

O ruchu planet

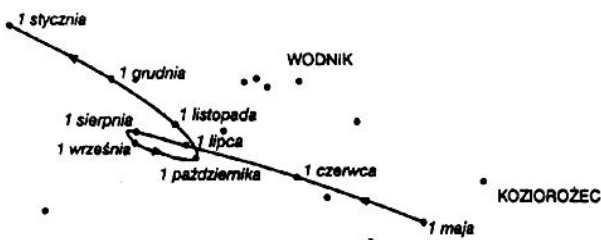
Jarosław GÓRNICKI, Rzeszów

I. Obserwacje i ustalenia

Człowiekowi na Ziemi zawsze towarzyszy występowanie na przemian dnia i nocy, a w dłuższej perspektywie powtarzalne zjawisko, dzisiaj określane jako „pory roku”. Starożytni ludy – Sumerowie, Babilończycy, Egipcjanie, Grecy, Aztekowie, Chińczycy – odkrywali, że obserwacja nieba jest źródłem informacji pozwalającym przewidywać nadejście regularnie pojawiających się zjawisk. Od umiejętności takich przewidywać (kiedy nadejdą wiosenne roztopy, wylewy rzek, kiedy siać, kiedy nastąpi pełnia Księżyca, zaćmienie Słońca) zależała egzystencja ówczesnych społeczeństw jak również władza nad nimi (świecka i duchowa). Nic więc dziwnego, że od najdawniejszych czasów dużą wagę przywiązywano do obserwacji astronomicznych. Była to wiedza tajemna przekazywana z pokolenia na pokolenie, w Mezopotamii, starożytnym Egipcie bardzo silnie związana z aktualnie obowiązującą religią, bo zazwyczaj skupiona w rękach kapłanów (w ówczesnych społeczeństwach warstwie najlepiej wykształconej). W miarę narastania gromadzonych informacji naturalne stało się dążenie do „opisania świata”, a następnie odkrycia praw rządzących obserwowanymi zjawiskami. Z jednej strony pojawiają się więc koncepcje dotyczące porządkowania czasu: doby (dzień + noc) dzielonej na godziny, roku złożonego z określonej liczby dni podzielonego na miesiące, i wreszcie kalendarza (do dzisiaj na świecie funkcjonuje przynajmniej kilka różnych kalendarzy), z drugiej strony próby opisania ruchu ciał niebieskich, które upływ tego czasu wyznaczały. Nasze rozważania skupimy na drugim problemie – koncepcjach opisu ruchu ciał niebieskich.

* * *

Na zagadnienie to zadziwiająco silny wpływ miały poglądy Platona (428–347 r. p.n.e.) – matematyczny opis nieba musi odzwierciedlać jego doskonałość, więc ruch jakiegokolwiek ciała niebieskiego, to ruch jednostajny po okręgu! Gdy jest to „jedyne słuszne punkt widzenia”, to astronomom pozostaje – objaśnić to co widać. Tak postawiony problem był zasadniczym tematem wszystkich koncepcji astronomicznych aż do czasów Johanna Keplera (1571–1630 r.). Najwięcej

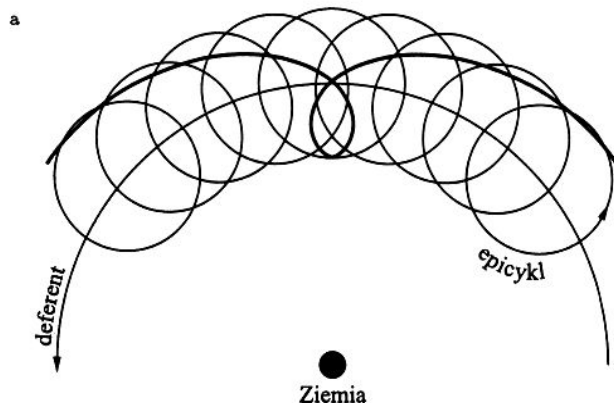


Droga jaką przeszedł po niebie Mars od 1 maja 1956 do 1 stycznia 1957 roku. Planeta osiągnęła stanowiska 11 sierpnia i 1 października: pomiędzy tymi datami poruszała się ruchem wstecznym.

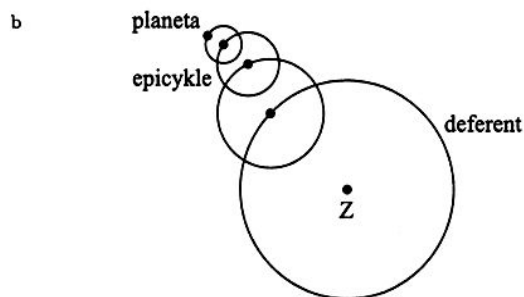
Rys. 1

kłopotów sprawiało wyjaśnienie sytuacji, w której tor ruchu obserwowanej planety na niebie zakreśla pętlę (rys. 1).

Pierwszą matematyczną koncepcję opisu ruchu planet podał Eudoksos z Knidos (408–355 r. p.n.e.). Według niego złożone pozorne drogi Słońca, Księżyca i planet (Merkurego, Wenus, Marsa, Jowisza, Saturna) są w każdym przypadku wynikiem prostych ruchów kołowych pewnej liczby sfer, których wspólny środek stanowi nieruchoma Ziemia (teoria geocentryczna). Jej osiągnięciem było pokazanie, że jednostajne ruchy po okręgach pozwalają na opis nawet bardzo skomplikowanych ruchów. Geocentryczny pogląd na budowę świata usankcjonował Arystoteles (384–322 r. p.n.e.) doskonaląc model Eudoksosa. Kolejnym jego ulepszeniem okazał się pomysł wykorzystania teorii epicykli opracowanej przez Apolloniusza z Pergii (ok. 262–170 r. p.n.e.) i Hipparcha z Nikai (180–127 r. p.n.e.). W modelu tym planety poruszają się po małych kołach (epicyklach), których środki z kolei poruszają się po dużych kołach (deferentach) – rys. 2a, bądź ich ruch jest wynikiem zwielokrotnienia tej konstrukcji – rys. 2b. Poprawiało to zgodność z obserwacjami, ale znacznie komplikowało rachunki.



