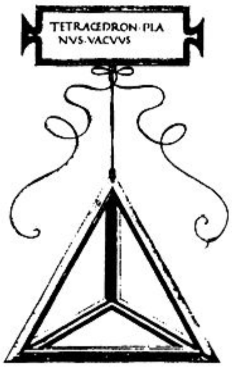
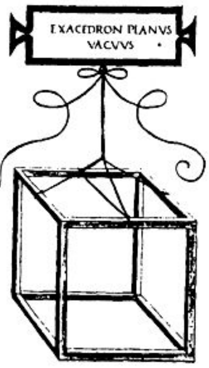
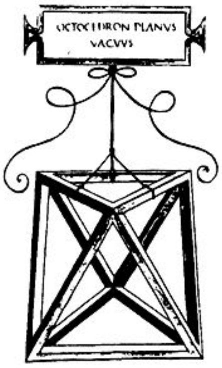
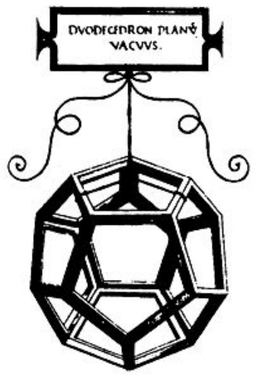
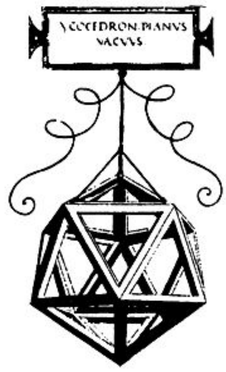










Istnienie wielościanów foremnych

Zdzisław POGODA, Kraków

Dlaczego istnieją wielościany foremne? Pytanie wydaje się nieco dziwne, przecież sprawa jest oczywista. Każdy wie, jak wygląda sześcian lub ośmiościan, więc w czym problem?

Podczas Międzynarodowego Kongresu Matematyków w Warszawie w jednym z pomieszczeń Pałacu Kultury i Nauki miała miejsce wystawa modeli wielościanów. Odwiedzających wystawę intrygował twór umieszczony na środku sali wykonany z plastikowych wielokątnych płytek i podpisany „nieistniejący wielościan". Wielu gości dziwiło się „jak to nieistniejący, przecież go widzę". Model miał tak wiele ścian (ponad 90), że nietrudno było je odrobinę powyginać w taki sposób, iż naprawdę nie były płaskimi wielokątami, ponadto przyleganie ścian zapewne było tylko przybliżone. Skonstruowany obiekt po prostu był tylko przybliżoną wersją wielościanu, a dokładniejsza analiza położenia ścian, wierzchołków i krawędzi mogłaby wykazać, że odpowiedni wielościan nie może istnieć.

Pewne idee związane z wielościanami foremnymi zostały podpowiedziane przez przyrodę. Sól kuchenna w mineralogii nazywana halitem ma ładne sześcienne kryształy. Fluoryt krystalizuje w postaci ośmiościanów foremnych, a w odpowiednich warunkach kryształy pirytu mogą przybrać formę dwunastościanu foremnego. Czy jednak kryształy, podobnie jak „nieistniejący wielościan" nie są tylko przybliżeniami form, których naprawdę nie ma?

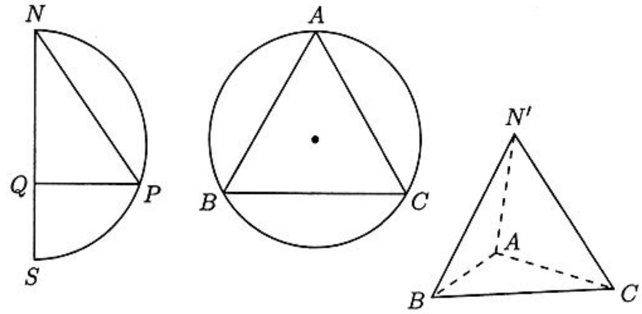
Wielościanami foremnymi interesowali się pitagorejczycy. Pierwszy opis tych brył znajdujemy u Platona w dialogu Timajos. Natomiast dowód faktu, że wielościanów foremnych jest dokładnie pięć typów wraz z uzasadnieniem ich istnienia został umieszczony w trzynastej księdze *Elementów* Euklidesa.

Sprawdzenie, że wielościanów foremnych jest co najwyżej pięć typów nie jest trudne i wynika z przeanalizowania liczby i typów wielokątów foremnych, które mogą się zbiegać w jednym wierzchołku wielościanu.

