Jest to zapis odczytu na III Ogólnopolskiej Szkole Historii Matematyki, która odbyła się w 1988 roku w Jaworzu. Tekst przedrukowujemy na prośbę Jerzego Mioduszewskiego, który był redaktorem naukowym preprintów z tej Szkoły.

Tadeusz Świątkowski (1933–1994), profesor Politechniki Łódzkiej, autor prac z teorii funkcji rzeczywistej.

Czy tylko przyczynki?

Nurt mnogościowy w teorii funkcji rzeczywistych

Tadeusz ŚWIĄTKOWSKI, Łódź

I tylko koni żal

Wstęp

Celem niniejszego opracowania jest nie tyle przedstawienie jakichś znaczących osiągnięć, ile pokazanie pewnych charakterystycznych, jak mi się wydaje, cech twórczości matematyków z przełomu XIX i XX w.

Był to już okres tworzenia bardzo systematycznych teorii ogólnych, ale też okres, kiedy przede wszystkim odkrywano pewne zjawiska szczególne, noszące w sobie zaczyn do dalszego rozwoju. Ponieważ nie rozwinęło się jeszcze piśmiennictwo naukowe, a okres czekania na publikację był krótki, w niejednym tomie czasopisma, np. *Fundamenta Mathematicae*, można spotkać cykl prac różnych autorów, poświęconych temu samemu problemowi postawionemu przez innego autora, przy czym prace te wyraźnie wskazują na istnienie bezpośrednich kontaktów między autorami. O takiej bezpośredniości mówią też tytuły prac, zawierające często nazwisko w charakterze informacji: *O pewnym problemie Pana X; Uwagi do pracy Panny W.* [23], czy też nawiązywanie w tekście do osoby, a nie tylko do tematu – notatki w rodzaju *Informację tę przekazał mi Pan Y*, a nawet zapowiedź *rozwiązania problemu, który atakował mój mąż* [35].

Żałując bardzo, że minął już czas takiego romantyzmu, przedstawiam kilka wyników, które w większości dzisiaj mogłyby otrzymać zaledwie miano przyczynków, a są dla mnie cenne, ponieważ ich autorzy odkrywają pewne ciekawe zjawiska, nie próbując nadawać im zbyt ogólnej postaci.

Przeliczalność

Zafascynowanie teorią równoliczności sprawiło, że w wielu pracach spotykamy próby przeliczenia elementów różnych zbiorów lub stwierdzenia ich nieprzeliczalności. Warto kilka tego rodzaju zadań przytoczyć.

a. Nieprzeliczalność przedziału. Wśród rozlicznych dowodów szczególne miejsce zajmuje następujący. Przypuszczając, że (x_n) jest ciągiem wszystkich punktów przedziału $\langle a,\ b\rangle$, dzielmy ten przedział na trzy części o równej długości, oznaczając przez $\langle a_1,\ b_1\rangle$ taki spośród nich, do którego nie należy x_1. W przedziale $\langle a_1,\ b_1\rangle$ znajdujemy jego trzecią część $\langle a_2,\ b_2\rangle$, która nie zawiera x_2. Wspólny punkt tak utworzonych przedziałów $\langle a_n,\ b_n\rangle$ jest różny od każdego z punktów x_n. Sprzeczność; koniec – ale tylko dowodu. Tym, co każe się nad tym dowodem zatrzymać, jest zawarta w jego pomyśle możliwość „wymijania” w pewnych konstrukcjach kłopotliwego ciągu punktów, czasem ciągu zbiorów nigdzie gęstych czy miary zero. Pozwala to np. w wielu twierdzeniach ustalających monotoniczność funkcji poprzez znak pochodnej, czy jakiegoś jej uogólnienia, pomijać punkty takich małych, dających się „wyminąć”, zbiorów.

b. Punkty asymetrii. W 1920 r. W. Young [36] przeliczył punkty asymetrii funkcji. Punkt x_0 nazywa się punktem asymetrii funkcji f, jeżeli zbiory liczb granicznych lewostronnych i prawostronnych tej funkcji w punkcie x_0 są różne. Kojarząc z punktem asymetrii x_0 liczby wymierne p, q, r takie, że w przedziale $(x_0,\ p)$ lub $(p,\ x_0)$ funkcja f nie przyjmuje wartości należących do przedziału $(q,\ r)$, ale dowolnie blisko x_0 takie wartości przyjmuje, łatwo otrzymuje się przeliczalność zbioru związanych z takimi trójkami punktów.

