Jest to konspekt jednego z trzech zajęć warsztatowych poprowadzonych na XXV Szkole MAtematyki Poglądowej: *Elementarne, ale niebanalne.*

Bez dowodu

Krzysztof OMILJANOWSKI, Wrocław

Poniższe zadania nie są zestawem do samodzielnej pracy ucznia (studenta). Jest to raczej „ściąga” (konspekt?) dla prowadzącego zajęcia. Rolą prowadzącego jest między innymi przekazanie słuchaczom intuicji związanych z pojęciem homeomorfizmu. Badane tu pojęcie położenia zbioru jest pretekstem do pewnej refleksji na temat właściwości topologicznych podzbiorów prostej i płaszczyzny. (W topologii teoria położenia "zaczyna się" w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej – teoria węzłów bada położenie krzywej zwyczajnej zamkniętej w $\mathbb{R}^3$.) Wydaje się, że przy rozwiązywaniu tych zadań (np. zad. 0–8) nie jest konieczna znajomość formalnych terminów języka topologii.

Zadanie 0. Pomyślmy, że figury w kształcie liter alfabetu są zrobione z miękkiego drutu i że dozwolona operacja to wyginanie, ale nie rozcinanie czy lutowanie. Powiemy, że D i O są równoważne przez wyginanie (homeomorficzne), że należą do tej samej grupy (klasy przestrzeni). Do innej grupy należą: G, M, N i inne. Pogrupuj wszystkie figury w kształcie liter.

Uwaga: Trzeba najpierw sprecyzować (rysując!) jak wyglądają litery; np. B i B nie należą do tej samej grupy, natomiast Q i Q są równoważne przez wyginanie – można wyginać w przestrzeni!

* * *

Definicja. Zbiory A_1, A_2 zawarte w X są *jednakowo położone w* X, jeśli można tak zdeformować (homeomorficznie) X na X, że A_1 przejdzie na A_2.

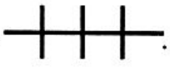
Zbiór $A = [0,1] \cup \{2,3\}$ ma dokładnie dwa położenia w $\mathbb{R}$ ($X = \mathbb{R}$), mianowicie: ▬ • • oraz • ▬ •

Uwaga; • • ▬ jest tym samym położeniem co ▬ • • (odbicie).

Zadanie 1. Niech $X = \mathbb{R}$, $A = [0,1] \cup \{2,3,4\} \cup [5,6] \cup \{7,8\}$. Znajdź (narysuj) wszystkie położenia A w X. Spróbuj zakodować wszystkie położenia zbioru A tak, by łatwo móc zliczyć wszystkie położenia, w przypadku gdy A jest sumą n przedziałów i m punktów.

Zadanie 2. Niech $X = \mathbb{R}$, $A = \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$. „Narysuj wszystkie” położenia A w X.

Zadanie 3. Niech $X = \mathbb{R}$, $A = \{-1,1\} \cup \{(-1)^n + 1/n : n \in \mathbb{N}\}$. „Narysuj wszystkie” położenia A w X.

Zadanie 4. Niech $X = \mathbb{R}^2$, $A =$ . Narysuj inne położenie A w X.

Zadanie 5. Niech $X = \mathbb{R}^2$, $A =$ A (suma trzech odcinków). Narysuj wszystkie (różne) położenia A w X.

Zadanie 6. Jak w zadaniu 5 dla innych „liter”.

Zadanie 7*. Podaj (odgadnij) wszystkie zbiory domknięte i ograniczone, które mają tylko jedno położenie w $X = \mathbb{R}$ (wykonaj rysunki).

Zadanie 8. Podaj przykłady zbiorów domkniętych, ograniczonych i spójnych („składających się z jednego kawałka”), które mają tylko jedno położenie w $X = \mathbb{R}^2$ (wykonaj rysunki).

* * * * * *

Zadanie 9. Czy istnieje zbiór zwarty (domknięty i ograniczony), który ma nieprzeliczalnie wiele różnych położeń w $X = \mathbb{R}$?

Zadanie 10. Czy istnieje przeliczalny zbiór zwarty, który ma nieprzeliczalnie wiele różnych położeń w $X = \mathbb{R}$?

Zadanie 11. Czy istnieje nieprzeliczalnie wiele przeliczalnych zbiorów zwartych, które mają nieprzeliczalnie wiele różnych położeń w $X = \mathbb{R}$?

Zadanie 12. „Narysować" nieprzeliczalnie wiele przykładów zbiorów zwartych i spójnych, które mają tylko jedno położenie w $X = \mathbb{R}^2$.

Zadanie 13. Czy istnieje zbiór zwarty i spójny, który ma nieprzeliczalnie wiele różnych położeń w $X = \mathbb{R}^2$?

Zadanie 14. Czy istnieje nieprzeliczalnie wiele zbiorów zwartych i spójnych, które mają nieprzeliczalnie wiele różnych położeń w $X = \mathbb{R}^2$?

Zadanie 15. Powiedz, dlaczego każde dwa przeliczalne, gęste (tzn. przecinające każdy przedział) zbiory A_1, A_2 są jednakowo położone w $X = \mathbb{R}$.

Zadanie 16*. Zapisz homeomorfizm z zadania 15.

* * *   * * *   * * *

Dalsze zagadnienia do zbadania:

I. Czy zmienią się odpowiedzi do poszczególnych zadań gdy zamiast podzbiorów prostej rozważać będziemy podzbiory przedziału $[0,1]$ (zamiast podzbiorów płaszczyzny - podzbiory kwadratu $[0,1]^2$)?

II. Podaj listę „brakujących twierdzeń", tzn. twierdzeń potrzebnych do tego, by móc łatwo uzasadnić (a nie tylko odgadywać) rozwiązania powyższych zadań.

III. Czy coś ciekawego można otrzymać badając analogon położenia w innej teorii, np. teorii grup?

Powyższe zadania są reakcją wyżej podpisanego na zadanie jakie zobaczył na pierwszej liście zadań dla studentów pierwszego roku matematyki: „Udowodnij, że liczba parzysta jest podzielna przez dwa."

Wydaje się, że często zapominamy (my = uczący innych), że rozumowanie matematyczne można uzewnętrzniać nie tylko poprzez formalny ciąg formuł, ale również np. poprzez rysunek.

Rozwiązywanie zadań to jak trening i – jak na treningu – chodzi o to, by się rozwijać (niekoniecznie bijąc rekordy). Na przykład w zadaniu 7 powyżej nie jest ważne, by faktycznie znaleźć wszystkie poszukiwane zbiory (łatwo zapomnieć o zbiorze Cantora lub o odcinku z „dolepionymi" do obu końców zbiorami Cantora). Ważne, by uzmysłowić sobie, że jest wiele typów poszukiwanych zbiorów, a stwierdzenie, że wymieniliśmy wszystkie, wymaga uzasadnienia.

Niektórzy uczący analizy matematycznej wyrażają prowokacyjnie tezę: „tyle jest pięknych rzeczy do wyrachowania, że szkoda czasu na dowody" – dorzućmy do tego jeszcze „i do narysowania".