# Czy nie ma reguły bez wyjątku

*Kazimierz TRZEBIATOWSKI*

Pytanie postawione w tytule ma związek ze znanym powiedzeniem, że właśnie „nie ma reguły bez wyjątku". Jeśli głębiej się zastanowić nad jego sensem, to trzeba dojść do wniosku, że jest to stwierdzenie paradoksalne. Skoro bowiem jest tak, jak ono głosi, to znaczy – skoro żadna reguła nie jest bezwyjątkowa, to również ono samo nie jest regułą bezwyjątkową. A w takim razie istnieją od niej wyjątki, czyli istnieją reguły, od których nie ma wyjątków. To oczywiście znaczy, że nie jest tak, jak to zdanie głosi. No dobrze, przyjmijmy zatem, że wypowiedź „nie ma reguły bez wyjątku" jest nieprawdziwa: niech będzie tak, że istnieją reguły, od których istnieją wyjątki. W takim razie, jak się wydaje, żadnej trudności nie ma. Reguła mówiąca o tym, po jakich literach w języku polskim należy pisać „rz" (jeśli słychać „sz" albo „ż"), ma słynne wyjątki. Ale reguła, będąca cechą podzielności przez 3, jest bezwyjątkowa. I wszystko jest OK.

Są jednak takie zdania, które budzą paradoksy w każdej możliwej sytuacji, jak np. „paradoks golibrody": dowódca jednostki wojskowej nakazuje jednemu z żołnierzy, który zna się na fachu fryzjerskim, strzyc wszystkich tych, którzy sami siebie nie strzygą. Cokolwiek adresat tego rozkazu zrobi względem własnego owłosienia, złamie rozkaz...

Wzorcem i poniekąd źródłem wszystkich tego rodzaju paradoksów (w tym również owego połowicznego paradoksu sygnalizowanego tytułem niniejszego tekstu) jest szeroko znany tzw. „paradoks kłamcy". Jego rodowód jest starożytny, został rozpowszechniony, przez filozofa greckiego ze szkoły megarejskiej, Eubilidesa z Miletu (IV wiek p.n.e.), a odkryty prawdopodobnie przez Kreteńczyka Epimenidesa, filozofa i poetę żyjącego w VI wieku p.n.e. Już w starożytności był znany do tego stopnia, że jego ślad można znaleźć także w *Biblii* (por. aluzję w *Liście św. Pawła do Tytusa*, rozdział 1, werset 12).

Najbardziej „neutralna treściowo" postać paradoksu kłamcy brzmi: „właśnie teraz kłamię", albo – jeśli ktoś woli wypowiedź bezosobową – „niniejsze zdanie jest fałszywe". Przyjąwszy to za prawdę, trzeba nieuchronnie dojść do wniosku, że to fałsz (w sposób podobny, jak to było z rzekomym nieistnieniem reguły bez wyjątków). Przyjąwszy zaś, że to fałsz, równie niezawodnie dojdzie się do uznania, że to zdanie jest prawdziwe właśnie. Problem, jak kwalifikować zdanie „kłamcy" pod względem stosunku do prawdy, nie posiadał zadowalającego rozwiązania przez dwadzieścia kilka stuleci, aż do lat międzywojennych naszego wieku. (Rozwiązanie podpowiedział jeden z najwybitniejszych polskich logików, Stanisław Leśniewski, a polega ono na odwołaniu się do rozróżnienia między *językiem przedmiotowym* a *metajęzykiem*.)

Wtedy to także odkryto, jak można tzw. rozumowanie przekątniowe (właściwe dla paradoksów typu paradoksu „kłamcy" – nie tu miejsce na to, by objaśnić pochodzenie takiej jego nazwy) zaprząc do roboty konstruktywnej, a nie destruktywnej, tworzącej paradoksy. Efektem tych wysiłków były tzw. twierdzenia limitacyjne, odkryte w latach trzydziestych XX wieku przez najwybitniejszych logików światowych. (Nazwa „twierdzenia limitacyjne" przywodzi na myśl „postulaty niemożności" – odkrycia z dziedziny fizyki polegające na tym, że pewne wielkości fizyczne nie mogą osiągnąć, ani tym bardziej przekroczyć, pewnych naturalnych progowych wartości: żadnego ciała nie można ochłodzić do temperatury zera bezwzględnego ani rozpędzić do prędkości światła, a wielkość zwana „działaniem", będąca iloczynem energii i czasu jej zużywania, nie może być mniejsza niż „stała Plancka"; istotnie, owe odkrycia logiczno-matematyczne również dotyczą pewnych ograniczeń immanentnie zawartych – jednak nie w przyrodzie, a w konstrukcji ludzkiej wiedzy.) Należą do nich: I i II twierdzenie Gödla o niezupełności, twierdzenie Tarskiego o „niedefiniowalności prawdy", twierdzenie Churcha o nierozstrzygalności rachunku kwantyfikatorów oraz twierdzenie Turinga o nierozstrzygalności problemu stopu.

