

# Probabilistycznie o deterministycznym

Andrzej DĄBROWSKI, Wrocław

Zdarza się, że niektóre zadania, mające treść deterministyczną da się elegancko rozwiązać za pomocą metod probabilistycznych. Bywa też i odwrotnie, gdy zadanie czysto probabilistyczne ma ciekawą interpretację deterministyczną. Oto kilka przykładów, które mogą być tego potwierdzeniem.

## 1. Mokre punkty

Leżące na sferze dwa punkty są antypodalne, jeśli odcinek je łączący przechodzi przez środek sfery.

*Na Ziemi jest co najmniej jedna para punktów antypodalnych zanurzonych w wodzie.*

Rozwiązanie

Wyberzmy w sposób losowy punkt na powierzchni Ziemi. Zbiór zdarzeń elementarnych  $\Omega$  będzie więc zbiorem punktów na sferze, prawdopodobieństwo – unormowaną miarą Lebesgue’a na sferze.

Niech  $A$  będzie zdarzeniem, że wylosowany punkt jest zanurzony w wodzie,  $B$  – zdarzeniem, że punkt antypodalny do wylosowanego jest zanurzony w wodzie. Zdarzenie  $A \cap B$  oznacza, że losowo wybrany punkt i jego punkt antypodalny są zanurzone w wodzie. Oczywiście,  $P(A) = P(B) > \frac{1}{2}$  (nierówność wynika z faktu, że ocean światowy zajmuje 71% powierzchni Ziemi). Wtedy

$$1 \geq P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) > 1 - P(A \cap B),$$

skąd wynika, że  $P(A \cap B) > 0$ , a więc musi istnieć punkt o tej własności, że on i jego punkt antypodalny są zanurzone w wodzie. Co więcej, z tych nierówności i z danych geograficznych (patrz poprzedni nawias) wynika, że takie punkty zajmują więcej niż 42% powierzchni Ziemi.

Posłużyliśmy się tu oczywistym faktem:

*Jeżeli prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  jest większe od 0, to zbiór  $A$  jest niepusty.*

## 2. Plama na sferze

Kolejne zadanie ma rozwiązanie również opierające się na tym samym fakcie.

*Na sferze jest plama o polu mniejszym, niż  $\frac{1}{8}$  powierzchni kuli. Istnieje taki sześcian, wpisany w sferę, że żaden z wierzchołków sześcianu nie leży na plamie.*

Rozwiązanie

Doświadczenie losowe, którym posłużymy się, aby rozwiązać to zadanie, polegać będzie na losowym obrocie sześcianu wpisanego w sferę. Niech  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 8$ ) oznacza zdarzenie, że  $i$ -ty wierzchołek sześcianu leży na plamie,  $P(A_i) < \frac{1}{8}$ .

Zdarzenie  $\bigcap_{i=1}^8 A_i^c$  zajdzie, gdy żaden z wierzchołków sześcianu nie leży na plamie.

$$P\left(\bigcap_{i=1}^8 A_i^c\right) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^8 A_i\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^8 P(A_i) > 0,$$

skąd wynika teza.

## Użyteczny lemat

Zadania, przytoczone w poprzednich punktach opierały się na bardzo prostym chwycie z rachunku prawdopodobieństwa. Dwa kolejne problemy wykorzystują pewne jego uogólnienie, tym razem dotyczące zmiennych losowych.

Lemat 1

*Niech  $X$  będzie zmienną losową. Jeżeli wartość oczekiwana  $X$  spełnia nierówność  $EX > u$ , to istnieje takie  $\omega$ , iż  $X(\omega) > u$ . Jeżeli  $EX \geq u$ , to  $X(\omega) \geq u$ .*

Dowód

Niech  $EX > u$ . Przypuśćmy niewprost, że dla każdego  $\omega$  jest  $X(\omega) \leq u$ . Wtedy  $EX \leq u$ , co stanowi sprzeczność.

