Normalny dorosły człowiek w ogóle nie rozmyśla nad problemami czasu i przestrzeni. W swoim mniemaniu przemyślał to już w dzieciństwie. Ja jednak rozwijałem się intelektualnie tak powoli, że czas i przestrzeń zajmowały moje myśli nawet wtedy, gdy stałem się już dorosły.

Albert Einstein

Topos przestrzeni

Michał SZUREK, Warszawa

Grahame Clark otwiera swoją książkę „Przestrzeń, czas i człowiek", zdaniem „Słynny filozof Samuel Aleksander napisał kiedyś, że wszystkie istotne problemy uprawianej przez niego dyscypliny zależą od odpowiedzi na pytanie, czym są przestrzeń i czas oraz w jaki sposób są ze sobą wzajemnie powiązane". Gdy matematyk używa pojęcia „przestrzeń", rzadko ma na myśli otaczającą nas, *zwykłą*, trójwymiarową przestrzeń euklidesową, nazywaną niekiedy – ku oburzeniu niektórych geometrów – kartezjańską. Ale przecież przenośne znaczenie tego słowa spotykamy w języku polskim w takich zwrotach jak „przestrzeń życiowa", „na przestrzeni dziejów", „rozległa przestrzeń", „przestrzeń wpływów", a w matematyce szkolnej spotykamy tajemniczą *przestrzeń probabilistyczną*, czyli zbiór zdarzeń losowych Ω.

Przypomnijmy, że greckie słowo „topos" oznacza „miejsce, źródło", a w teorii literatury używane jest w znaczeniu „skład wątków myślowych", „odwołanie się do ogólnie znanych prawd". Jest to więc ogół wyobrażeń, jakie wywołuje w nas dane hasło. „Wędrowiec" kojarzy się nam raczej ze zmęczonym piechurem, dźwigającym w torbie skromne zapasy, niż z kimś, kto klimatyzowanym samochodem pędzi autostradą choćby i na drugi koniec kontynentu, po 10 godzin dziennie. A jaki mamy topos domu rodzinnego, każdy wie. Dla uszu matematyka ciekawie zabrzmi określenie „topos hiperboliczny" – zwyczaj nakazujący w pewnych sytuacjach wyolbrzymiać nasze uczucia. Nie tylko w przemówieniach pogrzebowych. Poznając kogoś nowego, mówimy na ogół „bardzo mi przyjemnie", ale czy naprawdę *bardzo nam przyjemnie*? No cóż, tak każe topos hiperboliczny...

Co składa się na topos przestrzeni? Przestrzeń jawi nam się raczej jako zimna (choć „niezmierzone przestrzenie piasków Sahary" jest też przekonujące), pusta, pozbawiona znaków orientacyjnych, niegościnna i nieprzyjazna (uwaga na zdradliwe pola siłowe!). Ale nie jest martwa, coś w niej się dzieje, a nawet sama może stanowić byt inteligentny (np. ocean w *Solaris* Stanisława Lema).

Pojęcia odległości, dystansu i oddalenia towarzyszą nam od najwcześniejszego dzieciństwa. Rozumiemy je bardzo dobrze, łączymy sprawnie z innymi pojęciami: każdy rozumie, że *ciepło* może znaczyć „blisko", „zimno" – daleko. To oczywiste: przy ognisku w jaskini było ciepło, a im dalej – tym zimniej. Ale i samo słowo „blisko" odbieramy jako ciepłe; przyjemnie je wymawiać. „Dal" pobrzmiewa tęsknotą i nic dziwnego, że rymuje się z „żal". Najpotężniejszy komputer świata nie zliczyłby, ile razy, od kiedy Jan z Czarnolasu wdarł się jako pierwszy na skałę pięknej Kalijopy, rodzimi wierszokleci i rymopisarze (o poetach już nie wspominając) użyli tego rymu.

Pojęć związanych z odległością używamy na co dzień, zarówno w sensie dosłownym, jak i przenośnym. *W biegu na **najdłuższym dystansie** nasz zawodnik był już **bliski** szczęścia, ale **nieopodal** mety osłabł i spadł na **dalekie** miejsce, przegrywając nawet o **długość** narty z reprezentantem Kamerunu.* Na lekcjach matematyki uczymy się najpierw mierzyć odcinki, a gdy potem stopniowo odkrywamy świat geometrii, dowiadujemy się, jak wiele jest w niej „odległości". Powoli przekonujemy się, że matematyka to rzeczywiście świat liczb, kształtu i miary. Gdyby Bolesław Prus napisał, że pewnego wieczoru zakochany Wokulski patrzył w oczy Izabeli z odległości 34 cm, osiągnąłby efekt komiczny, a nie romantyczny. Pracy matematycznej, w której autor dowodziłby,

Jest to fragment mającej się niebawem ukazać książki „O matematyce dla humanistów" (Wydawnictwo RTW).