To ostatnie dotyczy pracy komputerów. Oczywiście, w 1936 r., kiedy dwaj logicy: Amerykanin, Alonso Church i Brytyjczyk, Alan Turing odkryli i udowodnili wspomniane wyżej dwa twierdzenia, nie istniały jeszcze komputery w dzisiejszym rozumieniu tego słowa. Co więcej, „komputer" (którego dotyczy twierdzenie Turinga) zwany „maszyną Turinga" nie tylko nie jest bardzo podobny do znanych nam komputerów, ale w ogóle nie może istnieć, bowiem posiada przynajmniej jeden parametr nieskończony (chodzi o jego tzw. „taśmę", która jest odpowiednikiem pamięci realnego komputera). Ta różnica jednak nie jest istotna w tym, o co chodzi tutaj, bowiem – bardzo nieściśle mówiąc – skoro czegoś nie potrafi maszyna o parametrze nieskończonym, to tym bardziej nie potrafi tego samego maszyna przeznaczona do podobnych celów, ale odznaczająca się skończoną wartością analogicznego parametru.

Dokładniej, w twierdzeniu Turinga chodzi o niemożliwość napisania programu komputerowego, który byłby zdolny dać odpowiedź na pytanie dotyczące dowolnego programu komputerowego, a mianowicie: czy ten dowolny program spowoduje zapętlenie się komputera, czy też przeciwnie – uruchomi komputer tylko na pewien skończony, dający się oszacować z góry czas (stąd nazwa: „problem stopu"). Jednak, jak pisze J. M. Brady na str. 69 w książce *Informatyka teoretyczna w ujęciu programistycznym* (wydanej przez Wydawnictwa Naukowo-Techniczne w Warszawie w 1983 r.), chociaż: „nie jest i nie będzie nigdy możliwe napisanie jednego programu, który by bezbłędnie określał, czy dowolny program podany jako wejście dla P, pętli się, czy też nie", to jednak: „znam firmę produkującą komputery, w której w ostatnim dziesięcioleciu starano się stworzyć taki program, nie bacząc na to, że nierozstrzygalność tego problemu Turing udowodnił już w 1936 roku!". Autor nie wskazał tej firmy z nazwy, nie wymienił nawet kraju, w którym znajdowała lub znajduje się siedziba owej firmy. Przedmowa autora jest datowana w październiku 1976 r., a zatem usiłowania stworzenia owego programu komputerowego przypadły na drugą połowę lat sześćdziesiątych, albo na pierwszą połowę lat siedemdziesiątych. Brady nie napisał nawet, czy firma, którą miał na myśli, ogłosiła, jakoby udało się jej taki program wyprodukować.

Twierdzenie Turinga o nierozstrzygalności problemu stopu odwołuje się do tzw. tezy [albo: hipotezy] Turinga, która mówi, że „procesy, które w sensie intuicyjnym są algorytmiczne, są to dokładnie te procesy, które mogą być zrealizowane za pomocą maszyn Turinga" (na str. 17 w cytowanej książce). Natomiast sama owa [hipo]teza Turinga nie może być dowiedziona (ani obalona) z tego prostego powodu, że orzeka coś (mianowicie: ich równozakresowość) o dwóch pojęciach, z których tylko jedno posiada „porządną" definicję, drugie zaś jest czymś, o czym (jak się wydaje) wiadomo dobrze, co to znaczy, ale nikt nie umie tego należycie określić (podobnie, jak to jest z pojęciem „jarzyny" – półżartobliwy przykład zmarłego w 1995 r. znanego polskiego logika i filozofa, ks. prof. Józefa Bocheńskiego, albo z pojęciem „czasu", które całkiem na serio – znacznie dawniej! – nękało św. Augustyna z Hippony). Właściwie owo zdanie Turinga samo w takim razie jest definicją „procesów algorytmicznych".