Niech teraz  $EX \geq u$  i dla każdego  $\omega$  będzie  $X(\omega) < u$ . Dla dowolnego ustalonego  $\varepsilon > 0$ , niech  $A_\varepsilon = \{\omega : X(\omega) > u - \varepsilon\}$ . Wtedy

$$\begin{aligned} u &\leq EX = \int_{A_\varepsilon} X(\omega)P(d\omega) + \int_{A'_\varepsilon} X(\omega)P(d\omega) \leq uP(A_\varepsilon) + (u - \varepsilon)P(A'_\varepsilon) = \\ &= u - \varepsilon P(A'_\varepsilon). \end{aligned}$$

Z tych nierówności wynika, że  $P(A'_\varepsilon) \leq 0$ , co zachodzi tylko wtedy, gdy  $P(A_\varepsilon) = 1$ . W takim razie

$$p(X \geq u) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{1/n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_{1/n}) = 1$$

skąd wynika, iż istnieje takie  $\omega$ , że  $X(\omega) \geq u$ . Jest to sprzeczne z założeniem niewprost, przyjętym na początku.

### 3. Plama w zeszyście

Na papierze w kratkę o boku 1 cm znajduje się ograniczona figura  $F$  o polu  $S$  cm<sup>2</sup>. Figurę można tak przesunąć, aby przykryła co najmniej  $[S]$  punktów kratowych (punktów, będących przecięciem kratek papieru).

Od razu widać, że wystarczy przesunąć  $F$  o wektor, którego początek leży w punkcie kratowym, a koniec jest jednym z punktów w najbliższej kratce jednostkowej.

Wykonamy doświadczenie losowe, w którym figurę  $F$  będziemy przesunąć o wektor wybrany losowo ze zbioru  $\Omega = \{\omega = [x, y] : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ . Losowość oznacza, że prawdopodobieństwem na zbiorze  $\Omega$  jest miara Lebesgue'a na kwadracie jednostkowym. Położenie figury  $F$  po przesunięciu o  $\omega$  oznaczamy będziemy przez  $F(\omega)$ . Położenie początkowe, odpowiadające  $\omega = [0, 0]$ , można wybrać dowolnie.

Oznaczmy przez  $X(\omega)$  zmienną losową liczącą, ile punktów kratowych przykryje figura  $F(\omega)$ .

Wartość oczekiwana zmiennej losowej  $X$  jest równa  $S$ .

Dowód

1. Niech  $F$  będzie kwadratem o bokach równoległych do linii siatki, o długości  $a < 1$ . Początkowe położenie  $F$  ustalamy tak, że lewy dolny bok kwadratu pokrywa się z punktem kratowym.

Zmienna losowa  $X$  ma tylko dwie wartości 1 lub 0. Więc  $EX = P(A)$ , gdzie  $A$  jest zdarzeniem, że kwadrat  $F$  przykrywa punkt kratowy.  $A$  jest takim podzbiorem  $\Omega$ , że przesunięcia  $F$  o wektor  $\omega$  nałożą kwadrat na jeden z punktów kratowych. Z rysunku 1 widać, że  $EX = P(A) = a^2 = S$ .  $A$  więc teza jest prawdziwa dla małego kwadratu.

2. Teza jest prawdziwa dla figury, będącej skończoną sumą rozłącznych kwadratów o bokach równoległych do linii siatki.

Rozbijmy każdy z kwadratów o bokach równoległych do linii siatki na kwadraty  $F_i$  o boku mniejszym niż 1 i polu  $S_i$ .

Niech  $X_i$  będzie zmienną losową liczącą, ile punktów kratowych przykryje figura  $F_i$ . Wtedy

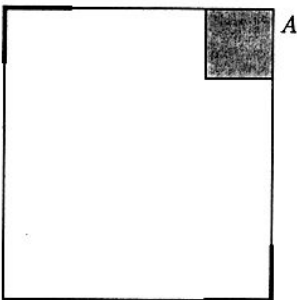
$$EX = \sum_{i=1}^n EX_i = \sum_{i=1}^n S_i = S.$$

3. Teza jest prawdziwa dla dowolnej ograniczonej figury  $F$  o polu  $S$ .

Każda mierzalna figura  $F$  jest sumą wstępujących figur  $F_n$ , spełniających warunki punktu 2. Niech  $X_n$  będzie zmienną losową liczącą, ile punktów kratowych przykryje figura  $F_n$ . Wtedy

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n, \quad F_n \subset F_{n+1}, \quad X = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n \leq X_{n+1}.$$

Symbol  $[S]$  oznacza najmniejszą liczbę całkowitą nie mniejszą od  $S$ .



Rys. 1

Stąd wynika, że

$$EX = \lim_{n \rightarrow \infty} EX = \lim_{n \rightarrow \infty} S(F_n) = S.$$

Z użytecznego lematu 1 wynika, że jeśli  $EX = S$ , to istnieje takie  $\omega$ , że  $X(\omega) \geq S$ . Pamiętając, że zmienna losowa  $X$  ma jedynie wartości całkowite otrzymamy ostateczną tezę.

