. Przestrzenią konfiguracyjną dla tego trójkąta jest przestrzeń $\mathbb{R}P^3$ – rzeczywista przestrzeń rzutowa. Inna reprezentacja tej rozmaitości to grupa obrotów przestrzeni trójwymiarowej mająca tradycyjne oznaczenie $SO(3)$. Jest to z jednej strony rozmaitość, a z drugiej grupa. Takie obiekty nazywane są grupami Liego. Nieco wcześniej pojawiła się tu już inna grupa Liego – jest nią S^1, zbiór liczb zespolonych o module 1.

Rozmaitość różniczkowa, naturalne uogólnienie powierzchni, stała się jednym z fundamentalnych pojęć matematyki. Można je badać globalnie, jak figury geometryczne oraz lokalnie przez wprowadzenie układów współrzędnych, dzięki czemu rozmaitości lokalnie przypominają przestrzeń euklidesową odpowiedniego wymiaru. Układy współrzędnych umożliwiają też przeniesienie na rozmaitości technik analizy matematycznej.

W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ mamy wiele naturalnych pojęć, takich jak metryka, iloczyn skalarny, pozwalających lepiej badać obiekty w tej przestrzeni. Pojęcia te przenoszą się elegancko na rozmaitości za pomocą przestrzeni stycznych. Jeśli rozmaitość jest uogólnieniem powierzchni, to przestrzeń styczna uogólnia pojecie prostej stycznej i płaszczyzny stycznej do powierzchni. Prosta styczna do krzywej w punkcie jest przybliżeniem tej krzywej w pobliżu punktu, podobnie jest z płaszczyzną styczną i powierzchnią. Przestrzeń styczna lokalnie zastępuje rozmaitość; pozwala to z rozmaitością wiązać struktury typowe dla przestrzeni wektorowej.



Prosta styczna do krzywej wyznaczona jest przez wektor styczny (wektor prędkości) i pomysł ten został wykorzystany przy konstrukcji przestrzeni stycznej. Wektory styczne do wszystkich krzywych (odpowiednio gładkich) w danym punkcie rozmaitości tworzą przestrzeń wektorową – przestrzeń styczną. Wszystkie przestrzenie styczne dla danej rozmaitości układają się w obiekt nazywany wiązką styczną, który też jest rozmaitością. W mechanice wiązka styczna nazywana jest przestrzenią fazową: zbiór możliwych położeń i prędkości (a czasem pędów) punktu i układu punktów.



Współczesny matematyczny formalizm dla mechaniki klasycznej stanowią tak zwane rozmaitości symplektyczne. Rozmaitość symplektyczna, mówiąc bardzo ogólnie, jest rozmaitością z pewnym wyróżnionym specjalnym obiektem nazywanym formą symplektyczną. Ta z kolei na każdej przestrzeni stycznej określa coś w rodzaju iloczynu skalarnego. Zwykły iloczyn skalarny jest symetryczny, a „symplektyczny" – antysymetryczny; matematycy mówią, że jest to dwuforma różniczkowa. Spełnione muszą być jeszcze pewne dodatkowe warunki, które umożliwiają opisanie odpowiednich równań ruchu i zinterpretowanie ich rozwiązań. Zawiłość całej konstrukcji polega na tym, że tą rozmaitością symplektyczną jest w mechanice nie przestrzeń konfiguracyjna, lecz przestrzeń fazowa, czyli należy rozważać przestrzenie styczne do wiązki stycznej.

Wspomniane dodatkowe warunki oraz precyzyjna definicja rozmaitości symplektycznej mogą pełnić rolę aksjomatów w matematycznym opisie mechaniki klasycznej.

Chociaż pojecie rozmaitości pozwoliło na stworzenie bardzo eleganckiego opisu dla mechaniki klasycznej, to jednak wcześniej zyskało aprobatę fizyków dzięki innej wielkiej teorii XX wieku – ogólnej teorii względności. Einstein wykorzystując rachunek tensorowy i najnowsze w drugiej dekadzie wyniki geometrii różniczkowej (ich znajomość zawdzięczał Marcelowi Grossmanowi) stworzył eleganckie matematyczne podstawy ogólnej teorii względności i mógł pokusić się nawet o skonstruowanie modelu Wszechświata. Stąd już był tylko krok do wykorzystania pojecia rozmaitości.