Tak jednak się składa (i to bynajmniej nie przypadkiem!), że zupełnie podobnie jest z twierdzeniem Churcha. Również ono w takim samym sensie zależy od [hipo]tezy Churcha, która z kolei w taki sam sposób utożsamia dwa inne pojęcia: *fukcji obliczalnej* oraz *funkcji rekurencyjnej*. Również w tym wypadku można by (idąc śladem niektórych autorów) traktować ową tezę jako definicję intuicyjnie rozumianego „zdroworozsądkowego" pojęcia funkcji obliczalnej. Natomiast, jak wiadomo, definicje są zdaniami, które nie podlegają dowodzeniu. Nie dlatego, by same były zdaniami nierozstrzygalnymi, ani nie z takiego powodu, z jakiego dowodowi nie podlegają aksjomaty (te z założenia uznaje się za prawdziwe bez dowodu), lecz po prostu dlatego, że w stosunku do nich przeprowadzanie dowodu nie ma sensu.

Analogia sięga dalej: w rzeczywistości jest tak, iż teza Churcha i teza Turinga są dwoma różnymi sposobami wypowiedzenia tego samego, mówią to samo, ale „w różnych językach", a raczej – w różnych (ale nawzajem na siebie przekładalnych!) systemach pojęć. Dlatego niektórzy matematycy i logicy nadają im wspólną nazwę: „[hipo]teza Churcha–Turinga". Również sposób zależności twierdzenia Churcha od tezy Churcha jest taki sam jak sposób zależności twierdzenia Turinga od tezy Turinga.

Można w literaturze spotkać opinię że teza Churcha nie jest potrzebna do udowodnienia twierdzenia Churcha. To prawda, ale tylko o tyle, że wobec tego udowadnia się twierdzenie, mówiące o tym, iż „funkcja określona na zbiorze wszystkich formuł rachunku kwantyfikatorów, a będąca funkcją charakterystyczną dla zbioru tez owego rachunku, nie jest funkcją rekurencyjną". Jeśli natomiast chce się stąd przejść do uznania, że „funkcja określona na zbiorze wszystkich formuł rachunku kwantyfikatorów, a będąca funkcją charakterystyczną dla zbioru tez owego rachunku, nie jest funkcją obliczalną", to nieuchronne jest skorzystanie z tezy Churcha (albo nieświadome zakładanie jej prawdziwości). Zupełnie podobnie rzecz się ma z twierdzeniem Turinga o nierozstrzygalności problemu stopu i z tezą Turinga.

Można by zatem uznać, że próba zakwestionowania twierdzenia Turinga o nierozstrzygalności problemu stopu, podjęta przez ową nie wymienioną z nazwy firmę informatyczną, jest równoważna zakwestionowaniu twierdzenia Churcha o nierozstrzygalności rachunku kwantyfikatorów. Ciekawe, że mniej więcej w tym samym czasie (i chyba niezależnie, jak wolno przypuszczać) podjęto taką próbę. Uczynił to pewien filozof i logik, profesor (a w tamtym czasie – docent) jednego z polskich uniwersytetów. (Naśladując dyskrecję J. M. Brady'ego względem tożsamości owego przedsiębiorstwa nie podam jego nazwiska, ani nazwy uczelni. Dodam tylko, że jest to naukowiec, którego osoba i pozostały dorobek są powszechnie szanowane w środowisku logików w Polsce i za granicą. Dla wygody będę go tu nazywał „Profesorem" – przez duże „P".)

Matematyka jest uważana przez wielu (a przez ludzi nie uprawiających jej zawodowo – może przesadnie?) za dziedzinę dostarczającą najbardziej „niezawodnej" wiedzy. Niemniej jednak również tam zdarzają się przykłady tego, że coś mylnie uchodzi za prawdziwe (gdy mowa o twierdzeniu) albo za poprawne (gdy mowa o dowodzie twierdzenia) przez długi czas. Tak było np. z tzw. „zasadniczym twierdzeniem algebry", którego pierwszy dowód, zaproponowany zaraz po odkryciu tego twierdzenia, był błędny, a poprawny został podany dopiero w dziesiątki lat później przez „księcia matematyków", Karola Gaussa. A dopiero stosunkowo niedawno doczekały się kompletnych dowodów takie słynne – i przez długi czas problematyczne (ale uchodzące za prawdziwe) – zdania jak: „wielka hipoteza Fermata", „hipoteza Bieberbacha" oraz odpowiedź na tak zwane „zagadnienie czterech barw".