#### 4. Cień

*Wypukły, ograniczony kamień ma powierzchnię  $S$  i jest oświetlony promieniami słońca (słońce może świecić pod dowolnym kątem). Kamień można tak obrócić, aby powierzchnia jego cienia była co najmniej równa  $\frac{1}{4}S$ .*

Wybieramy układ współrzędnych w ten sposób, że płaszczyzną rzutu jest płaszczyzna  $OXY$ , słońce zaś świeci po dodatniej stronie osi  $OZ$ .

Losowo, oznacza że każdy obrót jest jednakowo prawdopodobny, czyli rozkład obrotów jest jednostajny.

Przeprowadzimy doświadczenie, w którym będziemy losowo obracać kamień. Przyczepmy do jednego z punktów kamienia wektor jednostkowy  $w$  (reper). Wynikiem naszego doświadczenia  $\Omega$  będzie wektor  $\omega = (\alpha, \beta, \gamma)$ , którego składowymi są kąty repera  $w$  z osiami układu współrzędnych. Przestrzeń  $\Omega$  może być więc utożsamiona z kostką  $[0, 2\pi]^3$  a rozkład prawdopodobieństwa jest rozkładem jednostajnym o gęstości  $f(\omega) = (2\pi)^{-3}$ .

Oznaczmy przez  $K(\omega)$  figurę wypukłą w przestrzeni  $\mathbb{R}^3$  (kamień) położoną w przestrzeni nad płaszczyzną rzutu  $OXY$  w ten sposób, że kąty repera  $w$  z osiami układu są równe  $\omega = (\alpha, \beta, \gamma)$ . Przez  $K^*(\omega)$  oznaczmy rzut  $K$  na płaszczyznę  $OXY$ , przez  $S(F)$  – powierzchnię figury  $F$ , jeżeli jest to figura płaska, lub pole powierzchni bryły  $F$ , jeśli jest to zbiór trójwymiarowy.

Ileokroć będzie mowa o długości, polu czy i objętości zawsze będziemy zakładali, że dany zbiór jest mierzalny względem miary Lebesgue'a.

*Niech  $K(\omega)$  będzie ograniczoną figurą płaską o powierzchni  $S$ . Wtedy oczekiwana powierzchnia jej rzutu  $K^*(\omega)$  wyraża się wzorem*

$$(1) \quad ES(K^*) = g(\psi)S,$$

gdzie  $g(\cdot)$  jest pewną funkcją zależną jedynie od kąta  $\psi$  padania promieni słonecznych.

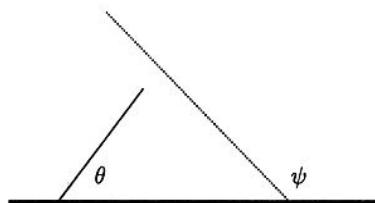
Dowód

Jako reper  $w$  wybierzemy wektor prostopadły do płaszczyzny, na której leży  $K$ .

Dla przejrzystości dowód podzielimy na kilka punktów.

1. Obliczymy oczekiwaną długość rzutu odcinka w przestrzeni, obracanego w sposób losowy.

Niech odcinek  $K(\omega)$  o długości  $L$  będzie nachylony pod kątem  $\theta$  do płaszczyzny rzutu. Wtedy, jeśli  $\psi > \theta$ , to  $L(K^*(\omega)) = \frac{\sin(\psi - \theta)}{\sin \psi} L$  (rys. 2).



Rys. 2

Analogicznie, jeśli  $\psi \leq \theta$ , to  $L(K^*(\omega)) = \frac{\sin(\theta - \psi)}{\sin \psi} L$ , czyli niezależnie od przypadku ( $\sin \psi$  jest dodatni – dlaczego?) mamy

$$L(K^*(\omega)) = \frac{|\sin(\theta - \psi)|}{\sin \psi} L.$$

Możemy teraz obliczyć wartość oczekiwaną:

$$E(L(K^*(\omega))) = \int_0^\pi \left( \int_A \frac{|\sin(\theta - \psi)|}{\sin \psi} \frac{1}{(2\pi)^3} L d\omega \right) d\theta,$$

gdzie  $A$  jest zbiorem tych wartości  $\omega$ , że odcinek jest nachylony pod kątem  $\theta$  do płaszczyzny rzutu.