Wykazanie istnienia poszczególnych wielościanów wymaga przeprowadzenia ich konstrukcji. Euklides proponuje następujące konstrukcje.

Konstrukcja czworościanu foremnego.

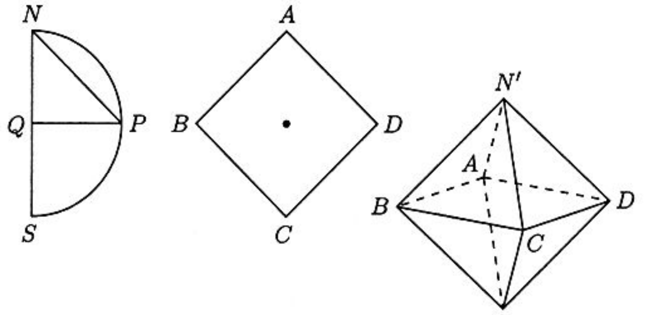
Rozważmy półkole o średnicy NS. Wybierzmy na tej średnicy punkt Q o tej własności, że $NQ : QS = 2 : 1$. Przez punkt Q poprowadźmy prostopadłą do średnicy, która przecina półokrąg w punkcie P. Następnie skonstruujemy trójkąt równoboczny – ścianę czworościanu foremnego. W tym celu konstruujemy trójkąt równoboczny wpisany w okrąg o promieniu QP. Wierzchołki tego trójkąta będą trzema wierzchołkami czworościanu. Teraz przez środek narysowanego okręgu (środek ciężkości trójkąta) prowadzimy prostopadłą do płaszczyzny trójkąta. Odkładamy na niej z punktu przecięcia z płaszczyzną odcinek QN. Drugi koniec odcinka wyznacza czwarty wierzchołek czworościanu. Łatwo, za pomocą nieskomplikowanego rachunku, sprawdzamy, że rzeczywiście otrzymamy czworościan foremny. A więc, QN jest wysokością czworościanu, NP jest krawędzią, odcinek NS natomiast ma długość średnicy sfery opisanej na skonstruowanym czworościanie.



Rys. 1

Podobnie przebiega konstrukcja ośmiościanu foremnego.

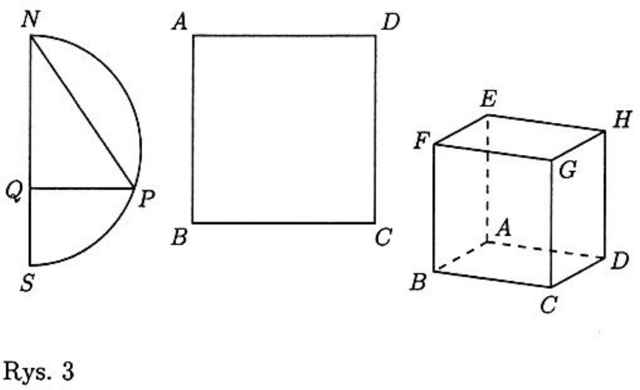
Rozpoczynamy od półkola o średnicy NS. Punkt Q wybieramy teraz w środku średnicy, prowadzimy przez niego prostopadłą, która wyznaczy na półokręgu punkt P. Konstruujemy kwadrat o boku długości takiej samej jak NP. Ze środka kwadratu prowadzimy prostopadłą do jego płaszczyzny i odkładamy na tej prostej odcinek NQ z jednej strony i QS z drugiej. Końce tych odcinków i wierzchołki kwadratu wyznaczą wierzchołki ośmiościanu foremnego. Odcinek NS jest średnicą sfery opisanej na ośmiościanie.



Rys. 2

Konstrukcję sześcianu można przystosować do poprzednich.

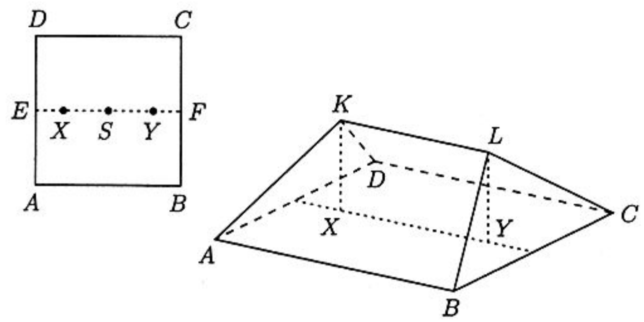
Na średnicy NS półkola wybieramy punkt Q taki, że $NQ : QS = 2 : 1$. Jak w obu poprzednich przypadkach przez Q prowadzimy prostopadłą wyznaczającą na półokręgu punkt P. Teraz konstruujemy kwadrat o bokach długości NP. Dalej możemy się domyśleć co będzie. Przez każdy wierzchołek kwadratu prowadzimy prostopadłą do płaszczyzny tego kwadratu i odkładamy odcinki też o długości takiej jak NP. Dostajemy w ten sposób osiem wierzchołków sześcianu. Sfera opisana na sześcianie ma średnicę NS.