że jakieś dwa punkty są „dość blisko" nie przyjęto by w żadnym czasopiśmie naukowym: recenzent odesłał by ją z lakoniczną uwagą: „**jak** blisko? Proszę podać miarę tej bliskości."

Dystanse na płaszczyźnie czy w przestrzeni mierzyć jest łatwo: odległość od jednego punktu do drugiego to po prostu długość odpowiedniego odcinka. Sam wzór algebraiczny wygląda w podejrzanie skomplikowany sposób (i dlatego w szkole mówi się o nim niejako „półgębkiem"). Jeśli jeden z punktów ma współrzędne (a, b), drugi (c, d), to ich odległością jest

$$\rho = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2},$$

gdzie ρ jest grecką literą „ro", ulubionym przez matematyków oznaczeniem odległości.

Jak i w życiu codziennym, tak i w matematyce używamy pojęcia odległości i przestrzeni bardzo różnym sensie – choć nic z tego nie przenika do szkoły średniej. Ale przestrzeń jest jedną z podstawowych kategorii antropologicznych i interesowała ludzi od dawna, na różny zresztą sposób. Aby ją poznać jedni skakali z wieży, drudzy o tej przestrzeni rozmyślali. Ale do końca XIX wieku topos przestrzeni był wspólny dla matematyków i *pozostałych humanistów*. Dziś przedstawiciele tradycyjnych nauk humanistycznych nie tylko, że nie zmienili swojego toposu przestrzeni, ale też żyją w przekonaniu, że i w matematyce się on nie zmienił. Jeśli nawet uważają, że matematyka jest jedynym źródłem prawdy (a zdarzają się takie skrajne poglądy), to jednak przemawia tylko „przypowieściami", alegoriami, wykorzystuje grę pojęć i symboli i filozofuje – i jest zatem bardziej baśnią niż poznawaniem świata przez szkiełko i oko. Stąd wynikają nieporozumienia:

> Matematyka jest teraz najbliższa rzeczywistości. Wszystko możliwe do wyobrażenia, nawet wszystko to, czym można manipulować za pomocą zwykłych (to znaczy niematematycznych) pojęć, jest tylko analogią, ustępstwem dla naszej słabości, dalekim od tej prawdy, do której matematyka była drogą. Nowoczesna fizyka nie przemawia do rzesz bez przypowieści. Takie wyobrażenie jak „zakrzywienie przestrzeni" daje się ściśle porównać do starej definicji Boga jako „koła, którego środek jest wszędzie, a obwód nigdzie". Oba skutecznie sugerują; każde czyni to, przedstawiając to, co na poziomie naszego zwykłego myślenia jest nonsensem. Przyjmując „zakrzywienie przestrzeni" nie „wiemy" ani nie cieszymy się „prawdą" na sposób, który kiedyś uważano za możliwy (Clive Staple Lewis, Odrzucony obraz, Kraków 1995).

Nic bardziej mylnego, terminy takie jak owo „zakrzywienie przestrzeni" są wymyślane przez matematyków i fizyków na użytek zewnętrzny, by dało się o tym w miarę sensownie opowiadać. Bo „naprawdę" żadnej mistyki w tym nie ma: ot, napiszmy tensor metryczny...

Rozbrat między matematyką i humanistyką na temat wyobrażeń o przestrzeni wziął się z wykładu habilitacyjnego niemieckiego matematyka Bernharda Riemanna na sławnym uniwersytecie w Getyndze (1854 r.). Kiedy bowiem zaczęto badać – na razie tylko myślowo – świat w skali kosmicznej, okazało się, że jest do tego potrzebna inna geometria: właśnie taka, o której opowiadam w rozdziale o krzywiźnie. Późniejsze odkrycia Einsteina potwierdziły to: przestrzeń ugina się pod ciężarem mas, rozszerza się i nie jest bynajmniej w każdym punkcie taka sama. Po pewnym czasie – bynajmniej nie od razu – matematycy zaakceptowali tę nową koncepcję przestrzeni, między innym właśnie dlatego, że lepiej pasowała do tej rzeczywistości pozamatematycznej. Współcześnie ma miejsce kolejna rewolucja w geometrii, a zatem i w matematycznym pojmowaniu przestrzeni.

