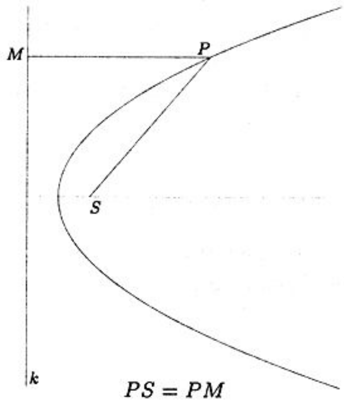
Parabola

Wojciech GUZICKI, Warszawa

Definicja. *Parabolą* nazywamy zbiór tych punktów P, których odległość od ustalonego punktu S jest równa odległości od ustalonej prostej k. Punkt S nazywamy wtedy *ogniskiem* paraboli, prostą k nazywamy *kierownicą* paraboli.



$PS = PM$

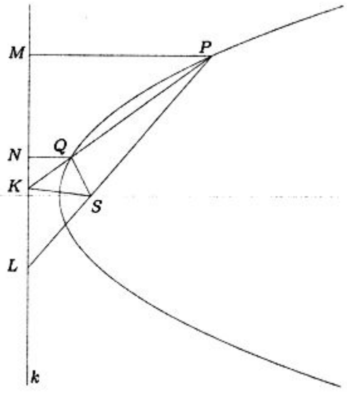
Nietrudno wykazać, że parabola jest figurą symetryczną względem prostej prostopadłej do kierownicy i przechodzącej przez ognisko. Tę prostą nazywamy *osią* paraboli. Punkt przecięcia paraboli z jej osią nazywamy *wierzchołkiem* paraboli.

Wprost z definicji paraboli wynika, że każda prosta równoległa do kierownicy przecina parabolę w co najwyżej dwóch punktach.

Jeśli punkt M jest rzutem punktu P na kierownicę, to wprost z definicji paraboli wynika, że punkt P leży na symetralnej odcinka SM. Zatem każda prosta prostopadła do kierownicy przecina parabolę w dokładnie jednym punkcie.

Definicja. Niech P będzie punktem leżącym na paraboli. *Styczną* do tej paraboli w punkcie P nazywamy prostą nierównoległą do osi paraboli i mającą z parabolą tylko jeden punkt wspólny. *Cięciwą* paraboli nazywamy dowolny odcinek, którego końce leżą na paraboli.

Twierdzenie. Punkty P i Q leżą na paraboli o ognisku S i kierownicy k. Prosta PQ przecina kierownicę k w punkcie K, prosta PS przecina kierownicę k w punkcie L. Wtedy odcinek SK jest dwusieczną kąta zewnętrznego LSQ w trójkącie SPQ.



Dowód. Niech punkty M i N będą odpowiednio rzutami punktów P i Q na kierownicę k. Z twierdzenia Talesa wynika, że

$$\frac{PM}{QN} = \frac{PK}{QK}.$$

Z definicji paraboli mamy:

$$PM = PS \quad \text{oraz} \quad QN = QS.$$

Zatem

$$\frac{PS}{QS} = \frac{PK}{QK}$$

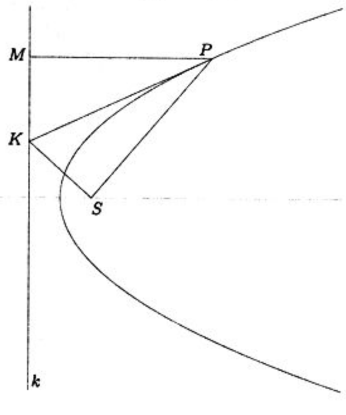
i teza twierdzenia wynika z twierdzenia o dwusiecznej kąta zewnętrznego w trójkącie.

Wniosek. Prosta nierównoległa do kierownicy paraboli przecina parabolę w co najwyżej dwóch punktach.

Zajmiemy się teraz problemem istnienia stycznych do paraboli. Najpierw wykażemy, że w każdym punkcie paraboli istnieje co najmniej jedna styczna do paraboli, a następnie wykażemy, że istnieje dokładnie jedna styczna.

Twierdzenie. Dla każdego punktu P leżącego na paraboli istnieje styczna do paraboli w tym punkcie.

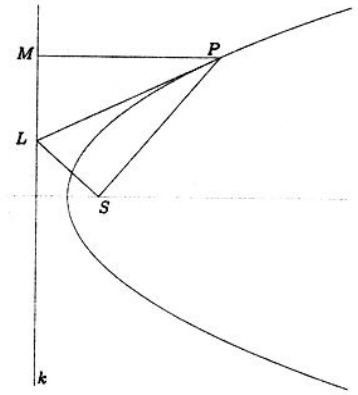
Dowód. Nietrudno zauważyć, że prosta równoległa do kierownicy i przechodząca przez wierzchołek paraboli ma tylko jeden punkt wspólny z parabolą. Jest więc styczną w wierzchołku. Przypuśćmy następnie, że punkt P jest różny od wierzchołka. Niech M będzie rzutem punktu P na kierownicę k i niech S będzie ogniskiem paraboli. Poprowadźmy dwusieczną kąta MPS i niech K będzie punktem przecięcia tej dwusiecznej z kierownicą paraboli.