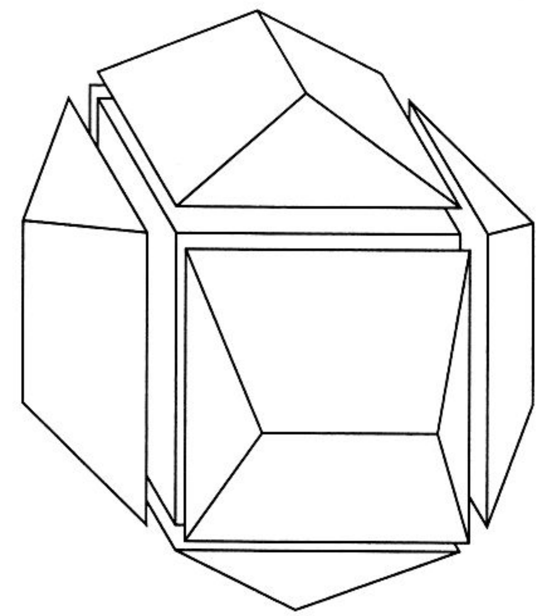
Rys. 3

Inaczej przebiega konstrukcja dwunastościanu foremnego.

Obudowujemy sześcian przystającymi „pryzmami". W kwadracie $ABCD$, który jest ścianą sześcianu wybieramy środki E i F odpowiednio boków AB i CD i łączymy je odcinkiem. Środek tego odcinka oznaczamy przez S. Dzielimy ES w złotym stosunku punktem X tak, że EX jest krótszym odcinkiem podziału. Podobnie na FS wybieramy punkt Y. Przez X i Y prowadzimy prostopadłe do płaszczyzny kwadratu. Zaznaczamy na nich punkty K i L takie, że $XK = XS = YL$. Punkty A, B, C, D, K i L wyznaczają wierzchołki odpowiedniego wielościanu – przykrywki. Do każdej ściany sześcianu przyklejamy odpowiednio skonstruowane obiekty i otrzymamy dwunastościan foremny.