Poza interesującym stwierdzeniem, że asymetria jest czymś wyjątkowym, zwraca tu uwagę wykorzystanie ośrodkowości przestrzeni liczb rzeczywistych, choć jeszcze wprost się o tym nie mówi. Pozwoliło to później przenieść te idee na funkcje o wartościach w przestrzeniach ośrodkowych.

W rozwijającej się do dziś teorii *cluster sets* odnotujmy wyniki matematyków polskich z lat dwudziestych. W 1922 r. Wacław Sierpiński przeliczył zbiór punktów, w których $f_+(x) \neq f_-(x)$, natomiast w 1924 r. Stefan Kempisty [9] przeliczył punkty, w których np. górna granica aproksymatywna prawostronna jest mniejsza od dolnej granicy aproksymatywnej lewostronnej.

Do ciekawszych wniosków wynikających z twierdzenia Younga należy następujący: funkcja mająca wszędzie pochodną – choćby nieskończoną – ma tylko przeliczalną liczbę punktów nieciągłości; są one bowiem punktami asymetrii. Formalnym wnioskiem z twierdzenia Younga jest przeliczalność punktów nieciągłości funkcji monotonicznej, ale chyba to ostatnie mogło być inspiracją pierwszego.

Ciągi funkcyjne

a. Klasyfikacja Baire'a. Ponieważ dla każdego ciągu liczb porządkowych mniejszych niż Ω istnieje liczba $\alpha < \Omega$ większa od wszystkich liczb ciągu, znalazło się ograniczenie przez Ω liczby klas Baire'a otrzymywanych w ten sposób, że każda kolejna klasa składa się z granic ciągów funkcji Lebesgue'a $F_\alpha(x, t)$ takiej, że każda funkcja klasy mniejszej niż α ma postać $f(x) = F_\alpha(x, t_0)$, przy pewnym t_0 okazuje się, że klasyfikacja Baire'a ciągnie się rzeczywiście przez wszystkie liczby $\alpha < \Omega$.

Ciekawą serię wyników związanych z klasyfikacją Baire'a zapoczątkował Stefan Mazurkiewicz. Zapytał on, mianowicie, czy dla każdej liczby porządkowej $\alpha < \Omega$ istnieje podzbiór E_α zbioru liczb rzeczywistych taki, że dla funkcji określonych na tym zbiorze klasyfikacja Baire'a kończy się dokładnie na numerze α, tzn. istnieje taka funkcja $f : E_\alpha \to R$ dla wszystkich klas o numerach $\xi < \alpha$, ale nie istnieje taka funkcja należąca do klasy α i nie należąca do żadnej klasy o numerze $\xi < \alpha$. Jest oczywiste, że za E_1 można wziąć dowolny zbiór skończony. Sierpiński [28] zauważył, że za E_2 można przyjąć zbiór liczb wymiernych [lub inny przeliczalny gęsty w R – *T.Ś.*]. Zakładając CH, Edward Marczewski [32] wykazał, że za E_2 można także przyjąć pewien zbiór nieprzeliczalny. Wreszcie J. Popruženko [20], też zakładając CH, wykazał istnienie zbioru E_3, a właściwie pokazał, że zbiorem takim jest skonstruowany w 1914 r. przez Mikołaja Łuzina taki zbiór nieprzeliczalny L, że każdy jego punkt jest jego punktem kondensacji, a wszystkie zbiory I kategorii na L są przeliczalne. Dodajmy, że wynik Marczewskiego stanowił też negatywną odpowiedź na pytanie Banacha o niepustość wszystkich klas Baire'a funkcji określonych na dowolnym nieprzeliczalnym zbiorze liczb rzeczywistych. W tej samej pracy Marczewski zauważył, że dla zbioru doskonałego (lub zawierającego zbiór doskonały) wszystkie klasy Baire'a są niepuste.