Fizycy wiedzieli mianowicie już od dawna, że nie tylko w świecie olbrzymich odległości i prędkości podświetlnych zachodzą inne prawa niż w „strefie umiarkowanej", ale że innymi prawami rządzi się i świat małych odległości (rozmiarów atomowych). Na przykład, gdyby krążący wokół ciężkiego, dodatniego protonu, ujemnie naładowany elektron w atomie wodoru podlegał tylko prawom klasycznej mechaniki, to „momentalnie" – gdzieś po 0,00000000001 sekundy spadłby na jądro. Fizycy już w latach dwudziestych

XX wieku stworzyli mechanikę kwantową, ale matematycy dopiero w połowie lat 80 zaproponowali teoretyczne opracowanie geometrii mikroświata. Odpowiednia geometria nazywa się geometrią nieprzemienną i oparta jest mocno na takiej algebrze, w której mnożenie nie jest przemienne, $ab \neq ba$. Czytelnikom, którym wydaje się to niedorzeczne, wyjaśniam, że owo „mnożenie" jest najczęściej rozumiane jako wykonywanie po kolei pewnych przekształceń, czynności, operacji. A że to nie wszystko jedno, w jakiej kolejności wykonamy operacje słodzenia i mieszania herbaty, jest jasne!

Sudańczyk na targu w Chartumie
Rzekł smutny: „Nie tylko w tym tłumie,
  Lecz w całej starszyźnie plemiennej
  Geometrii nieprzemiennej
Do końca to nikt nie rozumie!"

Matematyków od czasu do czasu uwiera to, że punkt jest najmniejszym, niepodzielnym i bezwymiarowym tworem – bo przecież w „prawdziwym" świecie ma on jakąś grubość. Z okazji zbliżających się mistrzostw w piłce nożnej przypomnijmy sobie na przykład dość duży „punkt karny" na jedenaście metrów przed bramką... Mówiąc poważnie, matematyczna idealizacja pojęcia „punktu" jako „nieskończenie małego kółeczka" nie zawsze oddaje to, o co chodzi. Nawet w matematyce szkolnej ocieramy się o tę trudność. Każdy z Czytelników przypomina sobie na pewno, że „było coś takiego" jak *pierwiastek podwójny* równania: niby jedno rozwiązanie, ale pan (pani) od matematyki kazał(a) pisać, że jest to jeden pierwiastek podwójny. Coś tak, jak podwójna porcja pierogów na obiad: jedno danie, ale najedzeni jesteśmy podwójnie... Jedną z charakterystycznych cech tej nowej geometrii jest właśnie to, że punkt nie jest już taki „zupełnie mały", ale autor nie może tu robić wykładu matematycznego.

Tak więc geometria nieprzemienna odegra zapewne taką samą rolę, jak geometria Riemanna sto pięćdziesiąt lat temu. Ale nawet nie takie pojęcie ma matematyk na myśli, mówiąc „przestrzeń" . Ten termin zresztą nie ma w matematyce oddzielnego bytu. Przestrzeń jest zawsze *jakaś*: metryczna, różniczkowa, analityczna, Banacha, Hilberta, ... – lista byłaby bardzo długa. W każdej przestrzeni matematycznej – tak jak w przestrzeniach w powieściach modnego dziś typu *fantazy* – coś się dzieje. W przestrzeni metrycznej „rządzi" pojęcie odległości, w różniczkowej o wszystkim decydują funkcje różniczkowalne, a w przestrzeniach Banacha (które są na ogół nieskończonego wymiaru!) możemy mierzyć kąty miedzy funkcjami i porównywać, która z dwóch funkcji jest „dłuższa". Przestrzeń jest dla matematyka obszarem, gdzie obowiązuje ustalony system aksjomatów, wiążących uprzednio wprowadzone pojęcia pierwotne. Jest to zatem znaczenie bliskie potocznemu „przestrzeń działania". Przestrzenią działania dyrektora przedsiębiorstwa, ministra, kierownika szkoły, prezydenta kraju nie jest przecież ich gabinet, tylko wszystko, na co mają wpływ swoimi zarządzeniami, które muszą jednak być ujęte w karby norm prawnych. Każdy matematyk działa w swojej przestrzeni, która, owszem, niekiedy okazuje się tą, w której latają samoloty i ziemskie statki kosmiczne.

Niezrozumienie matematyki przez przedstawicieli nauk tradycyjnie uznawanych za humanistyczne nie sprowadza się tylko do spraw technicznych: nieumiejętności całkowania czy wykonywania rachunków na tensorach. Humaniści mają po prostu często inny *topos* tego czy innego pojęcia i dlatego rozmowa przypomina czasem próbę porozumienia się ludzi należących do różnych obszarów kulturowych. Sytuacja jest z roku na rok gorsza: bo coraz to nowe pokolenia rodziców i nauczycieli przekazują swoim dzieciom ten rzekomy antagonizm nauk ścisłych i humanistycznych.

I jeszcze krótkie pytanie do matematyków. Przypominam, że dla nas *topos* to kategoria snopów na pewnej kategorii topologizowalnej C. To wiemy. Ale czy rozumiecie, PT Koledzy, dlaczego bourbakiści wymyślili taką nazwę? No, to teraz już wiecie! Już rzymski poeta Kwintyliusz powiedział, że *topos to skład wątków myślowych*.