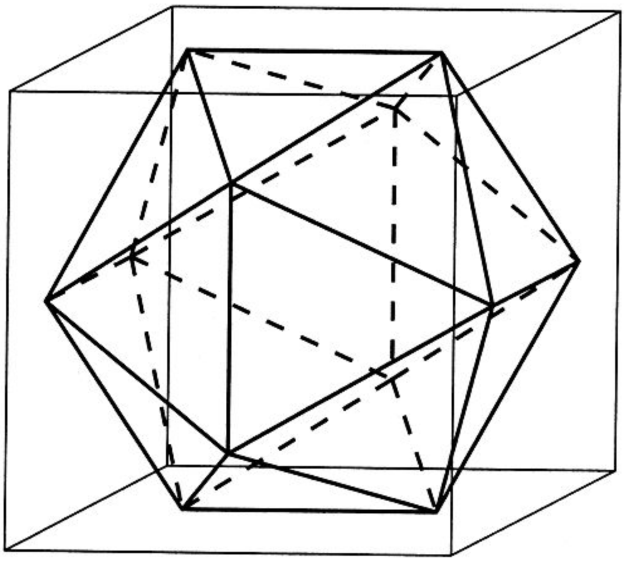
Rys. 4a



Rys. 4b

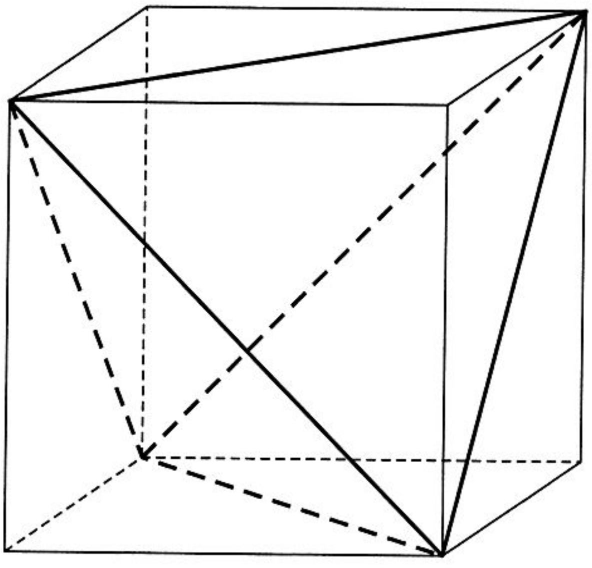
Wreszcie konstrukcja dwudziestościanu foremnego.

Wykorzystamy oznaczenia poprzedniej konstrukcji. Tam w kwadracie wyznaczyliśmy punkty X i Y. Jeśli w każdej ścianie sześcianu wskażemy odpowiednie punkty z zachowaniem orientacji odpowiadającej konstrukcji dwunastościanu dostaniemy dwanaście wierzchołków dwudziestościanu foremnego.



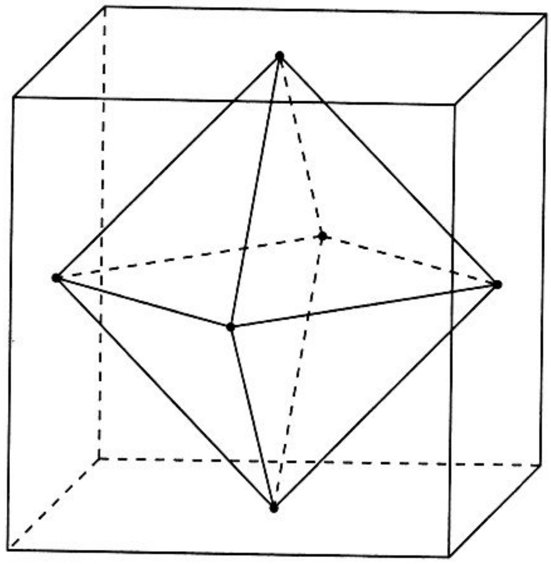
Rys. 5

Oczywiście, konstrukcje wielościanów foremnych można przeprowadzić na różne sposoby. Załóżmy na przykład, że mamy już sześcian (istnieje wiele prostych jego konstrukcji). Wybierając pewne przekątne jego ścian, po jednej na każdej ścianie dostaniemy szkielet czworościanu foremnego.



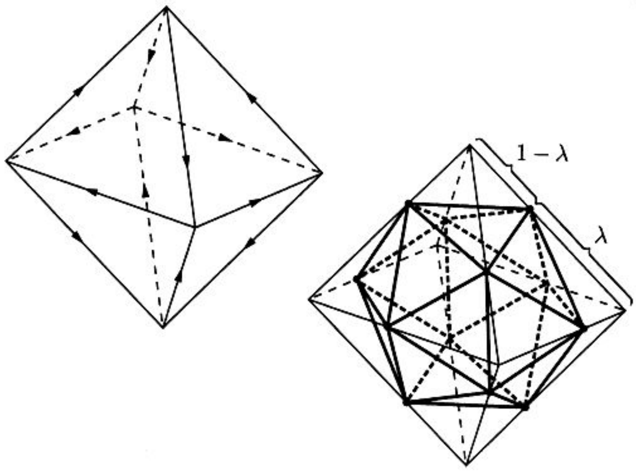
Rys. 6

Natomiast środki ścian tegoż sześcianu są wierzchołkami ośmiościanu foremnego.



