Zastosowania twierdzenia o zwartości poza logiką

Adam KOLANY, Katowice

Twierdzenie o zwartości

DEFINICJA. Niech V będzie dowolnym zbiorem nieskończonym. Zbiorem *formuł zdaniowych z* V *jako zbiorem zmiennych* nazywamy najmniejszy zbiór $\mathsf{Frm}(\mathsf{V})$ spośród tych F, które spełniają warunki:

1. $\mathsf{V} \subseteq F$;
2. Jeśli $\alpha \in F$, to $\neg\alpha \in F$;
3. Jeśli $\alpha, \beta \in F$, to $\alpha \vee \beta$, $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \rightarrow \beta$, $\alpha \leftrightarrow \beta \in F$

Elementy zbioru $\mathsf{Frm}(\mathsf{V})$ nazywamy *formułami zdaniowymi.*

Symbolem $\mathsf{At}(\alpha)$ oznaczać będziemy zbiór zmiennych zdaniowych występujących w α.

FAKT. Niech V będzie dowolnym zbiorem nieskończonym. Dla dowolnego $v : \mathsf{V} \rightarrow \{0,1\}$ istnieje dokładnie jedno $\mathfrak{h}^v : \mathsf{Frm}(\mathsf{V}) \rightarrow \{0,1\}$, dla którego $\mathfrak{h}^v \lceil \mathsf{V} = v$ oraz

1. $\mathfrak{h}^v(\alpha \wedge \beta) = \min(\mathfrak{h}^v(\alpha), \mathfrak{h}^v(\beta))$,
2. $\mathfrak{h}^v(\alpha \vee \beta) = \max(\mathfrak{h}^v(\alpha), \mathfrak{h}^v(\beta))$,
3. $\mathfrak{h}^v(\alpha \rightarrow \beta) = \min(1, 1 - \mathfrak{h}^v(\alpha) + \mathfrak{h}^v(\beta))$,
4. $\mathfrak{h}^v(\alpha \leftrightarrow \beta) = \min(1 - \mathfrak{h}^v(\alpha) + \mathfrak{h}^v(\beta), 1 - \mathfrak{h}^v(\beta) + \mathfrak{h}^v(\alpha))$,
5. $\mathfrak{h}^v(\neg\alpha) = 1 - \mathfrak{h}^v(\alpha)$ dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathsf{Frm}(\mathsf{V})$.

Ze względu na jedyność zamiast $\mathfrak{h}^v(\alpha)$, piszemy $v(\alpha)$. Liczbę $v(\alpha)$ nazywamy *wartością* formuły α przy wartościowaniu zmiennych v.

Poniższy fakt stwierdza, ze wartość formuły zależy jedynie od wartościowania jej zmiennych.

UWAGA. Jeżeli $w\lceil \mathsf{At}(\alpha) = v\lceil \mathsf{At}(\alpha)$, to $v(\alpha) = w(\alpha)$.

DEFINICJA. Niech V będzie zbiorem nieskończonym, niech α będzie formułą zdaniową i niech $\mathcal{X}$ będzie zbiorem formuł. Powiemy, że:

1. *v spełnia* α, jeżeli $v(\alpha) = 1$.
2. *v spełnia* zbiór formuł $\mathcal{X}$, jeżeli v spełnia wszystkie formuły zbioru $\mathcal{X}$.
3. Zbiór $\mathcal{X}$ jest *spełnialny*, jeśli istnieje v spełniające $\mathcal{X}$.

UWAGA. Niech A będzie dowolnym zbiorem, niech $\mathsf{V} = \{\mathsf{p}_{a,b} : a, b \in A\}$ i niech $\mathcal{X}_0$ będzie następującym zbiorem formuł:

$$\mathcal{X}_0 = \{\mathsf{p}_{a,b} \wedge \mathsf{p}_{b,c} \rightarrow \mathsf{p}_{a,c} :\ a,b,c \in A\} \cup$$
$$\cup \{\mathsf{p}_{a,b} \leftrightarrow \neg\mathsf{p}_{b,a} :\ a, b \in A,\ a \neq b\} \cup \{\neg\mathsf{p}_{a,a} :\ a \in A\}$$

i niech v będzie wartościowaniem spełniającym $\mathcal{X}_0$. Wówczas relacja dana wzorem:

$$a \prec_* b \iff v(\mathsf{p}_{a,b}) = 1 \tag{1}$$

jest liniowym porządkiem na A.