Powstawanie pętli w systemie epicykl-deferent według Ptolemeusza

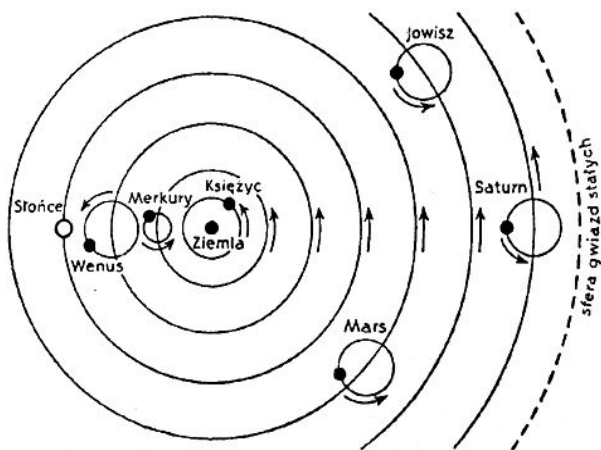


Rys. 2

Dogmatyczne twierdzenia, że Ziemia w przestrzeni nie podlega ruchom jakiegokolwiek rodzaju (siła autorytetu Arystotelesa), uniemożliwiały dyskusowanie śmiałych hipotez (które ówczesne modele czyniły prostszymi): Heraklejdesa z Pontu (działającego ok. 330 r. p.n.e.), że Ziemia obraca się wokół własnej osi,

czy Arystarcha z Samos (ok. 310–230 r. p.n.e.), który dodatkowo uważał, że Ziemia wraz z innymi planetami porusza się wokół Słońca (pierwszej idei systemu heliocentrycznego!).

Szczytowym osiągnięciem starożytnej astronomii jest dzieło Klaudiusza Ptolemeusza z Aleksandrii (ok. 100–168 r.) *Megale syntaxis* ze 140 r., znane bardziej pod arabskim tytułem *Almagest* (pierwsze arabskie tłumaczenie pochodzi z 827 r.). Stało się ono na blisko 1500 lat kanonem wiedzy astronomicznej. W dziele tym, doskonaląc teorię geocentryczną (nieruchoma Ziemia jest centrum Wszechświata i wokół niej krążą Księżyc, Merkury, Wenus, Słońce, Mars, Jowisz i Saturn, wszystkie wewnątrz obracającej się sfery gwiazd stałych (rys. 3)), powiązał Ptolemeusz w jeden system ówczesne teorie ruchu planet (wprowadził pojęcie ekwantu i rozpatrywał ruchy po blisko 80 okręgach) oraz wskazał metody obliczania ich przyszłych położeni.



Schemat geocentrycznego układu wszechświata według Ptolemeusza, z pominięciem epicyklu drugiego rzędu.

Rys. 3

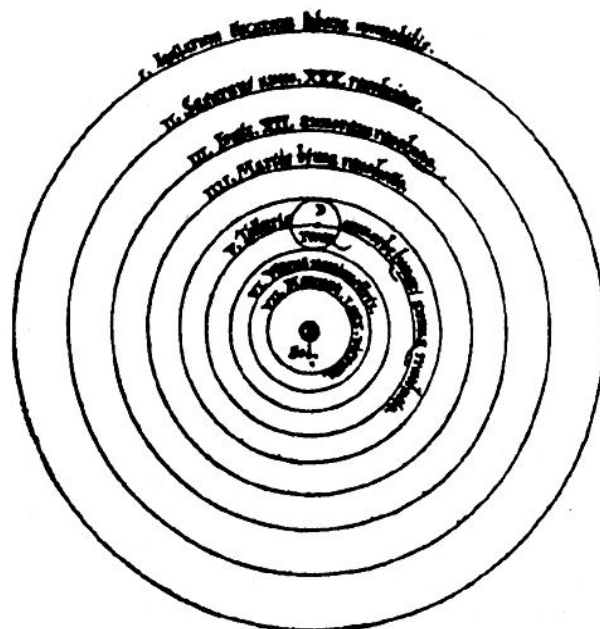
Almagest nie jest napisany w duchu jedynie słusznej doktryny, lecz jako wynik analizy ogromnego materiału obserwacyjnego poprzedników (m.in. astronomów babilońskich, egipskich) i wyboru – zdaniem Ptolemeusza – możliwie najprostszego i najlepszego opisu.

W średniowiecznej Europie dominującą religią było chrześcijaństwo, a cała ówczesna wiedza skupiona była wśród kapłanów (podobnie jak miało to miejsce w starożytnym Egipcie). Jednym z celów średniowiecznego badacza (który siłą rzeczy był kapłanem) było dopasowanie „pogańskiej nauki” przodków do „nauki chrześcijańskiej”. Jednak wraz z dokładniejszymi i dłuższymi obserwacjami nieba ujawniało się coraz więcej wad teorii Ptolemeusza. Ratowano ją wymyślnymi konstrukcjami, by w końcu zdać sobie sprawę, że droga ta prowadzi do nikąd. Potrzebna była nowa koncepcja opisanie Wszechświata.

* * *

Mikołaj Kopernik z Torunia (1473–1543 r.) był wszechstronnie wykształconym kanonikiem, którego

szczególnie interesowała astronomia. Jako dobry obserwator nieba i zdolny matematyk dostrzegł niedociągnięcia systemu Ptolemeusza. Epoka w której żył (Odrodzenie) sprzyjała studiowaniu dzieł Starożytnych. Podczas pobytu we Włoszech, Kopernik poznał kosmologiczne koncepcje Greków, m.in. ideę Arystarcha, by umieścić Słońce w centrum Wszechświata. Intelktualnym wyzwaniem było pytanie: czy umieszczenie Ziemi na sferze wokółsłonecznej i nadanie jej ruchu obrotowego wraz z rocznym uprości obliczenia? Kopernik podjął trud udzielenia na nie odpowiedzi. Wyniki jego obserwacji i obliczeń z lat 1515–1533 wskazywały, że teoria heliocentryczna (rys. 4) lepiej wyjaśnia ruch Merkurego i Wenus, Księżyca wokół Ziemi, precesję oraz podaje względne wielkości orbit poszczególnych planet (tab. 1, tab. 2). Jest dokładniejsza i prostsza od teorii Ptolemeusza, więc jest od niej lepsza.



