Jest to streszczenie odczytu wygłoszonego na XXV Szkole Matematyki Poglądowej „Elementarne, ale niebanalne".

Twierdzenie Davenporta o różnicy $f^3 - g^2$

Arkadiusz PŁOSKI, Kielce

Będziemy rozważali wielomiany jednej zmiennej $f, g, \ldots$ o współczynnikach zespolonych. Stopień wielomianu $f \not\equiv 0$ oznaczamy $\deg f$. Przyjmujemy, że $\deg 0 = -\infty$ ze zwykłymi umowami o $-\infty$. Na początku lat sześćdziesiątych, w związku z problemem diofantycznym dotyczącym oszacowania różnicy $a^3 - b^2$ gdzie a i b są liczbami całkowitymi, pojawiło się następujące pytanie: jaki najmniejszy możliwy stopień może mieć wielomian $f^3 - g^2$ (jeśli $f^3 - g^2 \neq 0$)? Odpowiedź na to pytanie podał Davenport w 1965 roku.

Twierdzenie Davenporta. *Jeżeli* $f^3 - g^2 \neq 0$, *to* $\deg(f^3 - g^2) \geq \frac{1}{2} \deg f + 1$.

Zauważmy, że jeśli $\deg f^3 \neq \deg g^2$, to $\deg(f^3 - g^2) = \max\{\deg f^3, \deg g^2\} \geq$ $\geq \deg f^3 = 3 \deg f$ i twierdzenie jest banalne. Istotny jest przypadek, gdy $\deg f^3 = \deg g^2$. Wtedy $\deg f = 2k$, $\deg g = 3k$ dla pewnego $k > 0$ i nierówność przybiera postać $\deg(f^3 - g^2) \geq k + 1$.

Dowód podany przez Davenporta pozwala udowodnić twierdzenie ogólniejsze, co zauważyło kilku autorów. Aby je wypowiedzieć, oznaczmy symbolem $n_0(f)$ liczbę różnych pierwiastków wielomianu $f \not\equiv 0$. Oczywiście $n_0(f) \leq \deg f$; równość zachodzi, gdy f ma wyłącznie pierwiastki pojedyncze.

Twierdzenie o stopniu różnicy wielomianów. *Dla dowolnych różnych wielomianów dodatnich stopni* F, G:

$$\deg(F - G) \geq \max\{\deg F, \deg G\} - n_0(FG) + 1.$$

Pokażemy najpierw jak z powyższego twierdzenia otrzymać oszacowanie Davenporta. Możemy przyjąć, że $\deg f = 2k$ oraz $\deg g = 3k$. Stosujemy twierdzenie o stopniu różnicy do wielomianów $F = f^3$ oraz $G = g^2$:

$$\begin{aligned}\deg(f^3 - g^2) &\geq \max\{\deg f^3, \deg g^2\} - n_0(f^3 g^2) + 1 = 6k - n_0(fg) + 1 \\ &\geq 6k - \deg(fg) + 1 = 6k - 5k + 1 = k + 1.\end{aligned}$$

Dowód twierdzenia o stopniu różnicy wielomianów opiera się na pewnych własnościach sum potęg pierwiastków wielomianu, które podał już Newton w swojej "Arithmetica universalis". Przypomnijmy, że dla danego wielomianu $F(t) = (t - \xi_1)(t - \xi_2) \ldots (t - \xi_n)$ oznaczamy $s_i(F) = \xi_1^i + \xi_2^i + \ldots + \xi_n^i$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$. Mamy następujące

Wzory Newtona. *Jeżeli* $F(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \ldots + a_n$ *oraz* $s_i = s_i(F)$ *dla* $i = 0, 1, \ldots, n$, *to zachodzą związki*

$$\begin{aligned}0 &= s_1 + a_1 \\ 0 &= s_2 + a_1 s_1 + 2a_2 \\ 0 &= s_3 + a_1 s_2 + a_2 s_1 + 3a_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 &= s_n + a_1 s_{n-1} + a_2 s_{n-2} + \ldots + n a_n.\end{aligned}$$

Ze wzorów Newtona wynika, że sumy potęg pierwiastków są wielomianami współczynników wielomianu.

Dla naszych celów potrzebny jest

Lemat. *Jeżeli* $F(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \ldots + a_n$ *oraz* $G(t) = t^n + b_1 t^{n-1} + \ldots + b_n$ *są wielomianami takimi, że* $\deg(F(t) - G(t)) < l$ *dla pewnego* $l \geq 0$, *to* $s_i(F) = s_i(G)$ *dla* $i = 0, 1, \ldots, n - l$.

Dowód. Warunek $\deg(F(t) - G(t)) < l$ oznacza, że $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2, \ldots, a_{n-l} =$ $= b_{n-l}$. Stąd $s_1(F) = s_1(G), \ldots, s_{n-l}(F) = s_{n-l}(G)$ na podstawie wzorów Newtona.