UWAGA. Niech A będzie dowolnym zbiorem i niech $\prec$ będzie częściowym porządkiem na A. Jeżeli zamiast $\mathcal{X}_0$ rozważymy zbiór

$$\mathcal{X}_1 = \mathcal{X} \cup \{\mathsf{p}_{ab} :\ a \prec b,\ a, b \in A\},$$

to relacja $\prec_*$ dana wzorem (1) jest liniowym porządkiem rozszerzającym $\prec$.

Jest też w pewnym sensie na odwrót:

UWAGA. Niech $\prec_*$ będzie liniowym porządkiem na zbiorze A i niech v realizuje warunek (1). Wówczas v spełnia wszystkie formuły zbioru $\mathcal{X}_0$. Jeżeli $\prec_*$ jest liniowym porządkim rozszerzającym porządek $\prec$, to v spełnia wszystkie formuły zbioru $\mathcal{X}_1$.

Twierdzeniem o Zwartości nazywamy następujące:

TWIERDZENIE. *Zbiór formuł $\mathcal{X}$ jest spełnialny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnialny jest każdy jego skończony podzbiór.*

Bezpośrednim wnioskiem z poprzednich rozważań i tego twierdzenia są następujące dwa fakty:

TWIERDZENIE (Ordering Principle, OP). *Każdy zbiór można uporządkować liniowo.*

TWIERDZENIE (Ordering Extension Principle, OEP). *Każdy częściowy porządek można rozszerzyć do porządku liniowego.*

Ultrafiltry

DEFINICJA. Niech $\mathcal{A}$ będzie dowolnym zbiorem. *Filtrem w $\mathcal{A}$* nazywamy dowolną **niepustą i właściwą** rodzinę $\mathfrak{F}$ podzbiorów zbioru $\mathcal{A}$, spełniającą warunki:

1. Jeśli $X, Y \in \mathfrak{F}$, to $X \cap Y \in \mathfrak{F}$;
2. Jeśli $X \in \mathfrak{F}$ i $X \subseteq Y$, to $Y \in \mathfrak{F}$.

Ultrafiltrami nazywamy elementy maksymalne w klasie filtrów. Filtry postaci $\langle X \rangle_A = \{Y \subseteq A : X \subseteq Y\}$ nazywa się *filtrami głównymi.*

UWAGA.
1. Niech $\mathfrak{F}$ będzie filtrem w A. Wówczas $\emptyset \notin \mathfrak{F}$ i $A \in \mathfrak{F}$. 2. Niech $X \in A$. Wówczas $\langle X \rangle_A$ jest ultrafiltrem wtedy i tylko wtedy, gdy $X = \{a\}$ dla pewnego $a \in A$.

Interesujące jest, czy wogóle istnieją ultrafiltry niegłówne? Najpierw definicja:

DEFINICJA. Niech $\mathcal{C}$ będzie niepustą rodziną zbiorów. Rodzina $\mathcal{C}$ jest *scentrowana*, jeżeli

$$X_1 \cap \ldots \cap X_n \neq \emptyset, \qquad \text{dla dowolnych} \quad X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{C}.$$

Korzystając z twierdzenia o zwartości można wykazać następujące:

TWIERDZENIE. *Niech A będzie zbiorem nieskończonym i niech $\mathcal{C}$ będzie scentrowaną rodziną pozdzbiorów rodziny A. Wówczas istnieje ultrafiltr $\mathfrak{F}$ w A zawierający $\mathcal{C}$.*