Kopernikański obraz Układu Słonecznego z *De revolutionibus* (1543)

Rys. 4

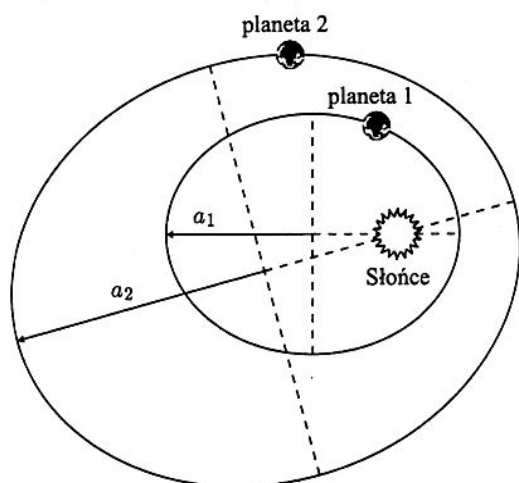
Planeta	Merkury	Wenus	Ziemia	Mars	Jowisz	Saturn
Względna odległość od Słońca wg Kopernika	0,36	0,72	1	1,5	5	9
Średnia względna odległość od Słońca współcześnie	0,39	0,72	1	1,52	5,2	9,5
Średnia bezwzględna odległość od Słońca w mln km	57,9	108,1	149,6	227,9	778,3	1427

Tab. 1

Planeta	Okres obiegu	
	rzeczywisty	według Kopernika
Saturn	29 lat 167 dni	30 lat
Jowisz	11 lat 315 dni	12 lat
Mars	1 rok 322 dni	2 lata
Ziemia	1 rok	1 rok
Wenus	235 dni	270 dni
Merkury	88 dni	80 dni

Tab. 2

Swoją teorię Kopernik ogłosił w pracy *De Revolutionibus Orbium coelestium libri sex* (O obrotach sfer niebieskich ksiąg sześć) wydanej w 1543 r. w Norymberdze. Praca ta początkowo nie budziła większych emocji (tak naprawdę jej treść znała i rozumiała tylko garstka ludzi). Dopiero po kilkudziesięciu latach pojawiły się elementy potwierdzające słuszność przyjętych przez Kopernika założeń: 11.XI.1572 r. Tycho Brahe (1546–1601 r.) odkrywa w gwiazdozbiore Kasjopei nową gwiazdę (był to wybuch supernowej), w 1577 r. na niebie pojawia się kometa, zaś w dniach 7–15.01.1610 r., za pomocą udoskonalonego przez siebie teleskopu, Galileusz (1561–1642 r.) odkrywa 4 księżycy Jowisza. Fakty te w połączeniu z zachodzącymi przemianami społecznymi, kulturowymi i dokonującym się postępem, sprawiają że teoria Kopernika (jako najbardziej spektakularne podważenie dogmatów Kościoła i obowiązującej wówczas filozofii Arystotelesa) zaczęła zagrażać panującemu porządkowi, w tym przede wszystkim Kościołowi. W 1616 r. kardynał Robert Bellarmin (1542–1621 r.) działając w imieniu Świętego Oficjum ogłosił, że teoria Kopernika jest „fałszywa i błędna”. Kościół dzieło *De Revolutionibus*... umieścił na Indeksie Ksiąg Zakazanych, skąd zostało usunięte dopiero w 1828 r. Kreśląc nowy porządek świata, Kopernik (być może pod wpływem idei Platona i Arystotelesa) niestety pozostał przy kołowym kształcie orbit i teorii epicykli. Stało się to podstawą uzasadnionej krytyki jego dzieła. Dokonał tego wspomniany już duński astronom Brahe. Prowadząc najdokładniejsze w owym czasie obserwacje astronomiczne (błąd nie przekraczał 1') zauważył, że nie zgadzają się one z wyliczeniami opartymi na teorii Kopernika. Dotyczyło to w szczególności orbity Marsa. Podjął nawet próbę (nieudaną) stworzenia własnego systemu. Gdy przeniósł się do Pragi (na dwór cesarza Rudolfa II), jego współpracownikiem został Kepler (w latach 1600–1601). Keplera cechował talent matematyczny i nadzwyczajna skrupulatność. Dysponując danymi Brahego podjął próbę znalezienia kształtu orbity Marsa odpowiadającego obserwacjom. Swoje wyniki, uzyskane dzięki niezwykle żmudnym



Rys. 5

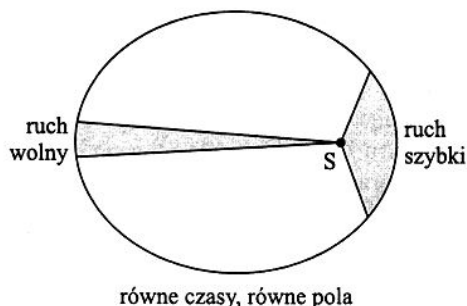
obliczeniom, ogłosił w dziele *Astronomia nova* w 1609 r. W pracy tej Kepler podaje:

I PRAWO KEPLERA

Orbity wszystkich planet są elipsami, ze Słońcem położonym w jednym z ognisk (rys. 5).

II PRAWO KEPLERA

Planety po orbicie poruszają się szybciej, gdy znajdują się bliżej Słońca, a wolniej, gdy są od niego oddalone, z zachowaniem następującej zależności: linia łącząca Słońce z planetą zakreśla równe pola w równych czasach (rys. 6).



Rys. 6

Dzięki nim nie trzeba już w modelu Kopernika korzystać z epicykli. Dziesięć lat później, w 1619 r. Kepler, przekonany o liczbowej harmonii świata, publikuje pracę *Harmonices mundi*, w której podaje jeszcze jedną zależność:

III PRAWO KEPLERA

Im dalej od Słońca jest orbita planety, tym wolniej się planeta porusza, a dokładniej: czas obiegu planety wokół Słońca (T) podniesiony do kwadratu jest proporcjonalny do średniej odległości planety od Słońca (a) podniesionej do trzeciej potęgi ($T^2 \sim a^3$).

Za średnią odległość planety od Słońca przyjmujemy średnią arytmetyczną długości półosi elipsy będącej orbitą planety. W oryginalnym sformułowaniu Keplera a oznaczało długość dłuższej półosi elipsy. Ponieważ eliptyczne orbity planet tylko nieznacznie różnią się od okręgów (np. mimośród orbity Marsa wynosi 0,093), więc poprawka ta jest natury technicznej. Oczywiście prawa Keplera idealizują (przybliżają) otaczającą nas rzeczywistość – tory ruchu planet nie są idealnymi elipsami (!) – obrazują to wyniki z tabeli 3.

Planeta	Średnia odległość od Słońca, a [j.a.]	Czas obiegu dookoła Słońca, T [lata]	T^2/a^3
Merkury	0,3871	0,241	1,0018
Wenus	0,7233	0,615	0,9994
Ziemia	1,0000	1,000	1,0000
Mars	1,527	1,881	1,002
Jowisz	5,2028	11,862	0,9991
Saturn	9,5388	29,458	0,9998

Tab. 3

W ten oto sposób, w roku 1619, zostały ukształtowany zasadniczy pogląd na budowę naszego Układu Słonecznego, pozostający w zgodzie z obserwacjami. Astronomia stała się nauką precyzyjniejszą niż kiedykolwiek przedtem. Brak było jednak odpowiedzi

na zasadnicze pytanie: co sprawia, że planety krążą wokół Słońca po eliptycznych torach?

