Jest to skrót odczytu wygłoszonego na XXV Szkole Matematyki Poglądowej: *Elementarne, ale niebanalne.*

Jak zajrzeć do wnętrza permutacji?

Jarosław WRÓBLEWSKI, Wrocław

Aby pytać o zaglądanie do wnętrza permutacji, trzeba najpierw zobaczyć permutację w fizycznym świecie. Czy można? Owszem, można. Wyobraźmy sobie najzwyklejszy przedłużacz (najlepiej trójżyłowy) z plastikowymi końcówkami. Używając go mamy nadzieję, że permutacja przewodów, jaką nam on realizuje po włączeniu do obwodu elektrycznego, jest trywialna, bo w przeciwnym razie...

Ale jeśli plastikowe końcówki są zatopione, nie jesteśmy w stanie sprawdzić tego bezpośrednio nie niszcząc przedłużacza. A jeśli mamy cały stos takich przedłużaczy, które zostały zmontowane na chybił trafił?

Przypuśćmy, że nie mamy możliwości przepuszczenia prądu przez pojedynczy przewód, możemy natomiast przy pomocy przedłużaczy podłączać urządzenie elektryczne (bardzo, bardzo trwałe) i obserwować, jak ono na owe eksperymenty reaguje. Możemy także włączać w obwód kilka przedłużaczy połączonych szeregowo.

I to właśnie są permutacje, do wnętrza których będziemy zaglądać.

Wiemy, że wśród permutacji zbioru 3-elementowego jest permutacja identycznościowa (to ten przedłużacz, którego włączenie do obwodu na nic nie wpływa), 3 transpozycje i 2 cykle długości 3. Co to jest transpozycja? To taki przedłużacz, który połączony z drugim identycznym przedłużaczem, tworzy przedłużacz identycznościowy, a przy tym sam identycznościowy nie jest.

Zamieńmy słowo *przedłużacz* na *permutacja* i *połączony* na *złożona* i już mamy to samo opisane w języku grupy permutacji.

Natomiast cykl długości 3 to permutacja nieidentycznościowa, której 3-cia potęga jest identycznością.

Widać już, na czym polega cała zabawa: rozpoznać (na podstawie struktury grupy permutacji) strukturę każdej permutacji, czyli długości cykli rozłącznych, których złożeniem jest ta permutacja.

Pokazaliśmy, jak w S_3 rozpoznać identyczność, transpozycję i 3-cykl. Struktura grupy permutacji nie wystarczy jednak na rozróżnienie poszczególnych transpozycji.

Przypadki S_1 i S_2 są trywialne. W miarę ogólny wydaje się już przypadek S_{10}.

Bez trudu rozpoznajemy permutację identycznościową. Jeśli uda nam się rozpoznać transpozycje, rozpoznamy strukturę każdej permutacji. Wystarczy bowiem zauważyć, że k-cykl to taka permutacja rzędu k, która jest złożeniem $k-1$ transpozycji, natomiast dwa cykle są rozłączne wtedy i tylko wtedy, gdy komutują i żaden nie jest potęgą drugiego.

W S_{10} transpozycje rozpoznajemy w bardzo prosty sposób: są to 15-te potęgi permutacji rzędu 30. Istotnie, permutacja rzędu 30 musi być złożeniem rozłącznych cykli długości 2, 3 i 5, jej 15-ta potęga jest więc transpozycją.

Ponieważ dowolna liczba $n \geq 12$ daje się przedstawić w postaci $2+p_1+p_2+\ldots+p_k$, gdzie $p_1, p_2, \ldots, p_k$ są różnymi liczbami pierwszymi nieparzystymi, rozpoznamy transpozycje w S_n jako $p_1 p_2 \ldots p_k$-te potęgi permutacji rzędu $2p_1 p_2 \ldots p_k$.

Dla pozostałych $n < 12$ namy następujące charakteryzacje transpozycji:

dla $n = 5$ są to 3-cie potęgi permutacji rzędu 6,
dla $n = 7$ i $n = 8$ są to 5-te potęgi permutacji rzędu 10,
dla $n = 9$ są to 7-me potęgi permutacji rzędu 14,
dla $n = 11$ są to 9-te potęgi permutacji rzędu 18.

Pewien problem sprawiają $n = 4$ i $n = 6$.