Podstawowym obiektem ogólnej teorii względności jest rozmaitość riemanowska, a dokładniej rozmaitość pseudoriemanowska, czyli rozmaitość (fizycy zadowalają się rozmaitością czterowymiarową) z wyróżnionym tensorem metrycznym. Termin „tensor" skutecznie odstrasza wielu zainteresowanych wynikami Einsteina od dokładniejszego studiowania ogólnej teorii względności.

Pojęcie tensora jest naturalnym uogólnieniem wektora – jest to zresztą wektor, tylko w innej, większej przestrzeni wektorowej, co pozwala uznać za tensory dobrze znane nam twory, których pewnie nigdy byśmy o „tensorowość" nie podejrzewali. Takim obiektem jest na przykład iloczyn skalarny. W algebrze liniowej iloczyn skalarny definiowany jest jako forma dwuliniowa z dodatkowymi warunkami, a forma dwuliniowa to właśnie tensor typu $(0, 2)$. Ten ostatni symbol można by interpretować w taki sposób, że dwóm wektorom przyporządkowana jest liczba. Często zamiast o tensorach mówimy o polach tensorowych. Najprostsze z nich to pole skalarne: każdemu punktowi rozmaitości (przestrzeni) przyporządkowana jest liczba (liczba to też tensor typu (0,0)). Najlepiej znane są pola wektorowe. A jeśli punktowi rozmaitości przypiszemy iloczyn skalarny w przestrzeni stycznej w tym punkcie, to dostaniemy pole tensorowe nazywane właśnie tensorem metrycznym albo tensorem riemanowskim. Rezygnując w definicji iloczynu skalarnego z naturalnego warunku, że kwadrat skalarny wektora niezerowego jest nieujemny, otrzymamy metrykę pseudoriemanowską, a odpowiedni tensor nazywany jest właśnie pseudoriemanowskim.

Tensor metryczny pozwala wprowadzić odległość na samej rozmaitości, a także badać zakrzywienie i inne własności rozmaitości (Wszechświata). W geometrii różniczkowej zostały stworzone bardzo wyrafinowane narzędzia do badania rozmaitości i obiektów na nich. Pozwoliło to na podjęcie poważnych prób stworzenia matematycznego modelu Wszechświata i fizyki w nim obowiązującej.

Okazało się jednak dość szybko, że nawet tak skomplikowane i abstrakcyjne obiekty jak rozmaitości z dodatkowymi wymyślnymi strukturami są zbyt proste, by ogarnąć skomplikowaną rzeczywistość. Co na przykład zrobić z takimi osobliwościami jak czarne dziury?

Różnie próbowano przeskoczyć te trudności. Oto szkic jednej propozycji. Niech M będzie rozmaitością czterowymiarową z zadanym tensorem pseudoriemanowskim najczęściej oznaczanym przez g. Jak poprzednio rozważamy również wiązkę styczną TM składającą się z przestrzeni stycznych $T_pM$dla wszystkich punktów $p \in M$. W przestrzeni stycznej T_pM możemy wybrać bazę, będzie to odpowiednik układu współrzędnych w punkcie p. Takich baz w ustalonym punkcie jest wiele. Wybierzmy te, które są związane z „iloczynem skalarnym" g – odpowiedniki prostokątnych układów współrzędnych. Zbiór baz tego typu w punkcie p oznaczmy O_pM. Często nazywa się ten zbiór przestrzenią reperów (ortogonalnych) w punkcie p. Przestrzenie reperów we wszystkich punktach tworzą wiązkę reperów OM na rozmaitości M. To jest nowa rozmaitość i można na niej określić w pewien naturalny sposób tensor metryczny a co za tym idzie metrykę.