II. Prawo grawitacji Newtona

Arystoteles wyodrębnia „świat podksiężycowy” w którym wszystkie rzeczy ziemskie dążą do środka Ziemi, bo taka jest ich natura, oraz sferę niebieską, gdzie panują inne prawa – ciała niebieskie pozostają w wiecznym, naturalnym ruchu po okręgach. Zmianę tego poglądu zapoczątkowały dopiero prace Kopernika, Keplera, Kartezjusza, Galileusza. Kepler, zwolennik teorii heliocentrycznej, uważał że ruch planety wokół Słońca wywołuje pewna siła *anima motrix*, której źródłem jest Słońce. Jednak wyjaśnienie zakrzywienia toru planety upatrywał w siłach magnetycznych, traktując planetę jak wielki magnes. Kartezjusz (1569–1650 r.) uważał, że cały Kosmos wypełniony jest substancją (materią) zbyt subtelną dla naszych zmysłów. Ruch planet wokół Słońca tłumaczył zawirowaniami owej subtelnej materii wypełniającej przestrzeń międzyplanetarną. Galileusz chciał odkryć „jak działa Świat”, wykonując eksperymenty, których wyniki mógł analizować za pomocą matematyki. W szczególności badając ruch pod wpływem ciężenia ziemskiego wyjaśnił, że za sprawą bezwładności oraz grawitacji (w postaci jego prawa spadku ciał) tor każdego pocisku w pobliżu powierzchni Ziemi jest parabolą. Robert Hooke (1635–1703 r.) odkrył (odgadł) od czego i jak zależy siła, którą Słońce działa na planety, ale nie potrafił tego wykorzystać. Dokonał tego Izaak Newton (1642–1727 r.). Uważa się, że do najistotniejszych swoich idei (fizycznych i matematycznych) doszedł on w latach 1665–1666 (czyli mając mniej niż 25 lat) podczas pobytu w rodzinnym Woolsthorpe, dokąd uciekł przed szalejącą w Cambridge dżumą. W latach następnych doskonalili swoją teorię, by ostatecznie w 1687 roku, za namową i przy finansowym wsparciu przyjaciela Edmunda Halleya (1656–1742 r.), wydać dzieło *Philosophiae naturalis principia mathematica* (*Matematyczne podstawy filozofii przyrody*). Praca ta, podsumowująca dokonania Newtona w zakresie mechaniki i grawitacji składa się z trzech ksiąg opatrzonych wstępem i jest napisana po łacinie. We wstępie w formie postulatywnej sformułowane są zasady dynamiki:

I PRAWO NEWTONA

Każde ciało trwa w stanie spoczynku lub ruchu jednostajnego po linii prostej, dopóki nie zostanie zmuszone do zmiany tego stanu przez przyłożone do niego siły.

II PRAWO NEWTONA

Zmiana ruchu jest proporcjonalna do przyłożonej siły poruszającej i dokonuje się w kierunku linii prostej, wzdłuż której przyłożono siłę.

III PRAWO NEWTONA

Każdej akcji towarzyszy zawsze przeciwieństwo skierowane i równa co do wartości reakcja; innymi słowy,

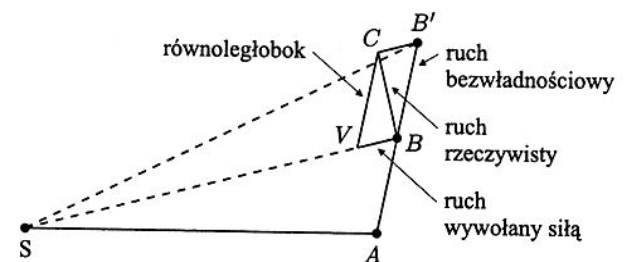
wzajemne oddziaływania dwóch ciał na siebie są zawsze równe co do wartości i skierowane przeciwnie.

Zasadniczą częścią *Principiów* jest Księga I, która zawiera teorię ruchu planet. W niej to pojawia się prawo grawitacji wydedukowane z przyjętych przez Newtona praw oraz II i III prawa Keplera.

* * *

Najpierw pokażemy, że z I i II prawa Newtona oraz II prawa Keplera wynika, że siła grawitacji działająca na planetę jest skierowana ku Słońcu.

Niech S (rys. 7) oznacza pozycję Słońca („nieruchome centrum siły”), zaś punkty A, B, C, \dots odpowiadają kolejnym położeniom planety krążącej wokół Słońca w jednakowych (!) odstępach czasu Δt . Gdyby na planetę nie działała żadna siła, to po czasie Δt przemieściłaby się ona z punktu A do punktu B , a następnie w takim samym czasie i w identycznych warunkach, przemieściłaby się po linii prostej (będącej przedłużeniem odcinka AB) z punktu B do punktu B' , przy czym $|AB| = |BB'|$. Tak jednak się nie dzieje, gdyż w punkcie B na planetę działa impuls siły grawitacyjnej skierowanej do Słońca. Ruch planety w czasie Δt , który nastąpiłby pod nieobecność siły grawitacyjnej Słońca (wzdłuż BB') oraz ruch wywołany tą siłą (wzdłuż BS), tworzą równoległobok, którego przekątna – odcinek BC – odpowiada „rzeczywistemu” ruchowi planety.



Rys. 7

Zauważmy teraz, że trzy punkty S, A, B wyznaczają płaszczyznę. Punkt B' , jako leżący na przedłużeniu odcinka AB , należy do tej płaszczyzny. Gwarantuje to, że należy do niej również punkt C . Zatem orbita planety leży zawsze na płaszczyźnie. Następnie korzystając z elementarnej geometrii widzimy, że trójkąty $\triangle SAB$ i $\triangle SBB'$ mają równe pola, bo mają wspólną podstawę SB i równe wysokości. Podobnie trójkąty $\triangle SBB'$ i $\triangle SBC$ mają równe pola, gdyż mają wspólną podstawę SB i wysokość trójkąta $\triangle SBC$ poprowadzona z wierzchołka C jest równa wysokości trójkąta $\triangle SBB'$ poprowadzonej z wierzchołka B' . Stosując to rozumowanie do coraz krótszych, równych czasów, otrzymujemy nie tylko lepsze przybliżenie orbity planety, ale i to, że planeta w równych odstępach czasu zakreśla na orbicie równe pola. (Gdyby siła grawitacji nie była skierowana ku Słońcu, to otrzymalibyśmy sprzeczność z II prawem Keplera.)

Zajmiemy się teraz wykazaniem zależności siły grawitacji od odległości.