Dla $n = 4$ problem polega na odróżnieniu transpozycji od złożenia dwóch transpozycji rozłącznych. Otóż pojedyncza transpozycja jest permutacją nieparzystą, a złożenie dwóch transpozycji – parzystą. Świetnie, ale jak rozpoznać parzystość permutacji? Permutacje parzyste dają się uzyskać za pomocą złożenia permutacji rzędu 3, a nieparzyste nie. I to załatwia $n = 4$.

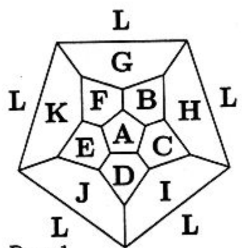
A co z $n = 6$? A tu się po prostu nie da rozpoznać transpozycji. Dla wszystkich pozostałych n się da, a dla $n = 6$ się nie da i już.

Aby się o tym przekonać, przyjrzyjmy się dwunastościanowi foremnemu. Jeśli mamy przepięknie wykonany model dwunastościanu i chcemy go bezpiecznie przetransportować, możemy pociąć go na 12 ścian, a w miejscu przeznaczenia skleić od nowa. Jeśli chcemy, aby w miejscu przeznaczenia otrzymać izometrycznie ten sam dwunastościan (każda ściana jest jednorodna, ale różni się od pozostałych; nie zmartwi nas uzyskanie lustrzanego odbicia wyjściowego dwunastościanu), trzeba do przesyłki ze ścianami dołączyć instrukcję, które ściany mają sąsiadować.

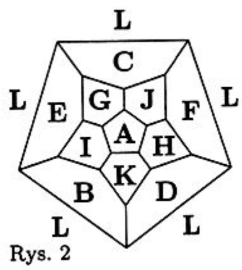
Różnie bywa z takimi instrukcjami. Pewnego razu na obozie przygotowawczym w Zwardoniu daliśmy jednego dnia 10 łatwych zadań, a dla oszczędności papieru pozwoliliśmy uczestnikom rozwiązywać po dwa zadania na jednej kartce. Łączenie zadań nie mogło być dowolne, bo trzeba było sprawnie podzielić się sprawdzaniem. Wiedząc, jak drudno dopilnować, aby wszyscy bez wyjątku zrozumieli (trywialną wszakże) regułę łaczenia zadań, wymieniliśmy *explicite*, że wolno łączyć zadanie 1 z 2, 3 z 4, 5 z 6, 7 z 8, 9 z 10. Po zebraniu prac okazało się jeden z uczestników (na cześć Grzegorzewic, w których wygłosiłem ten odczyt, nazwijmy go umownie Grzesiem) połączył zadanie 1 z 7, 2 z 5, 3 z 10, 4 z 8 i 6 z 9. Jak Grześ zrozumiał nasze instrukcje? Że zadania łączyć wolno, byle nie łączyć 1 z 2, 3 z 4, 5 z 6, 7 z 8, ani 9 z 10.

Jak wobec tego Grześ skleiłby rozłożony model dwunastościanu?

Oznaczmy ściany dwunastościanu literami od A do L (rys. 1). Instrukcje dołączone do rozłożonego na ściany dwunastościanu mówią, że A sąsiaduje z B, C, D, E i F. Grześ odczytałby to: A nie sąsiaduje ani z B, ani z C, ani z D, ani z E, ani z F. Uważne prześledzenie postępowania Grzesia pokazuje, że musiałby on skleić model izometryczny ze schematem przedstawionym na rysunku 2. Co więcej, zastosowanie tej samej procedury (tzn. przesłanie i danie Grzesiowi do sklejenia) prowadzi od modelu z rysunku 2 do modelu z rysunku 1.



Rys. 1



Rys. 2

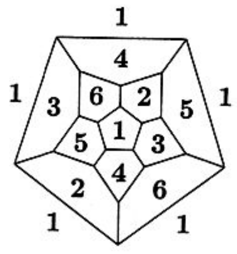
Dwa dwunastościany nazwijmy *dualnymi*, jeśli ich ściany są wzajemnie wymieszane według powyższej procedury.