DOWÓD. Niech $\mathsf{V} = \{\mathsf{p}_X : X \subseteq A\}$ i niech

$$\mathcal{X} = \{\mathsf{p}_X \wedge \mathsf{p}_Y \to \mathsf{p}_{X\cap Y} : X, Y \subseteq A\} \cup \{\mathsf{p}_X \to \mathsf{p}_Y : X \subseteq Y \subseteq A\} \cup$$
$$\cup \{\neg \mathsf{p}_X \leftrightarrow \mathsf{p}_{A\setminus X} : X \subseteq A\} \cup \{\mathsf{p}_X : X \in \mathcal{C}\} \cup \{\neg \mathsf{p}_\emptyset\}$$

Wówczas każdy skończony podzbiór zbioru $\mathcal{X}$ jest spełnialny. W istocie. Niech $\mathcal{X}_0$ będzie skończonym podzbiorem zbioru $\mathcal{X}$ i niech $\{X_1, \ldots, X_s\}$ będą wszystkimi elementami $\mathcal{C}$ występującymi w formułach zbioru $\mathcal{X}_0$. Niech także $X_0 \in \mathcal{C}$. Oczywiście $Y = X_0 \cap X_1 \cap \ldots \cap X_s$ jest niepusty. Niech $a \in Y$ i niech v_0 dane będzie wzorem

$$v_0(X) = 1 \iff a \in X.$$

Wykażemy, że v_0 spełnia formuły zbioru X_0. Istotnie. Niech $\alpha \in \mathcal{X}_0$. Jeżeli α jest postaci $\mathsf{p}_X \wedge \mathsf{p}_Y \to \mathsf{p}_{X\cap Y}$, to mamy

$$v_0(\mathsf{p}_X \wedge \mathsf{p}_Y \to \mathsf{p}_{X\cap Y}) = \min\{1, 1 - v_0(\mathsf{p}_X \wedge \mathsf{p}_Y) + v_0(\mathsf{p}_{X\cap Y})\} =$$
$$= \min\{1, 1 - v_0(\mathsf{p}_X) \cdot v_0(\mathsf{p}_Y) + v_0(\mathsf{p}_{X\cap Y})\} = 0$$
$$\iff v_0(\mathsf{p}_X) = v_0(\mathsf{p}_Y) = 1 \quad \text{i} \quad v_0(\mathsf{p}_{X\cap Y}) = 0$$

Jednakże $v_0(\mathsf{p}_X) \cdot v_0(\mathsf{p}_Y) = 1$ oznacza, że $a \in X$ i $a \in Y$, a $v_0(\mathsf{p}_{X\cap Y}) = 0$ oznacza, że $a \notin X \cap Y$, co nie jest możliwe. Przypadki, gdy α jest postaci $\mathsf{p}_X \to \mathsf{p}_Y$ i $\neg \mathsf{p}_X \leftrightarrow \mathsf{p}_{A\setminus X}$ rozpatrzyć można podobnie. Jeżeli α jest postaci p_X dla pewnego $X \in \mathcal{C}$, to X jest jednym spośród $X_1, \ldots, X_s$. Wówczas, oczywiście, $a \in Y \subseteq X$, skąd $v_0(\mathsf{p}_X) = 1$. Jeśli w końcu α było formułą $\neg \mathsf{p}_\emptyset$, to, skoro $a \notin \emptyset$, mamy $v_0(\neg \mathsf{p}_\emptyset) = 1 - v_0(\mathsf{p}_\emptyset) = 0$.

Tym samym v_0 spełnia wszystkie formuły zbioru $\mathcal{X}_0$, co wobec dowolności tego ostatniego dowodzi, że każdy skończony podzbiór zbioru $\mathcal{X}$ jest spełnialny.

Korzystając z Twierdzenia o Zwartości, stwierdzamy istnienie v, które spełnia wszystkie formuły zbioru $\mathcal{X}$. Nietrudno zauważyć wówczas, że
$\mathfrak{F} = \{X \subseteq A : v(\mathsf{p}_X) = 1\}$ jest ultrafiltrem w (A) zawierającym $\mathcal{C}$. ∎

Jeśli chodzi o filtry niegłówne, to mamy:

WNIOSEK. Niech A będzie zbiorem nieskończonym. Istnieje wówczas ultrafiltr niegłówny w A.