W każdym z punktów A, B, \dots planeta ma określoną prędkość. Możemy ją interpretować jako wektor zaczepiony w punkcie A i równoległy do odcinka AB , jako wektor zaczepiony w punkcie B i równoległy do odcinka BC , itd. Zgodnie z II prawem Newtona:

1. w punkcie B nastąpił impuls działania siły grawitacyjnej skierowanej ku Słońcu, co wywołało zmianę prędkości o wektor Δv , równoległy do odcinka SB ;
2. ta zmiana prędkości jest proporcjonalna do wielkości tej siły (im większa jest siła F , tym większa jest zmiana Δv): $F \sim \Delta v$.

Rozważmy możliwie najprostszy przypadek, gdy orbita planety jest okręgiem. Wówczas planeta porusza się z jednakową prędkością v po całej orbicie i wektory prędkości zaczepione w punktach A, B, \dots po przeniesieniu ich do jednego punktu utworzą wielokąt foremny wpisany w okrąg o promieniu v , tzw. hodograf. Skoro prędkość planety dana jest jako iloraz przebytej odległości i czasu trwania ruchu, więc podobnie zmiana prędkości dana jest przez ruch końca wektora prędkości (na hodografie). Gdy T jest czasem potrzebnym na zakreślenie przez planetę pełnej orbity, to zmiana prędkości Δv jest równa obwodowi $2\pi \cdot v$ podzielonemu przez T . Oznacza to, że

$$F \sim \frac{2\pi}{T} \cdot v.$$

Jeżeli promień orbity wynosi r , to prędkość z jaką planeta obiega Słońce jest równa $v = \frac{2\pi r}{T}$, zatem

$$F \sim (2\pi)^2 \cdot \frac{r}{T^2}.$$

Uwzględniając teraz III prawo Keplera ($T^2 \sim r^3$), otrzymujemy zależność:

$$F \sim (2\pi)^2 \cdot \frac{1}{r^2},$$

siła jest proporcjonalna do odwrotności kwadratu odległości od Słońca! Mamy więc

PRAWO GRAWITACJI NEWTONA

Siła, która planetę stale odciąga od ruchu po linii prostej i utrzymuje ją na swojej orbicie, jest skierowana ku Słońcu i jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości planety od Słońca.

* * *

W tym miejscu wypada uczynić dwie uwagi.

Po pierwsze. Przedstawione tutaj rozumowanie zawiera niebanalne uproszczenie. W rzeczywistości żadne ciało w przyrodzie nie jest punktem, ma określony kształt, wymiary. Zatem siła grawitacji działająca między takimi ciałami powinna zależeć od przestrzennego rozkładu masy w tych ciałach. Zdawał sobie z tego sprawę Newton i rozwiązanie tego problemu mogło być jednym z powodów, dla których (blisko dwadzieścia lat) zwlekał z publikacją *Principiów*. Ostatecznie Newton pokazał, że siła przyciągania między dwoma ciałami kulistymi o jednorodnym rozkładzie gęstości jest taka sama, jak byśmy masę każdego z tych ciał skoncentrowali

w ich środkach ciężkości. Pozwala to traktować Słońce i planety jak punkty, w których skupione są odpowiednie masy.

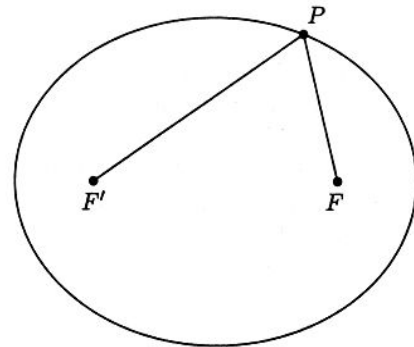
Po drugie. Siła przyciągania jest proporcjonalna do masy planety. Zatem w oparciu o III prawo Newtona jest ona również proporcjonalna do masy Słońca. Współcześnie wyrażamy to wzorem $F = G \frac{M \cdot m}{r^2}$, gdzie G jest uniwersalną stałą grawitacji, taką samą dla dowolnych dwóch ciał. Tego ostatniego nie wiedział nikt w XVII wieku. Dopiero Henry Cavendish (1731–1810 r.), mając blisko 70 lat, wykonał doświadczenie, dzięki któremu jako pierwszy dokonał pomiaru współczynnika G .

Na szczęście bez tych dodatkowych informacji możemy z prawa grawitacji Newtona wywnioskować jaki powinien być kształt orbit, po których poruszają się planety. W tym celu przypomnimy kilka...

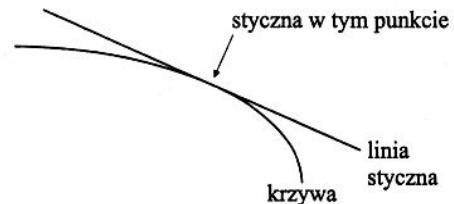
III. Własności elips

Korzystać będziemy z następujących określeń (rys. 8, 9):

- elipsą nazywamy zbiór punktów płaszczyzny, dla których suma ich odległości od dwóch ustalonych punktów (zwanymi ogniskami) jest stała;
- styczną do elipsy nazywamy prostą nieograniczoną, która z elipsą ma dokładnie jeden punkt wspólny.



Rys. 8



Rys. 9

Poczynymy teraz kilka obserwacji:

OBSERWACJA 1

Wśród dwóch elips o identycznych ogniskach, ta której suma odległości jej punktów od ognisk jest mniejsza leży w obszarze ograniczonym drugą elipsą.

OBSERWACJA 2

Niech prosta k będzie styczną do elipsy w punkcie P , zaś F i F' niech będą ogniskami tej elipsy. Jeżeli punkt

F'' jest symetryczny do punktu F względem prostej k , to punkt P należy do odcinka $F'F''$.

DOWÓD. Gdyby odcinek $F'F''$ przecinał prostą k w punkcie Q różnym od punktu P , to byłoby:

$$|FQ| + |F'Q| > |FP| + |F'P|,$$

bo Q leży na zewnątrz elipsy (obserwacja 1),

$$\begin{aligned} |FQ| + |F'Q| &= |F''Q| + |QF'| = |F''F'| \\ &< |F''P| + |PF'| = |FP| + |F'P|. \end{aligned}$$

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że $Q = P$. ♣

OBSERWACJA 3

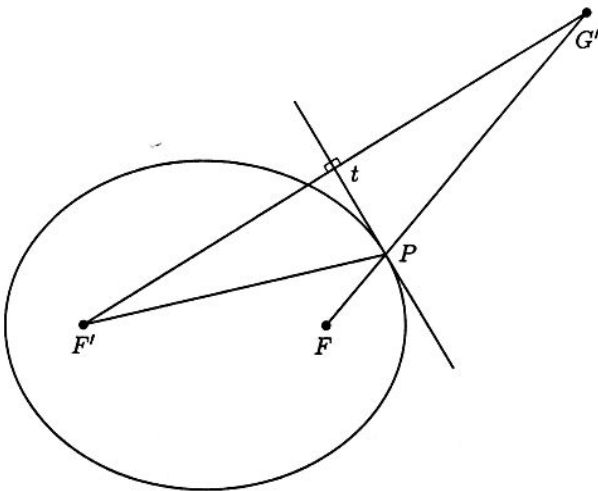
Dla każdego punktu elipsy istnieje dokładnie jedna styczna do tej elipsy w tym punkcie.