Niemniej jednak twierdzenie Churcha od 1936 r. było tylekroć dowodzone na nowo przez licznych logików i matematyków – zarówno w celach naukowych, jak też dydaktycznych, że niedostrzeżenie błędu w dowodzie (który musiałby zachodzić, gdyby to twierdzenie Churcha było fałszywe) jest bardzo mało prawdopodobne. Profesor dopatrzył się jednak błędu w tym, jakoby Alonso Church niepoprawnie posłużył się rozumowaniem przekątniowym, gdyż rozumowania przekątniowe są (zdaniem Profesora) nieuprawnione w tzw. dowodach niewprost „per reductio ad absurdum" – „przez sprowadzenie do niedorzeczności" – typ rozumowania, jaki zdarza się w sądach podczas przedstawiania alibi przez obronę: „przypuśćmy, że oskarżony popełnił zarzucane mu przestępstwo, ale skoro tak, to uzyskujemy niedorzeczny wniosek, że wtedy właśnie znajdował się jednocześnie w dwóch różnych miejscach, bowiem istnieje dowód na to, że właśnie wtedy przebywał w...")", bowiem prowadzą do tzw. „definicyj niepredykatywnych". Owszem, problem takowych definicyj był dyskutowany już dawniej, i to przez najwybitniejszych specjalistów w zakresie logiki i podstaw matematyki (np. przez A. Fraenkela w pracach z 1927 i 1935 r. oraz W. Esslera – z 1964 r.). Jednakże akurat w tym punkcie polski adwersarz Churcha na pewno nie ma racji: posługiwanie się metodą przekątniową jest uprawnione – także w tym rodzaju zastosowań, który on kwestionuje. (Nie mam powodów uważać siebie za dobrego znawcę teorii funkcyj rekurencyjnych, ale zarzut Profesora dotyczący metody przekątniowej przeanalizowałem dokładnie i „wiem, co mówię".)

Tu jednak nasuwa się interesujące spostrzeżenie. Może być tak, że ów „idący pod prąd" logik ma rację (i że jednak zarazem rację ma Alonso Church!), jednak kosztem... tezy Churcha. Ledwie ukazał się słynny artykuł Churcha, w którym jego autor udowodnił swoje twierdzenie o nierozstrzygalności rachunku kwantyfikatorów i sformułował to, co jest obecnie nazywane [hipo]tezą Churcha, inny polski logik, Józef Pepis, o pokolenie starszy od Profesora (zamordowany przez Gestapo we Lwowie w sierpniu 1941 r.), napisał artykuł *O zagadnieniu rozstrzygalności w zakresie węższego rachunku funkcyjnego*, który został zamieszczony w „Archiwum Towarzystwa Naukowego we Lwowie, Dział III", t. 7 (1937), zesz. 8. Wyszczególniwszy tam sześć prac różnych wybitnych logików, napisał dalej (str. 169–170): „Z powyższych prac tzw. natury negatywnej wynika w sposób zupełnie ścisły, że nie istnieje żadne »rekursywne« kryterium rozstrzygania dla węższego rachunku funkcyjnego w ogólnym przypadku, przy czym przymiotnik »rekursywne« należy rozumieć w sensie bardzo obszernym pochodzącym od K. Gödla i J. Herbranda a sprecyzowanym przez S. C. Kleenego. Do twierdzenia jednak, że nie istnieje w ogóle kryterium rozstrzygania dla węższego rachunku funkcyjnego w ogólnym przypadku, można jednak tylko dojść przyjmując, jak to w gruncie rzeczy Church i A. M. Turing czynią, hypotezę, że prócz kryteriów »rekursywnych« żadnych innych kryteriów nie ma. Co się zaś tyczy tej hypotezy, to autorowie wyżej wspomniani nie dają żadnych przekonywujących argumentów na jej poparcie, lecz opierają się li tylko na czysto empirycznym fakcie, że nie znane są dotychczas prócz funkcyj rekursywnych żadne inne funkcje »obliczalne« »effectively calculable functions« u Churcha i »computable functions« u Turinga). Wobec takiego stanu rzeczy kwestia całkowitej rozwiązalności zagadnienia rozstrzygalności dla systemu węższego rachunku funkcyjnego pozostaje nadal kwestią otwartą." Tu oczywiście „rachunek funkcyjny" to to samo co „rachunek kwantyfikatorów".