Całkując po obu zmiennych otrzymamy wzór  $EL(K^*(\omega)) = q(\psi)L$ , gdzie

$$q(\psi) = \int_0^\pi \left( \int_A \frac{|\sin(\theta - \psi)|}{\sin \psi} \frac{1}{(2\pi)^3} d\omega \right) d\theta.$$

2. Wzór (1) jest prawdziwy dla trójkąta równobocznego.

Rzut  $K^*$  trójkąta równobocznego  $K$  o polu  $S$  jest trójkątem o bokach będących rzutami boków trójkąta  $K$ . Rzuty te będą funkcjami postaci  $a_i = g_i(\theta_i, \psi)a$ , gdzie  $\theta_i$  jest kątem  $i$ -tego boku trójkąta z płaszczyzną rzutu,  $a_i$  długością rzutu  $i$ -tego boku,  $a$  zaś jest długością boku trójkąta  $K$ . Ze wzoru Herona wynika, że pole rzutu tego trójkąta wyraża się wzorem  $S(K^*(\omega)) = h(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \psi)$  i oczekiwana wartość tego pola jest całką

$$E(S(K^*)) = \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \left( \int_A h(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \psi) S \frac{1}{(2\pi)^3} d\omega \right) d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 = g(\psi)S,$$

gdzie  $A$  jest zbiorem tych wartości, że  $i$ -ty bok trójkąta jest nachylony pod kątem  $\theta_i$  do płaszczyzny rzutu.

3. Wzór (1) jest prawdziwy dla dowolnej figury płaskiej o polu  $S$ .

Łatwo zauważyć, że o ile płaszczyzna, na której leży figura  $F$  nie jest prostopadła do płaszczyzny rzutu, to zachodzi wzór

$$S(F^*) = \sum_{i=1}^n S(F_i^*), \text{ jeśli } F = \sum_{i=1}^n F_i.$$

Symbol  $\sum$  jest zarezerwowany na mnogościową sumę rozłącznych składników (lub zwykłą (arytmetyczną) sumę, jeśli składniki są liczbami).

Z powyższego wzoru otrzymamy natychmiast, że jeśli płaska figura jest rozłączną sumą trójkątów równobocznych, to teza jest prawdziwa. Ostateczny dowód tezy w punkcie 3. wynika z następujących faktów:

a) Każdy mierzalny względem miary Lebesgue'a i ograniczony zbiór płaski jest wstępującą granicą figur:

$$F = \bigcup_n F_n,$$

gdzie  $F_n \subset F_{n+1}$  oraz  $F_n$  są sumami rozłącznych trójkątów równobocznych.

b) Jeżeli płaszczyzna, na której leży figura  $F$ , nie jest prostopadła do płaszczyzny rzutu i  $F$  spełnia warunki punktu a), to

$$S(F^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(F_n^*).$$

Niech  $K(\omega)$  będzie ograniczoną bryłą wypukłą w  $\mathbb{R}^3$  o powierzchni  $S$ . Wtedy oczekiwana powierzchnia jej rzutu  $K^*(\omega)$  wyraża się wzorem

$$(2) \quad ES(K^*) = h(\psi)S,$$

gdzie  $h(\cdot)$  jest pewną funkcją zależną jedynie od kąta  $\psi$  padania promieni słonecznych.

Dowód

Niech  $K$  będzie wielościanem wypukłym. Wtedy promienie słoneczne dzielą ściany na części oświetlone i będące w cieniu (rys. 3).

Niech  $J_1, J_2, \dots, J_n$  będą „jasnymi” podzbiórami ścian wielościanu  $K$ , natomiast  $C_1, C_2, \dots, C_n$  – „ciemnymi” podzbiórami, powstałymi w ten sposób, że promienie przechodzące przez wierzchołki przekrojów prostopadłych (do płaszczyzny rzutu) wycinają w nich pary odcinków „jasnych” i „ciemnych”. Z konstrukcji tych podzbiórów wynika, że:

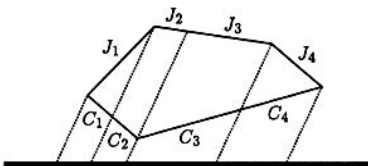
- są one wielokątami płaskimi,
- rzuty  $J_i$  i  $C_i$  są takie same.