CH to hipoteza continuum (*Red.*)

Uwaga! Problem Mazurkiewicza wiąże się z następującym zagadnieniem. Definiując domknięcie $\bar{A}$ zbioru A przez dołączenie doń granic ciągów zbieżnych (w przestrzeni z operacją granicy), nie zawsze mamy $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$. Oznaczając przez X przestrzeń funkcji drugiej klasy Baire'a na zbiorze $L = E_3$ Łuzina–Popruženki dla $A \subset X$ otrzymujemy równość $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$, przy czym jeśli B jest zbiorem wszystkich funkcji rzeczywistych ciągłych na L, to $B \neq \bar{B} \neq \bar{\bar{B}}$. Dodajmy, że to właśnie polski matematyk, Kazimierz Kuratowski [13], jest autorem aksjomatyki, wyróżniającej jako jeden z aksjomatów właśnie omawianą tu równość $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$.

b. Metoda przekątniowa. Nie udało mi się ustalić, od kogo pochodzi metoda przekątniowa, pozwalająca dla ciągu funkcji (f_n), określonych na zbiorze przeliczalnym (x_k) wybrać ciąg rosnący (n_j) liczb naturalnych w ten sposób, że każdy z ciągów o wartości $f_{n_j}(x_k)$ ma przy j dążącym do nieskończoności granicę (skończoną przy założeniu, że przy ustalonym k ciąg wartości $(f_n(x_k))$ jest ograniczony). Nie pomijając znaczenia tej metody dla dowodów twierdzenia Arzeli – dziś kryterium zwartości w przestrzeni funkcji ciągłych – czy twierdzenia Helly'ego o możliwości wybrania ciągu zbieżnego z ciągu wspólnie ograniczonych funkcji monotonicznych na przedziale, podamy wyniki polskich matematyków, będące pewnego rodzaju analizą możliwości takiego wybierania podciągów.

Stanisław Saks postawił dość naturalne pytanie: *Czy dla każdego ciągu* (f_n) *funkcji określonych na przedziale istnieje jego podciąg* (f_{n_k}) *taki, że ciąg wartości* $f_{n_k}(x)$ *ma granicę dla wszystkich* x *z pewnego nieprzeliczalnego zbioru* N*?*

Do tego pytania ustosunkowali się Sierpiński [29] i Mazurkiewicz [17]. Pierwszy (jak to często bywa przy założeniu CH) dał odpowiedź negatywną. Drugi wykazał, że jeśli P jest zbiorem doskonałym, to dla każdego ciągu funkcji ciągłych (f_n) wspólnie ograniczonych na P istnieje podciąg (f_{n_k}) zbieżny – i to jednostajnie – na pewnym zbiorze doskonałym $P^* \subset P$.

Zbieżność asymptotyczna oznacza tu zbieżność według miary (*Red.*)

Warto zestawić z tym twierdzenie Riesza, charakteryzujące zbieżność asymptotyczną przez istnienie dla każdego podciągu takiego podciągu, który jest już zbieżny prawie wszędzie, i twierdzenie Jegorowa o tym, że ciąg funkcji mierzalnych zbieżny prawie wszędzie jest zbieżny jednostajnie na pewnym zbiorze, którego dopełnienie ma małą miarę, i wreszcie twierdzenie Sierpińskiego [27], mówiące (przy CH), że istnieje ciąg zbieżny funkcji określonych na przedziale, który nie jest zbieżny jednostajnie na żadnym zbiorze nieprzeliczalnym. Temat ten kontynuował Poprużenko; przywołam tu jedynie tytuł pracy: *Sur le phénomène de convergence de M. Sierpiński*, potwierdzający niejako naszą tezę o radości odkrywania zjawisk górującej nad potrzebą tworzenia teorii, a czasem tylko formalnych uogólnień, wyrażoną we **Wstępie**.