Jest to najdawniejsza znana mi próba kwestionowania tezy Churcha, sugerująca, że nie każda funkcja obliczalna (w sensie intuicyjnym) jest także rekurencyjna. W nowszych pracach (m. in.: dwojga Węgrów: R. Peter z 1935 i 1959 r. oraz L. Kalmara z 1959 r., a także G. L. Bowiego z 1973 r., S. C. Kleenego z 1987 r. oraz E. Mendelsona z 1963 i 1990 r.) pojawiły się także argumenty krytyczne z drugiej strony: że nie każda funkcja rekurencyjna jest także funkcją obliczalną (w sensie intuicyjnym). Niektórzy z krytyków tezy Churcha przedstawiali argumenty obydwu tych rodzajów. Także J. M. Brady na str. 17–18 w ksiażce, o której wyżej była tu mowa, podawszy dwa argumenty na rzecz tezy Turinga, podał także dwa przeciwko niej, w tym po jednym z każdego spośród owych dwóch rodzajów. A już Józef Pepis dobrze zdawał sobie sprawę z równoważności tezy Churcha i tezy Turinga, podkreślając, że krytyka pierwszej jest tym samym krytyką drugiej. (Interesujące, że proponowane jako przykłady na „obliczalność, ale nie rekurencyjność", odwoływały się właśnie do metody przekątniowej, podważanej przez Profesora...)

Co by się stało, gdyby – jak przewidywał Pepis – nieuznawanie [hipo]tezy Churcha–Turinga spowodowało rewizję sensu limitacyjnych twierdzeń Churcha i Turinga?

W matematyce nastąpiłoby niewątpliwie „trzęsienie ziemi", i to w obszarze obejmującym podstawy matematyki, teorię mnogości i arytmetykę liczb naturalnych! Byłoby ono tym większe, gdyby Profesor rację miał również w swej krytyce zakresu stosowalności metody przekątniowej, gdyż w takim razie matematyka zostałaby spętana czymś w rodzaju „słabego finityzmu": nieskończona hierarchia nieskończonych liczb kardynalnych ulegałaby redukcji do jednej z nich, tej najmniejszej, znanej pod nazwą „alef-zero" (w zapisie: $\aleph_0$), a będącej licznością zbioru wszystkich liczb naturalnych. Polski autor był zresztą tego świadom, wspominając o tym w innej swojej publikacji sprzed kilkunastu lat, specjalnie poświęconej krytyce metody przekątniowej.

Co innego, gdy chodzi o informatykę. Argument przeciwko tezie Turinga, podany przez Brady'ego i atakujący ją od strony przeciwnej niż cytowane słowa Pepisa, jest odmienny, aniżeli – zmierzające w zasadzie do tego samego – argumenty innych wymienionych tu krytyków tezy Churcha. Mianowicie, Brady w tym miejscu, pisząc o intuicyjnej obliczalności, ma na myśli węższe pojęcie – „praktycznej obliczalności". Jednak zwrócenie uwagi nań jest cenne: to, że coś da się obliczyć w skończonym czasie, nie znaczy, że da się praktycznie obliczyć!

Jeżeli może się zdarzyć, że nawet obliczając wartość funkcji obliczalnej dla argumentów będących liczbami wygodnymi w użyciu (= stosunkowo niewielkimi liczbami naturalnymi) trzeba by zatrudnić komputer na setki lat, to co komu przyjdzie z uzyskania wyniku takiego obliczenia? A przecież pojęcie intuicyjnej obliczalności jest na tyle szerokie, że obejmuje również takie funkcje, dla których nawet komputery kwantowe (o „niebo" szybsze od obecnych, ale wciąż będące tylko przedmiotem marzeń projektantów...) musiałyby pracować dłużej niż trwało dotychczasowe istnienie ludzkości. Dużą ilością elementarnych obliczeń jest np. $9^9$, ale nierównie większą – $9^{9^9}$. Jednakże „dużo" i „mało" to pojęcia względne! Wobec nieskończoności każda inna (a więc skończona!) wielkość jest niczym: „$9^9 : \infty = 0$", ale także „$9^{9^9} : \infty = 0$", jeśli można tak się wyrazić (tzn. potraktować znak $\infty$ jak „zwykłą" liczbę). Wszystko jedno: „tylko" setki czy „aż" setki tysięcy lat – praktycznie to niczym nie różni się od „zapętlenia się" komputera.