DOWÓD. Jako $\mathcal{C}$ przyjmujemy rodzinę zbiorów ko-skończonych
$\mathcal{C} = \{X \in A : A \setminus X$ jest skończony$\}$. Oczywiście $\mathcal{C}$ jest scentrowana i niepusta. Ponadto każdy ultrafiltr zawierający $\mathcal{C}$ jest niegłówny. ∎

Twierdzenie Tichonowa

Podczas kursu topologii prezentuje się studentom następujące twierdzenie Tichonowa:

TWIERDZENIE. *Produkt niepustych przestrzeni topologicznych zwartych jest niepusty i zwarty.*

Tw. Tichonowa

W dowodzie tego twierdzenia używa się tzw. *Pewnika Wyboru* — zasady stwierdzającej, że produkt dowolnej rodziny zbiorów niepustych jest niepusty. Jak się jednak okazuje, założenie prawdziwości twierdzenia Tichonowa implikuje prawdziwość Pewnika Wyboru (twierdzenie Kelly'ego). W rzeczy samej. Niech $\{A_j : j \in J\}$ będzie rodziną zbiorów niepustych i niech $\bullet$ będzie elementem spoza $\bigcup_{j \in J} A_j$. Niech dalej $X_j = A_j \cup \{\bullet\}$ i niech jedynymi zbiorami otwartymi w X_j będą zbiory $\emptyset$, X_j, A_j oraz $\{\bullet\}$. Oczywiście przestrzenie te są zwarte. Więc, na mocy ~~Pewnika~~ Wyboru, produkt $X = \prod_{j \in J} X_j$ jest zwarty. Ponieważ rodzina $\{\pi_j^{-1}{}''A_j : j \in J\}$ jest scentrowaną rodziną zbiorów domkniętych, jej przekrój jest niepusty. Ale przecież $\bigcap_{j \in J} \pi_j^{-1}{}''A_j = \prod_{j \in J} A_j$.

$f''A$, to obraz A przez f.

Wiadomo przy tym, że Twierdzenie o Zwartości jest **istotnie** słabsze od pewnika wyboru.

Okazuje się, że jeżeli w twierdzeniu Tichonowa ograniczymy sie do przestrzeni topologicznych Hausdorffa, to do jego dowodu wystarcza już Twierdzenie o Zwartości. Ze względu na brak miejsca pominiemy dowód tego faktu odsyłając zainteresowanego czytelnika do literatury. Wykażemy za to jak Twierdzenie o Zwartości wynika z założenia o zwartości tzw. kostek Cantora, tj. produktów dyskretnych przestrzeni dwupunktowych. Niech $\mathcal{X}$ będzie zbiorem formuł zdaniowych, którego każdy skończony podzbiór jest spełnialny. Wówczas, dla dowolnego $\alpha \in \mathcal{X}$ zbiór $\mathsf{Sat}(\alpha) = \{v \in \mathfrak{C} : v(\alpha) = 1\}$ jest skończoną sumą zbiorów bazowych produktu $\mathfrak{C} = {}^{V}\{0, 1\}$, te zaś z kolei są otwarto-domknięte, co oznacza, że $\mathsf{Sat}(\alpha)$, $\alpha \in \mathcal{X}$ są otwarto-domknięte. Na mocy założenia twierdzenia o zwartości, rodzina $\mathcal{C} = \{\mathsf{Sat}(\alpha) : \alpha \in \mathcal{X},\}$ jest scentrowana. Skoro $\mathfrak{C}$ jest zwarta, $\mathcal{C}$ ma niepusty przekrój. Wówczas każde $v \in \bigcap \mathcal{C}$ spełnia wszystkie formuły zbioru $\mathcal{X}$.

Widzimy więc, że twierdzenie o zwartości możemy traktować jako stwierdzenie zwartości kostek Cantora.

Wybory σ-niesprzeczne

W poprzednim paragrafie stwierdzono, że Twierdzenie o Zwartości jest istotnie słabszym wnioskiem z Pewnika Wyboru, W tym paragrafie zobaczymy jak daleko od pewnika wyboru znajduje się to twierdzenie.