c. Zagęszczanie osobliwości. W 1927 r. Stefan Banach i Hugo Steinhaus [3], inspirowani – jak piszą – przez Heinkela, podali dwa twierdzenia wykazujące, jak pewne osobliwości przysługujące ciągowi pewnych obiektów da się zgromadzić w jednym z nich. Zjawisko to nazwali zagęszczeniem osobliwości. A oto twierdzenia:
T.1. Jeżeli (g_k) jest układem ortonormalnym funkcji ciągłych na $\langle a,\ b\rangle$ i jeżeli każdemu punktowi t_p pewnego zbioru przeliczalnego punktów przedziału $\langle a,\ b\rangle$ odpowiada taka funkcja ciągła f_p, której rozwinięcie względem układu (g_k) jest rozbieżne w punkcie t_p, to istnieje funkcja ciągła f, której rozwinięcie względem układu (g_k) jest rozbieżne we wszystkich punktach t_p.
T.I. Niech (U_{pq}) będzie takim ciągiem podwójnym funkcjonałów liniowych, że dla punktów x_p

$$\lim_{q\to\infty} \sup U_{pq}(x_p) = \infty.$$

Wtedy istnieje (niezależny od p) punkt x taki, że

$$\lim_{q\to\infty} \sup U_{pq}(x) = \infty$$

dla wszystkich p.

Ponieważ wyniki te uzyskuje się metodą kategorii – za pomocą twierdzenia Baire'a – nie dziwi fakt, że już w 1932 r. w książce Banacha [2] twierdzenie T.I otrzymało mocniejszą formę. Mówi się tam już o kategorii zbiorów, na których odpowiednie ciągi są rozbieżne. Czytelnik spotykający tu termin „zagęszczanie osobliwości" po raz pierwszy, może odnieść wrażenie, że chodzi wyłącznie o występowanie osobliwości na zbiorach gęstych. Autorzy współczesnych podręczników i monografii ograniczają się jedynie do podawania zjawiska, które stanowiło punkt wyjścia (chyba dla Steinhausa).

Uwaga! Zestawienie punktów **b** i **c** nie jest przypadkowe. Zarówno w jednym, jak i w drugim mowa jest o tym, że pewne właściwości, przysługujące po jednej pewnym obiektom, można zgromadzić (zagęścić) w jednym – możliwość wybrania lub skonstruowania dla każdego punktu z pewnego zbioru ciągu zachowującego się w nim w określony sposób (zbieżnego u Helly'ego, rozbieżnego u Banacha–Steihausa); wnioskuje się o istnieniu jednego ciągu, który tak się zachowuje we wszystkich tych punktach. Można to odczytać również tak, że otrzymany ciąg sam „obsługuje" cały, np. gęsty, zbiór punktów.

d. Od Hahna do Tonga, czyli o aproksymacji funkcji pierwszej klasy. Pierwsza klasa Baire'a powstaje z klasy funkcji ciągłych przez zwykłe przechodzenie do granicy. Jest sporo prac, w których zabiega się o uzyskanie w tej klasie jakichś oszacowań jednostajnych. Do najciekawszych zaliczylibyśmy możliwość znalezienia dla funkcji f, g półciągłych (odpowiednio) z góry i z dołu takiej funkcji ciągłej h, że $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$. Odnotujmy tu udział Hahna, który w 1912 r. pokazał taką możliwość dla funkcji dwóch zmiennych, a w 1917 r. [6] również dla funkcji w przestrzeni metrycznej. W 1948 r. Tong [33] wykazał, że w ramach przestrzeni T_1 możliwość ta charakteryzuje przestrzenie normalne.

A co w Polsce? Rok 1921 przynosi pewne wyniki Mazurkiewicza, Sierpińskiego i Kempistego, a 1927 r. jeszcze rezultaty Sierpińskiego. Mazurkiewicz [16] pokazuje, że funkcja ograniczona I klasy Baire'a na przedziale może być jednostajnie aproksymowana przez różnice funkcji półciągłych z góry. Kempisty [8] potrafi między dwie funkcje I klasy $f_1 < f_2$ wprowadzić funkcję f $(f_1 \leq f \leq f_2)$, będącą różnicą dwóch funkcji półciągłych z góry, natomiast Sierpiński [26] zauważa, że jeżeli f jest półciągła z góry, g półciągła z dołu na przedziale i $f(x) < g(x)$, to istnieje takie $\delta > 0$, że $|x' - x| < \delta \Rightarrow f(x) < g(x) - \delta$.

Iloczyn kartezjański

a. Twierdzenie Fubiniego i twierdzenie Kuratowskiego–Ulama. Pochodzące z 1907 r. twierdzenie Fubiniego ma jako szczególny przypadek informację o tym, że jeżeli zbiór płaski ma miarę zero, to jego prawie wszystkie cięcia prostymi równoległymi też są miary zero.