Mamy więc:

$$S = S(K) = \sum_{i=1}^n S(J_i) + \sum_{i=1}^n S(C_i),$$

$$S(J_i^*) = S(C_i^*),$$

$$S(K^*) = \sum_{i=1}^n S(J_i^*) = \sum_{i=1}^n S(C_i^*).$$



Rys. 3

Z tych wzorów oraz z (1) wynika, że

$$E(2S(K^*)) = \sum_{i=1}^n E(S(J_i^*)) + \sum_{i=1}^n E(S(C_i^*)) \sum_{i=1}^n g(\psi)S(J_i) + \sum_{i=1}^n g(\psi)S(C_i) = \\ = g(\psi)S.$$

Podstawiając  $h(\psi)$  otrzymamy tezę twierdzenia dla wielościanu.

Korzystając z faktu, że każda wypukła ograniczona bryła o polu  $S$  jest wstępującą granicą wypukłych wielościanów, analogicznie, jak w dowodzie poprzedniego twierdzenia, otrzymamy ostateczną tezę.

*Dla każdej wypukłej bryły  $K$  o polu powierzchni  $S$ , obracanej w przestrzeni w sposób losowy, oczekiwane pole jej cienia wynosi  $E(S(K^*)) = \frac{S}{4 \sin \psi}$ , gdzie  $\psi$  jest kątem padania promieni słonecznych na płaszczyznę rzutu.*

**Dowód**

Wystarczy wyznaczyć postać funkcji  $h$ . Ponieważ nie zależy ona ani od kształtu, ani od wielkości bryły  $K$  znajdziemy tę funkcję dla kuli o promieniu 1.

Przekrój kuli płaszczyzną prostopadłą do płaszczyzny rzutu jest kołem o promieniu  $r = \sqrt{1-t^2}$ , ( $0 \leq t \leq 1$ ), gdzie  $t$  jest odległością od środka kuli.

Rzut tego koła pod kątem  $\psi$  na płaszczyznę jest odcinkiem o długości  $\frac{2r}{\sin \psi}$ .

Pole rzutu jest zatem całką  $2 \int_0^1 \frac{2\sqrt{1-t^2}}{\sin(\psi)} dt = \frac{\pi}{\sin \psi}$  i nie zależy od obrotów (kula!), a więc  $ES(K^*) = \frac{\pi}{\sin \psi}$ .

Z kolei, zgodnie ze wzorem  $ES(K^*) = g(\psi)S$ , mamy  $\frac{\pi}{\sin \psi} = h(\psi)4\pi$ , skąd mamy

$$h(\psi) = \frac{1}{4 \sin \psi}.$$

Z lematu 1 wynika natychmiast wniosek, będący rozwiązaniem naszego zadania:

**Wniosek**

Istnieje takie położenie  $\omega_0$  bryły  $K$ , że powierzchnia jej rzutu spełnia nierówność

$$S(K^*(\omega_0)) \geq \frac{S}{4 \sin \psi} \geq \frac{S}{4}.$$

## 5. Nie tylko igła Buffona

W poprzednim punkcie zastosowaliśmy metodę obliczania wartości oczekiwanej przez zapisanie jej w postaci funkcji, której nieznaną czynnik nie zależał od kształtu losowego obiektu. Nieznaną czynnik wyliczaliśmy, wybierając obiekt szczególnie prosty. W ten sposób można rozwiązać znane zadanie o igle Buffona, nie uciekając się do szczegółowych obliczeń trygonometrycznych.

**Zadanie (uogólnienie zadania Buffona)**

*Przypuśćmy, że płaszczyzna jest pokryta prostymi równoległymi, położonymi w odległości  $d$  od siebie. Na płaszczyźnie umieszczono losowo krzywą o długości  $L$ . Oblicz oczekiwaną liczbę prostych, przeciętych przez krzywą.*

**Rozwiązanie**

Zauważmy od razu, że wystarczy ograniczyć się do obrotów i przesunięć o wektor o długości nie przekraczającej  $d$  (równoległe proste tworzą strukturę okresową o okresie  $d$ ). Zatem zbiór zdarzeń elementarnych  $\Omega$  można utożsamić z iloczynem kartezjańskim koła o środku w 0 i promieniu  $d$  oraz odcinka  $[0, 2\pi)$ , a losowy wybór położenia krzywej jest losowym wyborem przekształcenia. Tak więc rozkład prawdopodobieństwa jest rozkładem jednostajnym na walcu o promieniu podstawy  $d$  i wysokości  $2\pi$ .

Oznaczmy przez  $X(\omega)$  zmienną losową, obliczającą liczbę przecięć prostych przez krzywą, która jest obrazem odcinka leżącego na jednej z prostych

w przekształceniu  $\omega$ . Naszym zadaniem jest obliczenie wartości oczekiwanej zmiennej  $X$ .