Również to antycypował J. Pepis, pisząc w cytowanym artykule: „[...] nie żąda się, aby ilość kroków wzgl. działań przy rozstrzyganiu miała nie przekroczyć pewnej z góry określonej liczby naturalnej. [...] Żąda się jedynie i wyłącznie, aby ta potrzebna ilość kroków była w ogóle skończona. Kwestia praktycznej możliwości rozstrzygania jest kwestią zupełnie inną; [...]".

Co jednak by się stało, gdyby krytyka tezy Churcha okazała się trafna tylko w tym kierunku, który sugerował ten właśnie lwowski autor, a co stanowi[łoby] jedyną możliwą furtkę dla ewentualnej prawdziwości twierdzenia o rozstrzygalności rachunku kwantyfikatorów? Otóż nie byłoby żadnej rewolucji! Owszem, może udałoby się napisać program komputerowy, który potrafiłby zautomatyzować rozpoznawanie dowodliwości albo niedowodliwości każdego wyrażenia rachunku kwantyfikatorów. Jednak to NIE byłby program realizujący algorytm podany przez polskiego logika, który rzucił wyzwanie A. Churchowi. Przyczyna jest taka, że algorytm Profesora wcale... nie wykorzystuje założenia o fałszywości tezy Churcha/Turinga. Innymi słowami: po zakodowaniu tej procedury za pomocą tzw. *numeracji Gödlowskiej* uzyskałoby się bynajmniej nie funkcję, która jest „obliczalna, ale nie rekurencyjna" (jak funkcje zaproponowane do roli takowych przez wyżej wspomnianych węgierskich i innych krytyków tezy Churcha), lecz – właśnie funkcję rekurencyjną!

W tym sensie twierdzenie Profesora jest sprzeczne z twierdzeniem Churcha, bez względu na tezę Churcha! A ponieważ jedyny zarzut o „nadużyciu" metody przekątniowej, jaki przy tej okazji postawiono Churchowi, jest chybiony, nie ma wątpliwości, że ów polski logik nie ma racji. Profesor posłużył się w swoim rozumowaniu pewnym wynikiem pochodzącym od Kalmara (nie dotyczącym poszukiwania funkcyj „obliczalnych lecz nierekurencyjnych", ale samego zagadnienia rozstrzygalności rachunku kwantyfikatorów, a zawartym w pracy ogłoszonej w 1950 r. przez Laszló Kalmara i Janosa Suranyiego – a dedykowanej pamięci Józefa Pepisa), gdy tymczasem sam Kalmar nie tylko nie usiłował tego swojego wyniku uogólnić z (pewnego) fragmentu na całość rachunku kwantyfikatorów, ale w 1956 r. opublikował własną wersję dowodu twierdzenia Churcha o nierozstrzygalności tegoż rachunku. Algorytm Profesora, owszem, działa na ogół bardzo sprawnie, w każdym razie nie znalazłem żadnego ćwiczebnego (w sensie praktyki akademickiej) przykładu, powodującego „zapętlenie się" owej procedury, chociaż nawet na pierwszy rzut oka widać, który z przepisów owej „recepty" jest obarczony takim ryzykiem. Jednak zapewne nie to, a po prostu ogólne przekonanie, że twierdzenie Churcha jest prawdziwe (a zatem twierdzenie doń przeciwne – fałszywe!), sprawiło, że grupa informatyków pracujących na tej samej uczelni, na której jest zatrudniony Profesor, odmówiła mu napisania programu komputerowego, który miałby realizować jego algorytm. Dotarła też do mnie informacja (której jednak nie zdołałem sprawdzić), że w pewnym krajowym czasopiśmie specjalistycznym opublikowano polemikę, gdzie *expressis verbis* pokazano, na czym polega błąd Profesora.

To, że dowód twierdzenia podany przez owego logika jest błędny, nie przesądza jednak o fałszywości samego twierdzenia (por. wyżej przykład z „zasadniczym twierdzeniem algebry"!).