Rys. 7

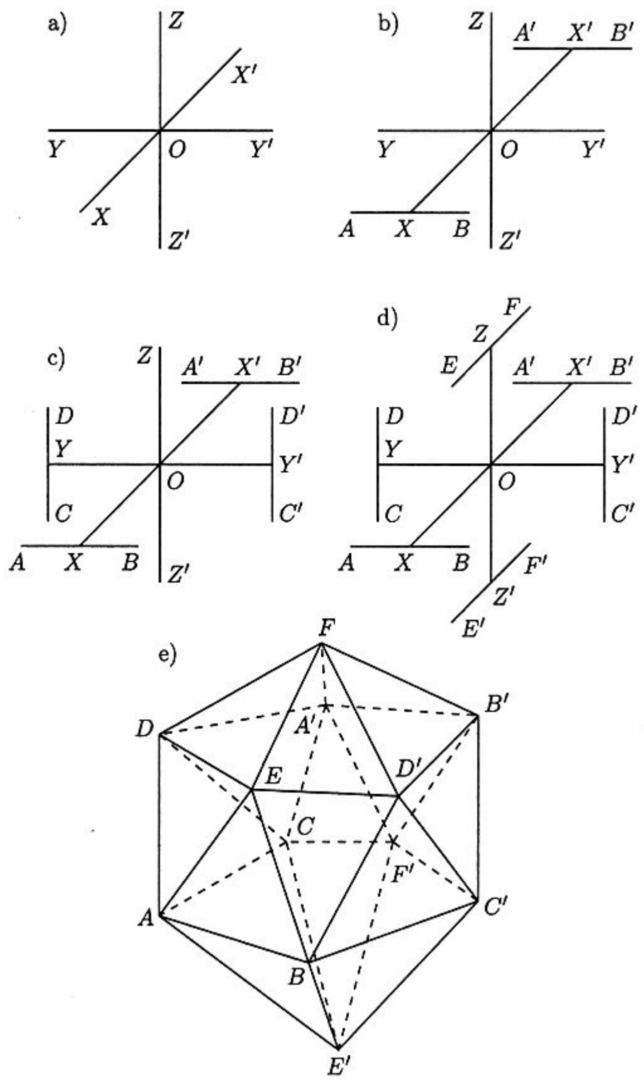
Z ośmiościanu foremnego z kolei możemy otrzymać dwudziestościan foremny. Wybierzmy jedną ścianę ośmiościanu – trójkąt równoboczny i podzielmy jego boki w złotym stosunku tak, by punkty podziału wyznaczyły wierzchołki nowego trójkąta równobocznego, który jest równocześnie ścianą dwudziestościanu. Podział jednej ściany wyznacza jednoznacznie podziały wszystkich ścian ośmiościanu.

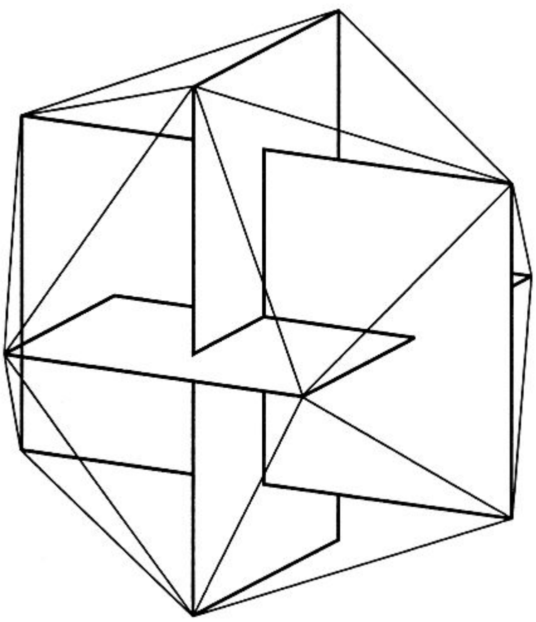


Rys. 8

Zwróćmy uwagę na jeszcze jedną konstrukcję dwudziestościanu foremnego. Rozważmy trzy proste wzajemnie prostopadłe w przestrzeni przecinające się w jednym punkcie O. Od tego punktu przecięcia odłóżmy dwa odcinki o długości a na każdej prostej np. OX i OX', OY i OY' oraz OZ i OZ'. Następnie na końcach tych odcinków umieśćmy odpowiednio nowe odcinki o długościach $a(\sqrt{5}-1)$. Odcinki te powinny być zawarte w prostych równoległych do XX', YY' i ZZ' (np. odcinki zaczepione w punktach X i X' mogą być równoległe do YY', w punktach Y, Y' równoległe do ZZ', a zaczepione w punktach Z i Z' równoległe do XX'). Ich środkami są punkty