Rozwiążmy najpierw nasze zadanie, gdy krzywa jest odcinkiem. Jasnym jest, że wartość oczekiwana liczby przecięć jest zależna jedynie od odległości między prostymi  $d$  i długości odcinka  $L$ . Zapiszmy więc dla odcinka, że  $EX = \varphi(d, L)$ .

Podzielmy odcinek na dwie części o długościach  $L_1$  i  $L_2$ . Oznaczmy przez  $X_i(\omega)$  zmienną losową, obliczającą liczbę przecięć prostych przez  $i$ -tą część odcinka. Wtedy  $X(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega)$ . Z addytywności wartości oczekiwanej wynika, że

$$(3) \quad \varphi(d, L) = EX = E(X_1 + X_2) = \varphi(d, L_1) + \varphi(d, L_2)$$

Funkcja  $\varphi$  jest monotoniczna i mierzalna oraz, względem zmiennej  $L$ , spełnia równanie (3) (znane jako równanie Cauchy'ego). Wiemy, że rozwiązaniem takiego równania jest funkcja postaci  $\varphi(d, L) = g(d)L$ , gdzie  $g$  zależy jedynie od odległości między prostymi  $d$ .

Połączmy z sobą  $n$  odcinków, niekoniecznie równoległych, o długościach  $L_1, L_2, \dots, L_n$ , tworząc łamaną o długości  $L$ . Oznaczmy przez  $X_i(\omega)$  zmienną losową, obliczającą liczbę przecięć prostych przez  $i$ -ty odcinek. Wtedy

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^n X_i(\omega) \text{ i } EX = \sum_{i=1}^n EX_i = g(d) \sum_{i=1}^n L_i = g(d)L.$$

Niech teraz w systemie prostych równoległych losowo umieszczona będzie krzywa o długości  $L$ , a  $X(\omega)$  niech będzie zmienną losową, obliczającą liczbę przecięć prostych przez tę krzywą. Długość tej krzywej może być otrzymana jako granica długości łamanych. Z ciągłości wartości oczekiwanej otrzymamy natychmiast, że również dla krzywej zachodzi wzór  $EX = g(d)L$ .

Aby wyznaczyć postać funkcji  $g$  wystarczy wybrać odpowiednią krzywą.

Wyberzmy okrąg o średnicy  $d$ . Wtedy  $X(\omega) = 2$  dla każdego  $\omega$  i  $2 = EX = g(d)2\pi \frac{d}{2}$ . Stąd  $g(d) = \frac{2}{\pi d}$ . Mamy więc rozwiązanie naszego zadania:

*Dla dowolnej krzywej o długości  $L$  oczekiwana liczba przecięć systemu równoległych prostych o odległościach  $d$  jest równa  $EX = \frac{2}{\pi d}L$ .*

W szczególnym przypadku, gdy krzywa jest odcinkiem o długości  $L < d$

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{odcinek przecina proste} \\ 0 & \text{odcinek nie przecina prostych} \end{cases}$$

i  $A$  oznacza zdarzenie, że taki odcinek przetnie jedną z prostych, mamy  $P(A) = EX = \frac{2}{2\pi}L$ , co jest rozwiązaniem klasycznego zadania Buffona.

Rozwiązanie zadania o krzywej, przecinającej system prostych, można również zastosować do ograniczonej krzywej o długości  $L$ , przecinającej jedną prostą. Aby jednak można było sensownie zdefiniować przestrzeń probabilistyczną, opisującą losowy wybór położenia krzywej ograniczymy jej ruch do pasa, zawartego między prostymi o dostatecznie dużej odległości  $d$  (takiej, aby między prostymi zmieściło się koło zawierające krzywą) a prostą, którą miałyby ta krzywa przecinać, umieścimy w środku tego pasa. Wtedy  $EX = g(d)L$ , choć w tym przypadku funkcja  $g$  będzie miała zapewne inną postać niż w zadaniu o igle Buffona.