Pierwszym wynikiem wskazującym na analogię między zbiorami miary zero a zbiorami pierwszej kategorii było twierdzenie Kuratowskiego–Ulama [14] głoszące, że dla zbiorów pierwszej kategorii zachodzi zjawisko podobne do wcześniej opisanego. Dokładniej: dla zbioru E pierwszej kategorii w iloczynie kartezjańskim $Y_1 \times U_2$ przestrzeni ośrodkowych istnieje taki zbiór A pierwszej kategorii w Y_1, że dla każdego $x \in Y_1 \setminus A$ zbiór $\{y \in Y_2 : (x, y) \in E\}$ jest pierwszej kategorii w Y_2. Dało to początek wielu badaniom analogii między klasami zbiorów miary zero i pierwszej kategorii [19].

b. Funkcje wielu zmiennych. Spośród wielu twierdzeń opisujących właściwości funkcji dwóch zmiennych za pomocą odpowiednich właściwości funkcji otrzymanych przez ustalenie wartości jednej ze zmiennych przytoczymy twierdzenie Baire'a z 1899 r. o tym, że funkcja $f(x, y)$ ciągła względem x i y oddzielnie i punktowo nieciągła na płaszczyźnie jest granicą ciągu funkcji ciągłych (prostą konstrukcję takiego ciągu podał później Lebesgue) oraz bez podawania szczegółów zaanonsujemy twierdzenia Kempistego dotyczące funkcji półciągłych [10] i quasi-ciągłych [11] z lat 1929–1932.

Metoda kategorii

Dużo ciekawych faktów dało się ustalić dzięki zastosowaniu twierdzenia Baire'a o kategorii. Przytoczymy kilka twierdzeń o tym, że funkcje o wyróżnionych właściwościach stanowią zbiór rezydualny w pewnej przestrzeni zupełnej.

a. Funkcje nieróżniczkowalne. W 1931 r. Banach wykazał, że w przestrzeni $C(0, 1)$ funkcje mające pochodną choćby w jednym punkcie stanowią zbiór pierwszej kategorii. Mówiąc językiem bardziej współczesnym i zarazem potocznym, oznacza to, że typowa funkcja ciągła nie ma pochodnej w żadnym punkcie.

Warto zestawić z tym wynik Marcinkiewicza [15], jak gdyby wyjaśniający, na czym może takie nieposiadanie pochodnej polegać. Wykazał on mianowicie, że dla dowolnego ciągu liczb $h_n \neq 0$ dążącego do zera istnieje taka funkcja ciągła $F : \langle 0, 1 \rangle \to R$, że dla dowolnej funkcji $f : (0, 1) \to R$ istnieje podciąg (h_{n_k}) taki, że

$$f(x) = \lim_{k \to \infty} \frac{F(x + h_{n_k}) - F(x)}{h_{n_k}}$$

prawie wszędzie na $(0, 1)$. Co więcej, zbiór takich funkcji też jest rezydualny w $C(0, 1)$.

b. Funkcje analityczne. Metoda kategorii „zawędrowała" także do funkcji analitycznych, choć wprowadził ją tam przedstawiciel funkcji rzeczywistych – Marczewski. W 1933 r. wspólnie z Kierstem [12] wykazał, że typowa funkcja holomorficzna w kole jednostkowym na każdym jego promieniu przyjmuje wartości tworzące zbiór gęsty na płaszczyznie.

Zbiór odległości. Przesunięcia

a. Twierdzenie Steinhausa. Ciekawą serię wyników podał w 1920 r. Steinhaus [31]. Nie znając jeszcze twierdzenia o istnieniu w zbiorze miary dodatniej punktu gęstości, wykazał, że przy małym przesunięciu w zbiorze miary dodatniej nie możemy otrzymać zbioru z nim rozłącznego. Oznacza to też, że zbiór $D(E)$ złożony z odległości między punktami zbioru E o dodatniej mierze zawiera pewien przedział o początku w zerze.

Znalazło się też twierdzenie, według którego w każdym zbiorze miary dodatniej znajdzie się ciąg różnych punktów a_n takich, że odległości $d(a_i, a_j)$ są wymierne.