Niech $\mathcal{A} = \{A_i : i \in J\}$ będzie parami rozłączną rodziną zbiorów niepustych i niech σ będzie relacją binarną na $\bigcup \mathcal{A}$. *Wyborem σ-niesprzecznym* na $\mathcal{A}$ nazwiemy funkcję $f : J \to \bigcup \mathcal{A}$, dla której $f(i) \in A_i$, $i \in J$ oraz

$$f(i)\ \sigma\ f(j), \qquad \text{dla } i, j \in J, \quad i \neq j.$$

Przy założeniu Twierdzenia o Zwartości wykazać można następujące:

TWIERDZENIE (O wyborach σ-niesprzecznych). *Niech $\mathcal{A}$ i σ oznaczają to co wyżej. Jeżeli każda skończona podrodzina rodziny $\mathcal{A}$ ma wybór σ-niesprzeczny, to rodzina $\mathcal{A}$ też ma wybór σ-niesprzeczny.*

Symbol $\bigwedge$ służy do oznaczenia koniunkcji; podobnie symbol $\bigvee$ służy do oznaczenia alternatywy.

DOWÓD. Niech $\mathsf{V} = \bigcup \mathcal{A}$ i niech

$$\mathcal{X} = \{\bigwedge\{\bigvee \xi : \xi \text{ jest różnowartościowym uporządkowaniem zbioru } A_i\} : i \in J\} \cup \cup\{\sim (a\,\sigma\, b) : a, b \in \bigcup \mathcal{A}, \quad a \neq b\}.$$

Uporządkowanie różnowartościowe zbioru (skończonego), to różnowartościowy ciąg wszystkich elementów tego zbioru.

Na mocy założenia każdy skończony podzbiór zbioru $\mathcal{X}$ jest spełnialny, więc istnieje v spełniające wszystkie formuły zbioru $\mathcal{X}$. Wówczas $f = \{\langle i, a\rangle : v(a) = 1, a \in A_i, \quad i \in J\}$ jest σ-niesprzecznym wyborem dla $\mathcal{A}$. ■

Okazuje się, że prawdziwość twierdzenia o zwartości równoważna jest prawdziwości twierdzenia o wyborach σ-niesprzecznych. Pozostaje to prawdą, jeśli ograniczymy się do rodzin zbiorów 3-elementowych. Analogiczna równoważność dla rodzin zbiorów 2-elementowych nie zachodzi.

Widzimy zatem, że twierdzenie o zwartości równoważne jest wzmocnionej wersji Pewnika Wyboru dla rodzin zbiorów skończonych – $\mathsf{AC}_{\mathsf{fin}}$.

Na zakończenie powiedzieć trzeba, że znakomitym kompendium wiedzy na temat słabych wersji Pewnika Wyboru, a w szczególności Twierdzenia o Zwartości, jest dzieło Paula Howarda i Jean Rubin pt. „Weak AC Project", wydane przez American Mathematical Society w 1998 roku. Stamtąd dowiemy się, iż z twierdzenia o zwartości wynika, że:

- każda abelowa grupa beztosyjna daje się liniowo uporządkować;
- każde ciało, w którym -1 nie jest sumą kwadratów daje się liniowo uporządkować;
- każde ciało ma algebraiczne domknięcie;
- każde dwie bazy przestrzeni wektorowej są równoliczne;
- istnieją zbiory niemierzalne w sensie Lebesgue'a.

Najbardziej jednak zaskakującym jest, to, że wnioskiem z twierdzenia o zwartości jest znane twierdzenie Hahna-Banacha o rozszerzaniu funkcjonałów liniowych ciągłych.

TWIERDZENIE. *Niech X będzie przestrzenią unormowaną i niech Y będzie jej podprzestrzenią. Wówczas dla dowolnego liniowego i ciągłego $f : Y \to \mathbb{R}$ istnieje liniowe i ciągłe $F : X \to \mathbb{R}$, dla którego*

$$F \lceil Y = f \qquad \text{oraz} \qquad ||f|| = ||F||.$$