Możemy teraz podać

Dowód twierdzenia o stopniu różnicy wielomianów. Wystarczy sprawdzić, że jeśli wielomiany F, G spełniają warunek

(1) $$\deg(F - G) < \max\{\deg F, \deg G\} - n_0(FG) + 1,$$

to $F = G$.

Warunek (1) implikuje nierówność $\deg(F - G) < \max\{\deg F, \deg G\}$, z której wnioskujemy, że stopnie wielomianów F i G są równe. Oznaczmy $\deg F = \deg G = n$. Nie zmniejszając ogólności możemy założyć, że $n > 0$ oraz że wielomiany F i G są unormowane, tzn. mają postać $F = t^n + a_1t^{n-1} + \ldots + a_n$, $G = t^n + b_1t^{n-1} + \ldots + b_n$. Warunek (1) implikuje na mocy Lematu równości

(2) $$s_i(F) = s_i(G) \text{ dla } i = 0, 1, \ldots, n_0(FG) - 1.$$

Niech będzie $F(t) = \prod(t - \xi_i)$ oraz $G(t) = \prod(t - \eta_j)$. Zatem wielomian $F(t)G(t)$ ma pierwiastki $\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n$. Oznaczmy $r = n_0(FG)$ i niech $\theta_1, \ldots, \theta_r$ będzie ciągiem parami różnych (tzn. $\theta_k \neq \theta_l$ dla $k \neq l$) pierwiastków wielomianu $F(t)G(t)$. Niech p_k (odpowiednio q_k) będzie krotnością liczby θ_k jako pierwiastka wielomianu $F(t)$ (odpowiednio $G(t)$). Zatem p_k, q_k dla $k = 1, \ldots, r$ są nieujemnymi liczbami całkowitymi. Jest $s_i(F) = p_1\theta_1^i + \ldots + p_r\theta_r^i$ oraz $s_i(G) = q_1\theta_1^i + \ldots + q_r\theta_r^i$, a zatem warunki (2) można przepisać w formie

(3) $$p_1\theta_1^i + \ldots + p_r\theta_r^i = q_1\theta_1^i + \ldots + q_r\theta_r^i, \quad i = 0, 1, \ldots, r - 1,$$

stąd

(4) $$(p_1 - q_1)\theta_1^i + \ldots + (p_r - q_r)\theta_r^i = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, r - 1.$$

Potraktujmy relacje (4) jako równania liniowe jednorodne o niewiadomych $p_1 - q_1, \ldots, p_r - q_r$. Mamy zatem układ liniowy jednorodny o r niewiadomych i r równaniach. Wyznacznikiem układu jest dobrze znany z kursu algebry klasycznej wyznacznik Vandermonde'a

$$\det(\theta_j^i) = \prod_{1 \leq k < l \leq r} (\theta_k - \theta_l) \neq 0.$$

Zatem mamy $p_1 - q_1 = 0, \ldots, p_r - q_r = 0$. Oznaczmy symbolem $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ zbiór wartości ciągu $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Mamy zatem $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} = \{\eta_1, \ldots, \eta_n\} = \{\theta_1, \ldots, \theta_r\}$ oraz liczby θ_k, $k = 1, \ldots, r$ występują zarówno w ciągu $\xi_1, \ldots, \xi_n$ jak w ciągu $\eta_1, \ldots, \eta_n$ z tymi samymi krotnościami. Oznacza to, że ciągi te różnią się ewentualnie kolejnością wyrazów, a więc $F(t) = G(t)$.

Powróćmy jeszcze do twierdzenia Davenporta. Czy jest ono optymalne? Dokładniej, czy dla danej liczby całkowitej $k > 0$ istnieje wielomian f stopnia $2k$ oraz wielomian g stopnia $3k$ takie, że $\deg(f^3 - g^2) = k + 1$? Gdy $k = 2$ odpowiedni przykład wynika z tożsamości

$$(t^4 + 4t)^3 - (t^6 + 6t^3 + 6)^2 = -8t^3 + 36.$$

Dla $k = 3$ stosowny przykład podał Birch już w 1961 roku: jeżeli

$$f(t) = t^6 + 4t^4 + 10t^2 + 6,$$

$$g(t) = t^9 + 6t^7 + 21t^5 + 35t^3 + \frac{63}{2}t,$$

to $f(t)^3 - g(t)^2$ jest stopnia 4. Stosunkowo niedawno (w 1995 roku) Zanier udowodnił, że odpowiedź na zadane pytanie jest pozytywna dla wszystkich $k > 0$. Dowód Zaniera nie jest elementarny (opiera się na teorii powierzchni Riemanna). O ile mi wiadomo pytanie pozostaje otwarte, gdy dodatkowo wymagamy, by $f(t)$ i $g(t)$ były wielomianami o współczynnikach wymiernych.