DOWÓD. Załóżmy, że istnieją dwie różne styczne m oraz n do elipsy w punkcie P . Niech G będzie obrazem ogniska F przez symetrię względem prostej m , zaś H obrazem ogniska F przez symetrię względem prostej n . Wówczas zgodnie z Obserwacją 2 punkt P , należy do odcinków $F'G$ oraz $F'H$. Jest to niemożliwe, bo dwa punkty P i F' jednoznacznie wyznaczają prostą. ♣

OBSERWACJA 4

Odcinek łączący ognisko F z punktem P należącym do elipsy, tworzy ze styczną do elipsy w punkcie P taki sam kąt jaki tworzy z tą styczną odcinek łączący ognisko F' z punktem P .

DOWÓD. Patrz na rysunek 10.

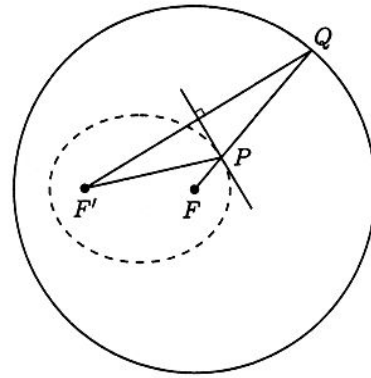


Rys. 10

OBSERWACJA 5

Jeżeli promień światła wychodzący z punktu F po odbiciu się od krzywej K trafia do punktu F' , to krzywa ta jest elipsą o ogniskach F i F' .

DOWÓD. Z punktu F' zakreślamy okrąg O o promieniu $r > |FF'|$. Na okręgu O wybieramy dowolny punkt Q (nie leżący na przedłużeniu odcinka FF') i prowadzimy odcinki QF i QF' . Następnie kreślimy symetralną odcinka QF , która przecina odcinek QF' w punkcie P (rys. 11.).



Rys. 11

Wówczas promień wychodzący z punktu F , odbijając się od symetralnej w punkcie P trafia do punktu F' (w myśl reguły: kąt padania jest równy kątowi odbicia). Ponadto, gdy punkt Q przemierzy cały okrąg (z wyjątkiem punktów leżących na przedłużeniu odcinka FF'), to punkty P wyznaczone za pomocą wyżej opisanej konstrukcji zakreślają elipsę (bez dwóch punktów), gdyż dla każdego punktu P mamy:

$$|FP| + |PF'| = |QP| + |PF'| = |QF'| = r. \clubsuit$$

Oczywiście istnieje nieskończenie wiele elipsy spełniających opisane wyżej warunki w zależności od wybranej wartości $r > |FF'|$, i wszystkie one będą miały taki sam kształt.

IV. Epilog według Feynmana

Data 13 marca 1964 r. opatrzone są notatki Richarda P. Feynmana (1918–1988 r.) do jego wykładu pt. *Ruch planet wokół Słońca*, który wygłosił dla studentów Caltechu (California Institute of Technology). Feynman oparł wykład na analizie *diagramu położenia* (toru ruchu) planety oraz *diagramu prędkości* planety. Pomysł takiego postępowania przypisuje się Williamowi R. Hamiltonowi (1805–1865 r.). Diagram prędkości otrzymujemy przenosząc wektory prędkości z odpowiadającego im fragmentu orbity (diagramu położenia) na bok, tak aby wszystkie miały wspólny początek.

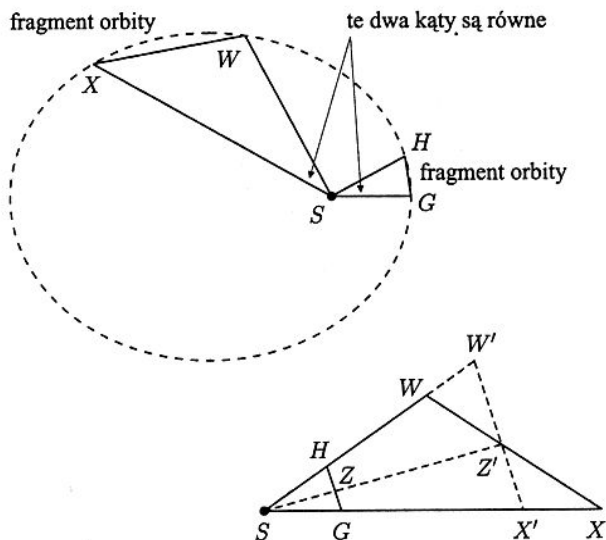
ETAP I

W czasie, gdy promień wodzący planety zakreśla równe kąty, mamy do czynienia z równymi zmianami prędkości.

Orbitę planety dzielimy promieniami wodzącymi wychodzącymi ze Słońca tak, by wszystkie kąty środkowe były równe. Według II prawa Keplera (planeta zakreśla równe pola w równych czasach)

$$\Delta t \sim (\text{zakreślony obszar}).$$

Wiemy, że planeta porusza się szybciej, gdy znajduje się bliżej Słońca. Aby zobaczyć o ile szybciej, musimy porównać pola trójkątów $\triangle GSH$ i $\triangle WSX$ (rys. 12.), ponieważ czasy ruchu są proporcjonalne do zakreślonych pól.