Dziś już wielu ludzi umie pokazać, kiedy obraz iloczynu kartezjańskiego $A \times B$ za pomocą funkcji $f: A \times B \to R$ zawiera przedział, inni potrafią skojarzyć długość takiego przedziału z miarami zbiorów, jednak jest to rezultatem trudnych i wartościowych obserwacji za pomocą teleskopów tego zjawiska, które gołym okiem dostrzegł Steinhaus.

b. Twierdzenie Sierpińskiego. Początek wspomnianej serii twierdzeń Steinhausa stanowiło spostrzeżenie Sierpińskiego, że zbiór odległości między punktami zbioru o mierze dodatniej na prostej zawiera liczbę wymierną dodatnią. On też podał pewne dodatkowe informacje o zbiorze $D(E)$ odległości między punktami zbioru E.

W 1925 r. Sierpiński [25] wykazał, że gdy E jest zbiorem borelowskim, to $D(E)$ jest L-mierzalny, ale nie dla każdego L-mierzalnego zbioru E mamy L-mierzalność zbioru $D(E)$. Również w tym kierunku idą dwa twierdzenia z 1932 r. [30]. Pierwsze (przy założeniu CH) mówi o istnieniu nieprzeliczalnego zbioru $N \subset R$ o mierze zero (lub pierwszej kategorii – patrz twierdzenie Kuratowskiego–Ulama), którego każde przesunięcie jest z nim identyczne z dokładnością do zbioru przeliczalnego, natomiast drugie przynosi wiadomość, że istnieje zbiór mierzalny o mocy kontinuum, którego przesunięcia różnią sie od niego o zbiór mocy mniejszej.

Zamiast zakończenia

Jeżeli niezbyt wyraźnie zilustrowałem to, co mnie urzeka, a mianowicie postrzeganie pewnych zjawisk i ich wagi, zanim otrzymały odpowiednią oprawę w postaci ogólnej teorii, to może wyjaśni to przykład związany z osobą jednego z moich Nauczycieli.

Otóż w 1933 r. Zygmunt Charzyński napisał pracę [4] o pochodnej symetrycznej – pokazując, że pewien zbiór związany z istnieniem tej pochodnej i pochodnej zwykłej jest mały (rozproszony), ale nie o wynik w tym momencie chodzi. W rozmowie ze mną na temat tej, moim zdaniem, trudnej pracy stwierdził, że właściwie całe rozumowanie jest bardzo proste; udało mu się bowiem wpaść na jeden dobry pomysł. Było nim spostrzeżenie, że złożenie dwóch symetrii jest przesunięciem. Ciekawe, jak na taką wypowiedź zareagowaliby autorzy szkolnych podręczników definiujący translację jako superpozycję dwóch symetrii?

Nie tylko w matematyce obserwujemy dziś większą skłonność do tworzenia własnej „teorii" niż do rozwiązania trudnego, konkretnego problemu. Być może dlatego przyszły laureat Nagrody Nobla, fizyk Werner Heisenberg, usłyszał od jednego ze swoich nauczycieli: *Z tego, co pan opowiadał, przypuszczalnie teoria jest panu bliższa [...] Jednak wtedy, gdy zamierza pan uprawiać teorię, musi pan z wielką starannością opracowywać drobne i na pierwszy rzut oka nieważne zagadnienia [...], które dopiero jako jedna całość umożliwią obraz nowo zdobytego obszaru* ([7], s. 34). Z tej też przyczyny kard. J. Ratzinger [21] martwi się, że *Każdy teolog chce być raczej twórczy, a przecież jego właściwe zadanie* *polega na niesieniu pomocy w zrozumieniu, przez głoszenie wspólnych prawd wiary, a nie tworzenie własnych. Jeżeli się tego nie uwzględni, to jedność wiary się załamie i rozproszy w wielu szkołach i prądach, często ze sobą sprzecznych, a to wyrządzi wiele krzywd ludowi bożemu.*