W fizyce (i nie tylko w niej) ważne są układy współrzędnych oraz przejścia z jednego układu do innego. Odbywają się one za pomocą specjalnych przekształceń zachowujących tensor g (zgodnych z iloczynem skalarnym). Zbiór tych przekształceń tworzy grupę Liego $O(g)$. W ogólnej teorii względności grupą tą jest grupa Lorenza $O(3,1)$. Symbol ten można trochę nieprecyzyjnie interpretować następująco: przekształcenia przeprowadzają bazy ortogonalne (wektory wzajemnie prostopadłe) na ortogonalne, przy czym trzy wektory z każdej bazy są takie, że ich kwadraty są dodatnie a kwadrat czwartego ujemny. Elementy grupy $O(3,1)$ działają na elementy rozmaitości OM – obrazem bazy jest baza. Jeśli jedną bazę przekształcimy przez wszystkie elementy grupy, to otrzymamy zbiór baz nazywany orbitą tej bazy. Okazuje się, że w odpowiednich warunkach zbiór orbit jest identyczny z wyjściową rozmaitością M.

Powróćmy teraz do przestrzeni OM. Wspomnieliśmy, że da się na niej określić w naturalny z punktu widzenia geometrii różniczkowej sposób metrykę. Przestrzeń metryczną można uzupełnić tak, jak się uzupełnia zbiór liczb wymiernych do zbioru liczb rzeczywistych. Działanie grupy $O(3,1)$ rozszerza się na tak uzupełnioną przestrzeń i uzyskuje się przy okazji rozszerzone orbity. Zbiór nowych orbit tworzy przestrzeń $\underline{M}$, którą można interpretować jako rozszerzenie rozmaitości M. Wyjściowa rozmaitość M zanurza się odpowiednio w $\underline{M}$. Dodatkowe punkty dołożone do „porządnej" przestrzeni interpretuje się jako osobliwości tejże. Problem zaczyna się jednak w momencie, gdy próbujemy opisać strukturę takiej przestrzeni z osobliwościami. Jest to obiekt bardzo dziwny i matematycznie trudny do badania. Często nie da się na przykład oddzielić dwóch różnych punktów rozłącznymi otoczeniami.

Znane są inne pomysłowe konstrukcje pozwalające dołączyć do zakrzywionej czasoprzestrzeni osobliwości. Żadna jednak nie została powszechnie zaakceptowana. Poszukiwania trwają.

Zwróćmy uwagę na fakt, że model Wszechświata to fizyka w skali makro, a jest przecież jeszcze mikroświat z jego mechaniką kwantową. I w tym przypadku stworzono również modele matematyczne. Podstawową teorią wykorzystywaną przez mechanikę kwantową jest teoria przestrzeni Hilberta. Nie będziemy jednak rozwijać tego tematu. Natomiast nawiązując do problemu matematyzacji fizyki zwróćmy uwagę na niezwykle ważny i modny problem unifikacji teorii fizycznych. Wielkim marzeniem fizyków jest stworzenie jednolitej, uniwersalnej teorii opisującej wszystkie podstawowe zjawiska. Unifikacja wymaga stworzenia odpowiedniego aparatu matematycznego, a sprawa jest wyjątkowo trudna. Jak bowiem pogodzić teorię grawitacji, teorię nieliniową wykorzystującą rozmaitości pseudoriemanowskie i mechanikę kwantową, gdzie królują liniowe, nieskończenie wymiarowe przestrzenie Hilberta?

Pomysłów jest bardzo wiele. Próbuje się pseudoriemanowską scenę ogólnej teorii względności obudować wyszukanym aparatem algebraiczno-topologicznym. Powstała intensywnie rozwijana teoria superrozmaitości, gdzie rozmaitość rozszerza się o człon algebraiczny. Do współrzędnych „geometrycznych" dopisuje się „współrzędne algebraiczne" spełniające warunki antysymetrii. Inne pomysły nawiązują do algebry nieprzemiennej. Przyglądając się obiektom algebraicznym związanym z rozmaitościami (algebry funkcji, moduły pól wektorowych, form itp.), analizuje się abstrakcyjne struktury algebraiczne i bada rozmaite interpretacje geometryczne. Jest to przedmiot zainteresowań bujnie rozwijającej się geometrii niekomutatywnej (nieprzemiennej).

Wszystkie te pomysły są w pewnym sensie echem idei Hilberta przedstawionej w VI problemie. Choć o samym problemie już się praktycznie nie wspomina, to matematyzacja teorii fizycznych jest obecnie niezwykle daleko posunięta i być może Hilbert byłby zadowolony z realizacji swojego pomysłu.