Natomiast to, że nawet w przypadku takiej zmiany w naszych pojęciach, która sprawiłaby, iż do funkcyj obliczalnych zaczęlibyśmy bezspornie zaliczać pewne funkcje nierekurencyjne, ograniczenie skutecznego działania algorytmu, którego poszukiwał Profesor, do praktycznej obliczalności, wynikające z fizycznych paremetrów dotyczących człowieka i wszechświata, i tak byłoby na co dzień bardziej istotne, aniżeli komfort posiadania metody rozstrzygania dla rachunku kwantyfikatorów... (Odrzucenie tezy Churcha byłoby niezbędne – jednak nie wystarczające! – dla ewentualnej rozstrzygalności rachunku kwantyfikatorów!)

W epoce oświecenia i „mody" na mechanicystyczny materializm niektórzy fizycy byli dumni z tego, że teoretycznie mogliby wyliczyć stan wszechświata dla dowolnego momentu w przeszłości albo przyszłości, gdyby tylko mogli ułożyć (i potem rozwiązać) odpowiednio wielki układ równań różniczkowych. (Według obecnych szacunków ilość owych równań byłaby rzędu $10^{80}$, co jest liczbą zaiste ogromną!) I owa duma jakoś nie kolidowała ze świadomością, że praktycznie takie zadanie byłoby i tak niewykonalne. Więcej, niektórzy z owej dumy wyciągali jeszcze dalej sięgające wnioski, jak np. pamiętne słowa Piotra Szymona de Laplace skierowane do cesarza Napoleona Bonapartego: „Sire, je n'avais besoin de cet hypothése" („Najjaśniejszy Panie, nie potrzebowałem tej hipotezy"), co było odpowiedzią na pytanie, dlaczego w swojej książce *Mechanika nieba* autor nie wspomniał o Bogu.

Warto też zauważyć, że Profesor nie zakwestionował wprost, *expressis verbis*, innych twierdzeń limitacyjnych, a w szczególności – I i II twierdzeń Gödla (mimo tego, że one wszystkie wymagają do ich udowodnienia posłużenia się rozumowaniami przekątniowymi!). To właśnie ich odkrycie zapoczątkowało szeroką i nie zakończoną do dziś dyskusję światopoglądową na temat statusu umysłu ludzkiego. Wyniki Gödla zdają się przemawiać za tym, że myślenie ludzkie, o ile tylko wymaga posługiwania się jakimkolwiek językiem dostatecznie bogatym, aby w nim dało się wysłowić „zwykłą" arytmetykę liczb naturalnych z mnożeniem), jest twórczością, w której człowiek, nie może zostać wyręczony przez maszynę (np. przez komputer). Wymowa twierdzenia Churcha wzmacnia ten sam efekt, który jednak zaistniał już przedtem, skoro obydwa te twierdzenia Gödla zostały ogłoszone o pięć lat wcześniej.

Chodzi – inaczej mówiąc – o szanse tzw. „sztucznej inteligencji", nad którą badania trwają niezależnie od powszechnego uznawania twierdzenia Churcha. Jak się wydaje, ewentualne istnienie algorytmu pozwalającego w skończonym czasie odpowiedzieć na pytanie o to, czy dany program komputerowy „zapętli się", albo czy dane wyrażenie rachunku kwantyfikatorów jest dowodliwe w tym rachunku, wcale nie wyczerpuje całej dziedziny ludzkiej pomysłowości. Dlatego pytanie o to, czy uda się kiedyś zbudować automat zdolny w pełni naśladować umiejętności intelektualne człowieka, zależy bynajmniej nie tylko od odpowiedzi na to, czy rację miał Alonso Church, czy – oponujący mu profesor logiki z Polski.

W każdym razie – w świetle tych uwag o Profesorze i o jego próbie rzucenia wyzwania twierdzeniu Churcha – sugestia zawarta w słowach Józefa Pepisa wydaje się nadal sprawą otwartą. Ani jednak odrzucenie [hipo]tezy Churcha/Turinga (na płaszczyźnie teoretycznej), ani tym bardziej – wymyślenie algorytmu i następnie programu komputerowego, który by realizował (na płaszczyźnie praktycznej) marzenie Profesora, nie zapoczątkowałyby (moim skromnym zdaniem) żadnej rewolucji – ani światopoglądowej, ani technologicznej.