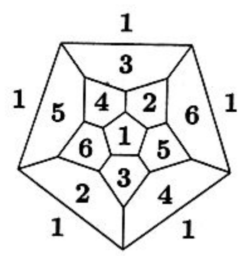
W dalszym ciągu będziemy rozważać dwunastościany o ścianach ponumerowanych liczbami od 1 do 6, przy czym na przeciwległych ścianach znajduje się ta sama liczba. Z dokładnością do izometrii, istnieje 12 możliwych numerowań, które możemy połączyć w pary numerowań dualnych, nazwijmy je a, b, c, d, e, f.

Zwróćmy uwagę, że każdej permutacji cyfr 1,2,3,4,5,6 odpowiada permutacja par numerowań dualnych a, b, c, d, e, f. Tak więc

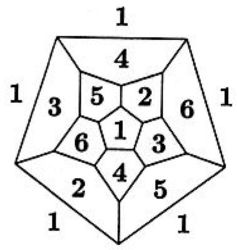
$$S_6(1,2,3,4,5,6) \simeq S_6(a,b,c,d,e,f)\ .$$

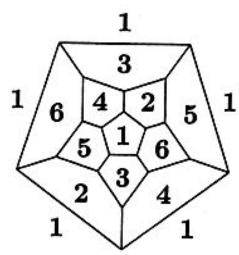
Prześledźmy, co się stanie, gdy zamienimy cyfry 5 i 6. Otrzymamy permutację par numerowań dualnych, która zamienia a z b, c z e i d z f. Transpozycji $(5,6)$ w $S_6(1,2,3,4,5,6)$ odpowiada złożenie trzech transpozycji w $S_6(a,b,c,d,e,f)$!



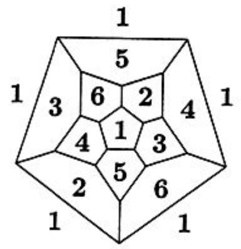


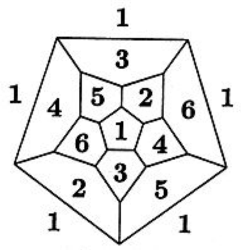
a



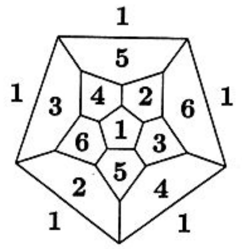


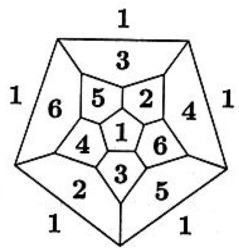
b



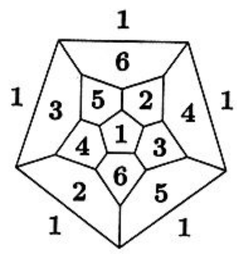


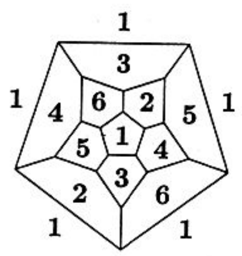
c





d





e

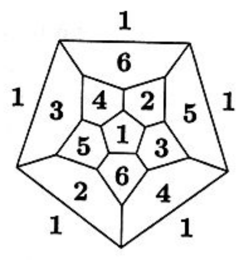
Ogólnie, oznaczając przez $[x_1, \ldots, x_k]$ zbiór permutacji będących złożeniem rozłącznych cykli długości $x_1, \ldots, x_k$, otrzymujemy następujące odpowiedniości:

$S_6(1,2,3,4,5,6)$	$S_6(a,b,c,d,e,f)$
identyczność	identyczność
[2]	[2, 2, 2]
[3]	[3, 3]
[4]	[4]
[5]	[5]
[6]	[2, 3]
[2, 2]	[2, 2]
[2, 3]	[6]
[2, 4]	[2, 4]
[3, 3]	[3]
[2, 2, 2]	[2]

Rozważania przedstawione w niniejszym artykule są ściśle związane z następującym twierdzeniem:

Twierdzenie. Dla dowolnego $n \neq 6$ wszystkie automorfizmy grupy S_n to automorfizmy wewnętrzne, natomiast grupa S_6 posiada także automorfizmy zewnętrzne.

Czytelnik znający pojęcie automorfizmu bez trudu zrozumie treść powyższego twierdzenia, a nie znający tego pojęcia nie zniechęci się do czytania niniejszego artykułu, bo to już koniec.



f