Niech teraz wypukła i zamknięta krzywa  $C(\omega)$  o długości  $L$  będzie położona losowo w opisanym pasie. Wtedy liczba przecięć prostej przez krzywą  $C$  jest równa (z wyjątkiem sytuacji, gdy krzywa jest styczna do prostej, co jest zdarzeniem o prawdopodobieństwie 0)

$$X(\omega) = \begin{cases} 2 & \text{krzywa przecina prostą} \\ 0 & \text{krzywa nie przecina prostej} \end{cases}$$

a prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$ , że krzywa przetnie prostą wynosi

$$P(A) = \frac{1}{2}EX = \frac{1}{2}g(d)L.$$

Niech teraz  $C_1$  i  $C_2$  będą dwiema ograniczonymi krzywymi wypukłymi o niezerowych obwodach  $L_1, L_2$  i niezerowych polach  $S_1, S_2$  takimi, że krzywa

$C_2$  leży wewnątrz krzywej  $C_1$ . Układ tych krzywych umieszczamy losowo w pasie między prostymi. Interesuje nas prawdopodobieństwo warunkowe, że prosta przetnie krzywą  $C_2$ , gdy wiadomo, że przecięła krzywą  $C_1$ . Prawdopodobieństwo to możemy obliczyć:

$$P(A_2|A_1) = \frac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)} = \frac{P(A_2)}{P(A_1)} = \frac{\frac{1}{2}g(d)L_2}{\frac{1}{2}g(d)L_1} = \frac{L_2}{L_1}.$$

W powyższym wzorze  $A_i$  oznacza zdarzenie, że prosta przetnie krzywą  $C_i$ , natomiast  $L_i$  jest długością krzywej  $C_i$ . Zauważmy, że to prawdopodobieństwo nie zależy od szerokości pasa, możemy więc powiedzieć, że

*Prawdopodobieństwo przecięcia przez losową prostą zamkniętej krzywej wypukłej  $C_2$  leżącej wewnątrz wypukłej zamkniętej krzywej  $C_1$  pod warunkiem, że prosta przecina tę krzywą jest ilorazem długości (obwodów) tych krzywych.*

Prawdopodobieństwo to oznaczamy będziemy symbolem  $p_- = p_-(C_2|C_1)$ .

Wzór ten ma odpowiednik, znany z teorii prawdopodobieństwa geometrycznego:

*Prawdopodobieństwo, że punkt wpadnie do wnętrza zamkniętej krzywej wypukłej  $C_2$  leżącej wewnątrz wypukłej zamkniętej krzywej  $C_1$  pod warunkiem, że wpadł do wnętrza krzywej  $C_1$ , jest ilorazem pól figur ograniczonych przez te krzywe.*

Prawdopodobieństwo to oznaczamy będziemy symbolem  $p_\bullet = p_\bullet(C_2|C_1)$ .

Oba te prawdopodobieństwa można wyrazić za pomocą współczynnika perymetrycznego  $u(F)$  ograniczonej figury  $F$ , zdefiniowanego wzorem

$$u(F) = \frac{4\pi S(F)}{L^2(F)},$$

gdzie  $S(F)$  i  $L(F)$  są odpowiednio polem i obwodem figury  $F$ .

Wiadomo, że współczynnik perymetryczny dla danej figury jest liczbą nieujemną, nie przekraczającą 1 (stwierdzenie to jest znane pod nazwą nierówności izoperymetrycznej). Maksymalny współczynnik perymetryczny, równy 1, ma koło.

Łatwo sprawdzić, że zachodzi równość:

$$(4) \quad p_\bullet = \frac{p_\bullet(C_2|C_1)}{p_-(C_2|C_1)} = \frac{u(C_2)}{u(C_1)}$$

Rozważmy teraz figurę wypukłą  $C$ , leżącą wewnątrz koła  $K_r$  o promieniu  $r$ . Wtedy z (4) otrzymamy nierówność

$$p_\bullet(C|K_r) = u(C)p_-^2(C|K_r) \leq p_-^2(C|K_r) \leq p_-(C|K_r).$$

Wynika z niej wniosek, że prawdopodobieństwo, iż punkt wpadnie do wypukłej figury  $C$ , zawartej w kole o promieniu  $r$ , jest nie większe od prawdopodobieństwa, że losowa prosta przetnie figurę  $C$ , gdy wiadomo, że przecięła ona koło.

Równość zajdzie jedynie wtedy, gdy figura  $C$  jest kołem  $K_r$ . Z równości prawdopodobieństw  $p_\bullet$  i  $p_-$  wynika bowiem, że  $p_-^2(C|K_r) \leq p_-(C|K_r)$ , co jest równoważne stwierdzeniu, że  $p_-(C|K_r) = 1$  a więc, że obwód figury  $C$  jest równy obwodowi koła. Jest to równoważne stwierdzeniu, że figura  $C$  jest kołem  $K_r$ .