Bibliografia

[1] R. Baire: *Sur les fonctions de variables reeles.* Annali di Math. 1899, t. 3.
[2] S. Banach: *Teorja operacyj.* Warszawa 1931.
[3] S. Banach, H. Steinhaus: *Sur le principe de la condensatio de singularités.* Fundamenta Mathematicae 1927, IX.
[4] Z. Charzyński: *Sur les fonctions dont la derivée symetrique est partout fini.* Fundamenta Mathematicae 1933, XXI.
[5] G. Fubini: *Sugli integrali multipli.* Atii Acad. Naz. Lincei Rend. 1907, 16.
[6] H. Hahn, *Über halbstetige und unstetige funktionen*, Wiener Akad. Ber. 126, 1917.
[7] W. Heisenberg: *Część i całość.* Warszawa PIW 1987.
[8] S. Kempisty: *Sur approximatin de fonctions de première classe.* Fundamenta Mathematicae 1921, II.
[9] S. Kempisty: *Sur les fonctions approximativement discontinues.* Fundamenta Mathematicae 1924, VI.
[10] S. Kempisty: *Sur les fonctions semicontinues par rapport à chacune de deux variables.* Fundamenta Mathematicae 1929, XIV.
[11] S. Kempisty: *Sur les fonctions quasicontinues.* Fundamenta Mathematicae 1932, XIX.
[12] S. Kierst, E. Szpilrajn: *Sur certaine singularities des fonctions analytiques uniformes.* Fundamenta Mathematicae 1933, XXI.
[13] K. Kuratowski: *Topologie* I. Warszawa–Wrocław 1948.
[14] K. Kuratowski, S. Ulam: *Quelques propriétes topologiques des produits combinatoires.* Fundamenta Mathematicae 1932, XIX.
[15] J. Marcinkiewicz: *Sur les nombres derivés.* Fundamenta Mathematicae 1935, XXIV.
[16] S. Mazurkiewicz: *Sur les fonctions de classe* I. Fundamenta Mathematicae 1932, XVII.
[17] S. Mazurkiewicz: *Sur les suites des fonctions continues.* Fundamenta Mathematicae 1932, XVII.
[18] S. Mazurkiewicz, W. Sierpiński: *Sur un problème concernant les fonctions continues.* Fundamenta Mathematicae 1924, VI.
[19] J.C. Oxtoby: *Measure and category.* New York–Heidelberg–Berlin 1971.
[20] G. Poprougenko [J. Poprużenko]: *Sur une problème de M. Mazurkiewicz.* Fundamenta Mathematicae 1930, XV.
[21] G. Poprougenko: *Sur le phénomène de convergence de M. Sierpiński.* Fundamenta Mathematicae 1954, XLI.
[22] J. Ratzinger: *Raport o stanie wiary.* Kraków–Warszawa 1986.
[23] A. Rosenthal: *Eine Bemerkung zu der Arbeit von Frl. Weilös.*
[24] W. Sierpiński: *Démonstartion d'un théorème sur les fonctions de première classe.* Fundamenta Mathematicae 1921, II.
[25] W. Sierpiński: *Sur l'ensemble des distances entre les points d'un ensemble.* Fundamenta Mathematicae 1925, VII.
[26] W. Sierpiński: *Sur une propriété des fonctions semicontinues.* Fundamenta Mathematicae 1927, IX.
[27] W. Sierpiński: *Remarque sur le théorème de M. Egoroff.* C.R. des séances de la Soc. dec Sciences et des Letters de Varsovie 1928, Cl. III, 20.
[28] W. Sierpiński: *Sur les images de Baire des ensembles linéaires.* Fundamenta Mathematicae 1930, XV.
[29] W. Sierpiński: *Remarques sur les suites infinies de fonctions. Solution d'un problème de M. S. Saks.* Fundamenta Mathematicae 1932, XVIII.
[30] W. Sierpiński: *Sur les translations des ensembles linéaires.* Fundamenta Mathematicae 1932, XIX.
[31] H. Steinhaus: *Sur les distances des points des ensembles de mesure positive.* Fundamenta Mathematicae 1920, I.
[32] E. Szpilrajn: *Sur un problème de M. Banach.* Fundamenta Mathematicae 1930, XV.
[33] H. Tong: *Some characterization of normal and perfectly normal spaces.* Bull. Amer. Math. Soc. 1948, 54.
[34] H. Tong: *Some characterization of normal and perfectly normal spaces.* Duke Math. Journ. 1952, XIX.
[35] G.C. Young: *On fonctions possessing differentials.* Fundamenta Mathematicae 1930, XV.
[36] W.H. Young: *La symétrie de structure des fonctions des variables réeles.* Bull. des Sciences Mathématiques 1928, LII.