Rys. 12

W tym celu odbijając symetrycznie trójkąt $\triangle WSX$ względem dwusiecznej $\angle XSG$ nakładamy go na trójkąt $\triangle GSH$. Następnie na ramionach kąta WSX (za pomocą odcinka $W'X'$ równoległego do odcinka GH) odkładamy trójkąt $\triangle W'SX'$, podobny do trójkąta $\triangle GSH$ i taki, że $|\triangle W'SX'| = |\triangle WSX|$. Odcinki WX i $W'X'$ przecinają się w punkcie Z' , który łączymy z S . Odcinek SZ' przecina odcinek GH w punkcie Z . Wówczas zgodnie z własnościami figur podobnych: trójkąty $\triangle W'SX'$, $\triangle GSH$ mają pola proporcjonalne, odpowiednio, do kwadratów długości $|SZ'|$ oraz $|SZ|$. Gdy zmniejszamy kąt środkowy, wówczas długości odcinków $|SZ'|$ oraz $|SZ|$ coraz dokładniej przybliżają odległość planety od Słońca. Otrzymujemy zatem zależność: pole zakreślone przez promień wodzący planety jest proporcjonalne do kwadratu odległości planety od Słońca, a w konsekwencji

$$\Delta t \sim r^2.$$

Rozważmy teraz zmianę prędkości Δv planety, gdy promień wodzący zakreśla ustalony kąt środkowy. Im większa jest siła F tym większa jest zmiana Δv , poza tym im dłuższy jest czas Δt jej działania, tym większa jest zmiana prędkości Δv :

$$\Delta v \sim F \cdot \Delta t.$$

Ponieważ $F \sim r^2$ oraz $\Delta t \sim r^2$, więc

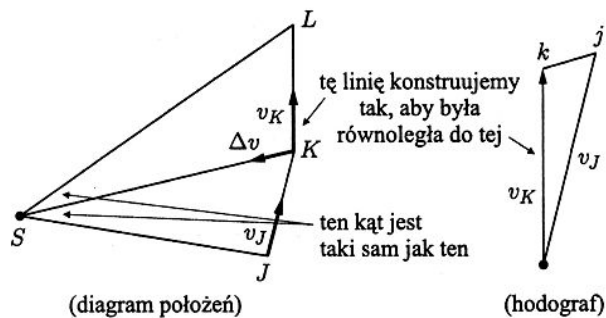
$$\Delta v \sim r^{-2} \cdot r^2 = 1.$$

Oznacza to, że zmiana prędkości Δv nie zależy wcale od r , odległości planety od Słońca!

ETAP II

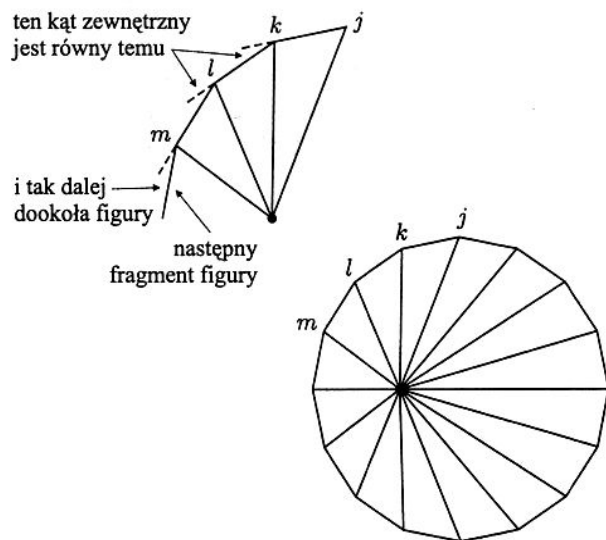
Każdej orbicie planety dozwolonej przez prawo grawitacji Newtona odpowiada hodograf mający kształt okręgu.

Tor planety dzielimy promieniami wodzącymi tak, by wszystkie kąty środkowe były równe (różne są czasy pokonywania ich przez planetę). Wszystkie zmiany prędkości Δv są skierowane ku Słońcu i mają dokładnie taką samą wartość wzdłuż całej orbity. W tej sytuacji rysujemy hodograf planety (rys. 13.).



Rys. 13

Każdy bok hodografu (odcinek łączący końce dwóch kolejnych wektorów prędkości) ma taką samą długość (proporcjonalną do wartości Δv) i jest równoległy do jednej z linii łączących na torze Słońce z planetą. Ponadto kąty zewnętrzne pomiędzy dwoma kolejnymi bokami na hodografie są wszędzie takie same (mają miarę kąta środkowego). Zatem hodograf jest wielokątem foremnym (!). Jednak początek wektorów prędkości nie znajduje się w środku okręgu opisanego na tym wielokącie (rys. 14.).



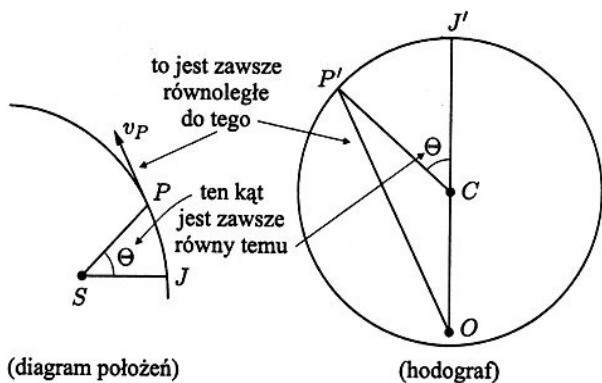
Rys. 14

Gdy będziemy zmniejszać miarę kątów środkowych na diagramie położenia, to zarówno tor ruchu planety jak i hodograf będą bardziej zbliżone do krzywych gładkich. Ponieważ hodograf jest wielokątem foremnym, więc w tym przypadku graniczną krzywą jest okrąg.

ETAP III

Prawo grawitacji Newtona prowadzi do wniosku, że orbity planet są eliptyczne.

Rozpocniemy od ustalenia pewnej zależności między diagramem położenia, a hodografem (rys. 15.). Jeżeli punktowi P na diagramie położenia odpowiada wektor prędkości \vec{v}_P , na hodografie odcinek OP' , to wówczas $\angle JSP = \angle J'CP'$.



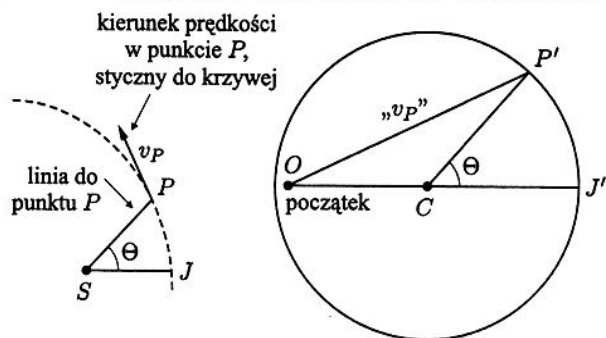
Rys. 15

Wynika to z następującej obserwacji. W utworzonym hodografie prowadzimy promień (!) z punktu C – będącego środkiem okręgu opisanego na powstałym tam wielokącie foremnym – do wierzchołków tego wielokąta. Liczba boków tego wielokąta foremnego jest równa liczbie kątów środkowych na diagramie położenia. Zatem miara kąta środkowego o wierzchołku C opartego na boku wielokąta jest równa mierze kąta środkowego na diagramie położenia, a stąd już wynika oczekiwana równość kątów.