Zupełnie inna sytuacja jest, gdy koło  $K_r$  jest podzbiorem figury wypukłej i ograniczonej  $C$ . Wtedy

$$(5) \quad p_-^2(K_r|C) = u(C)p_\bullet(K_r|C) \leq p_\bullet(K_r|C).$$

Jeżeli figura  $C$  jest wielokątem wypukłym, to oba prawdopodobieństwa  $p_\bullet$  i  $p_-$  mają największą wartość, gdy  $C$  jest opisany na okręgu. Wynika to z faktu, że obwód i pole wielokąta wypukłego zawartego w innym wielokącie wypukłym są mniejsze od obwodu i pola wielokąta zewnętrznego, a we wzorach na prawdopodobieństwa  $p_\bullet(K_r|C)$  i  $p_-(K_r|C)$ , pole i obwód wielokąta  $C$  występują w mianowniku.

Bardzo elegancki, elementarny dowód tego faktu podał Zbigniew Marciniak w swoim odczycie *Zadania, które zrobiły na mnie wrażenie*, na XXV Szkole Matematyki Poglądowej w Grzegorzewicach.

Dla wielokąta, opisanego na kole  $K_r$  zachodzi znany szkolny wzór  $S = \frac{Lr}{2}$ .  
Wtedy

$$p_{\bullet}(K_r|C) = \frac{\pi r^2}{S} = \frac{2\pi r^2}{Lr} = \frac{2\pi r}{L} = p_{-}(K_r|C).$$

Równość tych prawdopodobieństw jest zaskoczeniem – w przypadku koła zawierającego figurę wypukłą, nie będącą kołem, nie było to **nigdy** możliwe. Natomiast, dla wielokąta wypukłego  $C$  opisanego na kole, udowodniliśmy fakt:

*Prawdopodobieństwo, że losowy punkt, który wpadł do wielokąta, wpadnie również do koła jest takie samo, jak prawdopodobieństwo, że losowa prosta, która przecięła wielokąt  $C$ , przetnie koło.*

Wzór (5) pozwala nam wprowadzić inną, probabilistyczną definicję współczynnika perymetrycznego  $u$  dla wielokątów wypukłych opisanych na kole. Mamy bowiem równość

$$p_{-}^2(K_r|C) = u(C)p_{\bullet}(K_r|C) = u(C)p_{-}(K_r|C).$$

co po uproszczeniu i uwzględnieniu równości  $p_{\bullet}(K_r|C)$  i  $p_{-}(K_r|C)$ , daje wynik:

$$u(C) = p_{\bullet}(K_r|C) = p_{-}(K_r|C).$$

A więc:

*Współczynnik perymetryczny dla wielokątów wypukłych opisanych na kole jest prawdopodobieństwem, że losowy punkt, który wpadł do wielokąta, wpadnie również do koła.*

*Współczynnik perymetryczny dla wielokątów wypukłych opisanych na kole jest prawdopodobieństwem, że losowa prosta, która przecięła wielokąt, przetnie koło.*

Te dwie definicje wyjaśniają sens współczynnika perymetrycznego – opisuje on, jak ciasno wielokąt przylega do koła wpisanego w ten wielokąt. Zarówno w języku losowo wybranych punktów, jak i losowo wybranych prostych współczynnik perymetryczny opisuje, na ile fakt „spotkania się” punktu (prostej) z wielokątem determinuje spotkanie tego punktu z wpisanym w wielokąt kołem.

Oto wartości współczynnika perymetrycznego dla kilku wielokątów foremnych:

trójkąt	kwadrat	pięciokąt	sześciokąt	ośmiokąt	dziesięciokąt	dwunastokąt
0,605	0,785	0,865	0,907	0,948	0,967	0,977

Liczby te ilustrują w jakim stopniu kolejne wielokąty przylegają do wpisanego w nie koła. Ogólnie, współczynnik perymetryczny  $n$ -kąta foremnego wyraża się wzorem  $\frac{\pi}{n} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{n}\right)$ .

#### Literatura

- D.A. Klain, G.C. Rota, *Introduction to Geometric Probability*, Cambridge University Press, Cambridge 1996,  
G. Polya, *Mathematics and Plausible Reasoning*, Princeton University Press, Princeton 1954.  
A. Shen, *Probabilistic Proofs*, The Mathematical Intelligencer, vol. 20 nr 3, 1998.