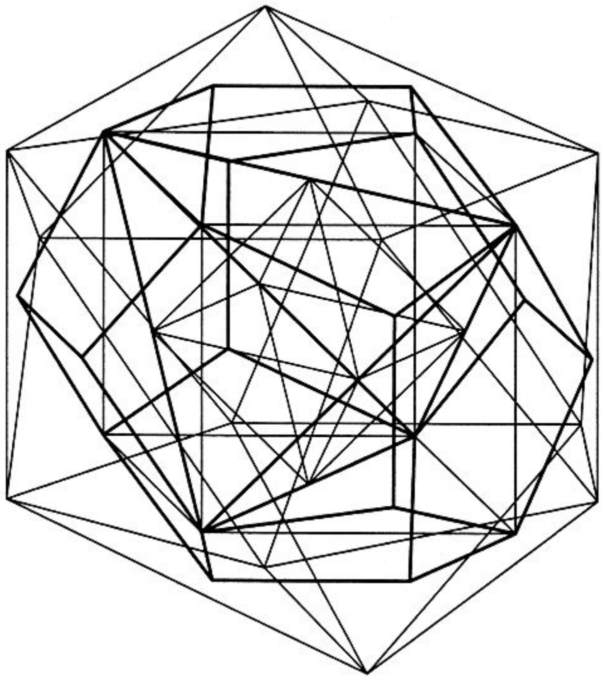
X, X', Y, Y', Z, Z'. Końce tych odcinków wyznaczają wierzchołki dwudziestościanu foremnego.





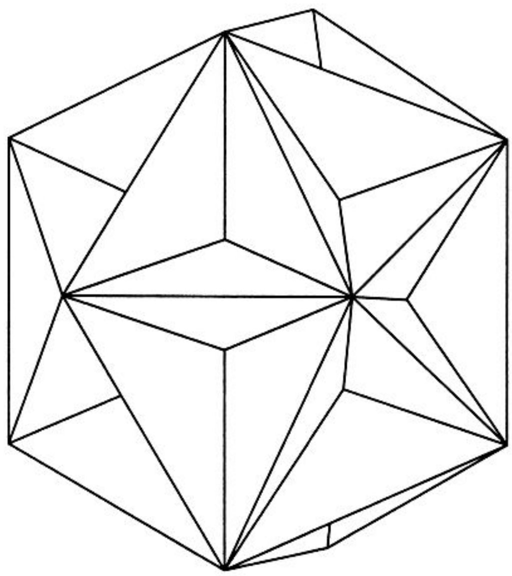
Rys. 9

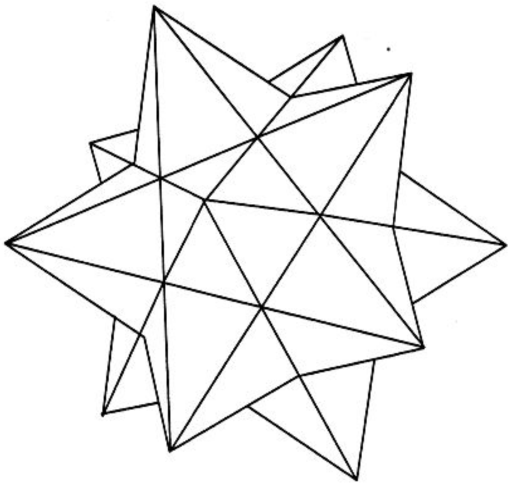
Wielościany foremne możemy ułożyć w kompozycje typu „jeden w drugim".



Rys. 10

Gdy wiemy już, że istnieją wielościany foremne, to pojawiają się nowe pytania o istnienie wielościanów archimedesowych też zbudowanych z wielokątów foremnych, ale niekoniecznie tego samego typu, o istnienie wielościanów gwiaździstych foremnych, których ścianami mogą być wielokąty foremne gwiaździste. Czy z wielokątów wypukłych da się skonstruować wielościan foremny, lecz już niewypukły? Wreszcie można zapytać się o istnienie wielościanów jednorodnych, które są uogólnieniami wielościanów archimedesowych – w każdym wierzchołku schodzi się taka sama liczba wielokątów danego typu (nie muszą być wypukłe) w odpowiednim ustalonym porządku.





Pytanie o istnienie wielościanów foremnych jest z jednej strony zadaniem elementarnym – rozwiązuje się je prostymi środkami geometrii klasycznej – i z pozoru wydaje się banalne, z drugiej strony jednak stanowi punkt wyjścia do innych problemów z teorii wielościanów, ich uogólnień oraz przeróżnych często niezwykle ważnych zastosowań.

Czytelnikowi, który mimo wszystko uważa, że problemy dotyczące istnienia wielościanów są zagadnieniami banalnymi, proponujemy na rozgrzewkę udowodnienie twierdzenia:

Gdy zrezygnujemy z wypukłości wielościanu, to istnieją jeszcze dokładnie cztery wielościany foremne.