Z etapu II wiemy, że planecie odpowiada jej hodograf – koło o środku w punkcie C i punkt wewnętrzny koła $O \neq C$. Wówczas dla dowolnego punktu P' na brzegu koła (rys. 15):

- odcinek OP' ma długość proporcjonalną do prędkości planety w punkcie P na diagramie położenia,
- odcinek OP' ma taki sam kierunek jak wektor prędkości planety w punkcie P na diagramie położenia (jest to więc kierunek stycznej do toru ruchu planety znajdującej się w punkcie P),
- zachodzi $|\angle JSP| = |\angle J'CP'|$.

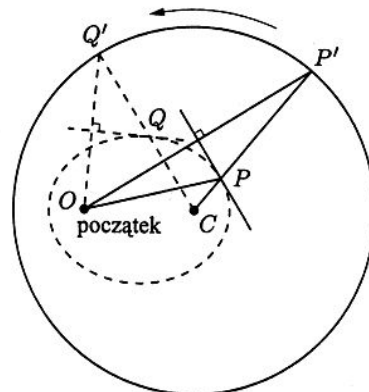
Wynika stąd, że dla każdego kąta Θ znamy kierunek stycznej do orbity, którą chcemy skonstruować. Kształt takiej orbity (o zadanym kierunku stycznej w każdym jej punkcie) możemy opisać na hodografie. Będzie on podobny do rzeczywistego toru planety. Konstrukcję poszukiwanej krzywej oprzemy na Obserwacji 5. W tym celu obracamy hodograf wokół punktu C o 90° zgodnie z ruchem wskazówek zegara (rys. 16). Wówczas (patrz na hodograf) stwierdzamy, że planeta znajduje się w pewnym punkcie na kierunku



Rys. 16

OP' , zaś symetralna odcinka OP' wyznacza kierunek stycznej do toru tej planety w tym punkcie.

Warunki te spełnione są w punkcie P leżącym na przecięciu symetralnej z odcinkiem OP' . Ponadto dla każdego tak otrzymanego punktu P , mamy (rys. 17)

$$|OP| + |CP| = (\text{promień okręgu z hodografu}).$$


Gdy P' przemieszcza się po okręgu do Q' , punkt przecięcia zmierza od P do Q kreśląc orbitę.

Rys. 17

Oznacza to, że gdy punkt P' przemieszcza się do punktu Q' wzdłuż brzegu hodografu, to punkt przecięcia P zmierza do punktu Q kreśląc elipsę. ♣

* * *

W ten oto sposób, używając elementarnej geometrii na płaszczyźnie rozwiązany został pewien przypadek tzw. *zagadnienia dwóch ciał*: dla danych dwóch przyciągających się siłami grawitacji punktów materialnych (Słońca i Ziemi), mając dane ich prędkości początkowe i położenia, możemy określić ich ruch. (Problem ten jest nadal inspirujący – do dziś nie znane jest rozwiązanie tzw. *zagadnienia trzech ciał*: dla danych położenia i prędkości początkowych trzech punktów materialnych, przyciągających się siłami grawitacji, wyznaczyć ich ruch.) Możliwe to było dzięki prawom Keplera i Newtona, uzyskanym jakże odmiennymi drogami. Prawa Keplera mają charakter empiryczny, są uogólnieniami obserwacji nieba. Natomiast dla Newtona jego intelektualne spekulacje dotyczące prawdziwej natury fizycznej rzeczywistości: związków między materią, siłą i ruchem, okazały się prawdziwe, gdy zachowanie ciał wydedukowane z przyjętych reguł znajdzie potwierdzenie w przyrodzie. I stało się, w roku 1687 w *Principiach*, Newton wykazał, że przyjęte przez niego reguły znajdują potwierdzenie w skali astronomicznej! Wydawało się, że wreszcie zostały odkryte „zasady działania świata”. Prawa Newtona pozwalały wyjaśnić wiele zjawisk, np.: przyływów i odpływów morza, drgań ciał sprężystych, ruchu w atmosferze z uwzględnieniem oporu ośrodka, rozmaitych problemów akustyki, hydrodynamiki... Był to wielki triumf fizyki – trzy proste prawa zadowalająco wyjaśniały wielką różnorodność obserwowanych zjawisk. Najbardziej spektakularne potwierdzenie mechaniki Newtona miało dopiero nastąpić. W 1781 roku

William F. Herschel (1738–1822 r.) odkrył planetę Uran (była to pierwsza planeta dołączona do listy planet znanych w Starożytności). Wkrótce zauważono niezgodność między obserwowanym a przewidywanym przez obliczenia położeniem Urana – mimo, że uwzględniono wpływ wszystkich znanych planet. W 1845 roku John C. Adams (1819–1892 r.) w Cambridge oraz Urbain J. Leverrier (1811–1877 r.) w Paryżu, prowadząc niezależne analizy tych zakłóceń, teoretycznie (!) stwierdzili istnienie nie znanej jeszcze planety (Neptuna). Określili jej położenie oraz przybliżone elementy orbity. Był to istny majstersztyk matematyczny w dziejach astronomii. 23.09.1846 roku istnienie Neptuna zostało potwierdzone obserwacjami astronomicznymi. Podobnie w 1930 roku odkryto kolejną planetę – Plutona, która być może nie jest najbardziej zewnętrzną planetą naszego Układu Słonecznego. Na przełomie XIX i XX wieku okazało się, że mechanika Newtona niestety zawodzi przy opisywaniu zjawisk w bardzo małej skali (procesów zachodzących we wnętrzu atomów), przy bardzo

dużych prędkościach (rzędu prędkości światła) czy też bardzo dużych gęstościach (czarne dziury). Doprowadziło to do powstania mechaniki kwantowej oraz szczególnej i ogólnej teorii względności, ale to już całkiem inna historia. . .

Wykorzystana literatura

1. A. Drzewiński, J. Wojtkiewicz, *Opowieści z historii fizyki*, Wyd. Naukowe PWN, Warszawa, 1995.
2. D.L. Goodstein, J.R. Goodstein, *Zaginiony wykład Feynmana*, Prószyński i S-ka, Warszawa, 1997.
3. C. Iwaniszewska, *Astronomia Mikołaja Kopernika*, TNT, Toruń, 1973.
4. M. Kordos, *Wykłady z historii matematyki*, WSiP, Warszawa, 1994.
5. G.E.R. Lloyd, *Nauka grecka od Talesa do Arystotelesa*, Prószyński i S-ka, Warszawa, 1998.
6. G.E.R. Lloyd, *Nauka grecka po Arystotelesie*, Prószyński i S-ka, Warszawa, 1998.
7. J. Mioduszewski, *Ciągłość, szkice z historii matematyki*, WSiP, Warszawa, 1996.
8. W. Zonn, *Astronomia z perspektywy czasu*, Wiedza Powszechna, Warszawa, 1974.