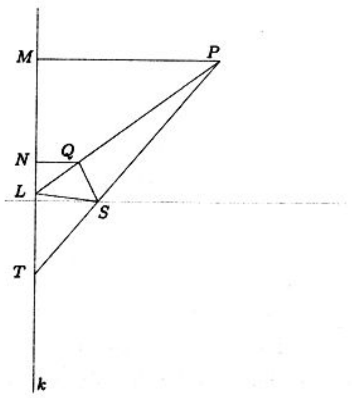
Trójkąty KMP i KSP są przystające, gdyż $PM = PS$, bok PK jest wspólny i kąty KPM i KPS są równe. Zatem kąt KSP jest prosty. Gdyby prosta PK przecinała parabolę w jakimś innym punkcie P', to odcinek SK musiałby być dwusieczną kąta zewnętrznego w trójkącie SPP', co jednak jest niemożliwe. Zatem punkt P jest jedynym punktem wspólnym prostej PK i paraboli, czyli prosta PK jest styczna do paraboli.

Twierdzenie. Dla każdego punktu P leżącego na paraboli istnieje tylko jedna styczna do paraboli w tym punkcie.

Dowód. Niech P będzie punktem leżącym na paraboli o kierownicy k i ognisku S. Niech M będzie rzutem punktu P na kierownicę k i niech L będzie takim punktem kierownicy, że prosta PL jest prostą styczną do paraboli w punkcie P. Wykażemy, że prosta PL jest dwusieczną kąta MPS.



Przypuśćmy zatem, że prosta PL nie jest dwusieczną kąta MPS. Wynika stąd, że kąt LSP nie jest prosty. Wynika stąd, że na prostej PL istnieje taki punkt Q, że odcinek SL jest dwusieczną kąta zewnętrznego S w trójkącie SPQ. Jedno możliwe położenie punktu Q jest pokazane na rysunku:



Punkt Q został wybrany tak, by kąty TSL i LSQ były równe. (Możliwe jest też inne położenie punktu Q, mianowicie na półprostej LP za punktem P; rozpatrzenie tego przypadku pozostawimy Czytelnikowi.) Wtedy z twierdzenia o dwusiecznej kąta zewnętrznego w trójkącie SPQ mamy

$$\frac{LP}{LQ} = \frac{SP}{SQ}.$$

Z twierdzenia Talesa wynika, że

$$\frac{LP}{LQ} = \frac{PM}{QN}.$$

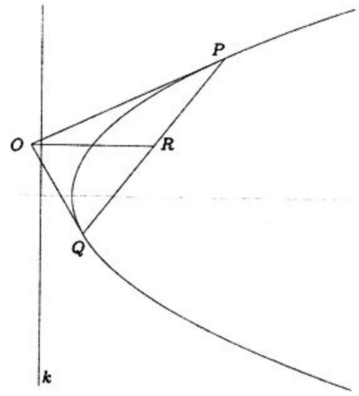
Wreszcie z definicji paraboli mamy

$$PM = SP.$$

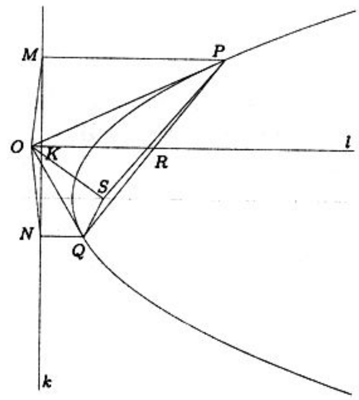
Stąd wynika, że $SQ = QN$, czyli że punkt Q leży na paraboli, co przeczy założeniu, że prosta PL jest styczna do paraboli.

Teraz będziemy zmierzać do wyznaczenia pola odcinka paraboli, tzn. pola części płaszczyzny ograniczonej cięciwą i łukiem paraboli. Zastosujemy metodę „wyczerpywania", pochodzącą od Eudoksosa (por. M. Kordos, Wykłady z historii matematyki, str. 75–76).

Twierdzenie. Niech styczne do paraboli w punktach P i Q przecinają się w punkcie O. Wtedy prosta równoległa do osi paraboli i przechodząca przez punkt O połowi cięciwę PQ.

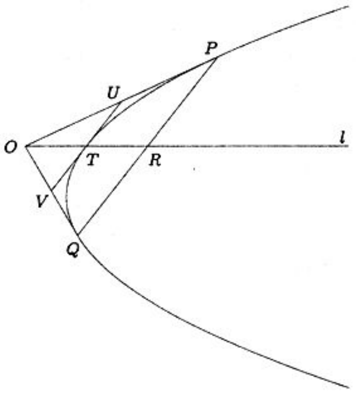


Dowód. Niech M i N będą rzutami punktów P i Q na kierownicę paraboli. Połączmy następnie punkt O z punktami M, S i N. Połączmy również ognisko S z punktami P i Q. Niech prosta l, przechodząca przez punkt O, będzie równoległa do osi paraboli. Oznaczmy przez K i R punkty przecięcia prostej l z kierownicą k i z cięciwą PQ.



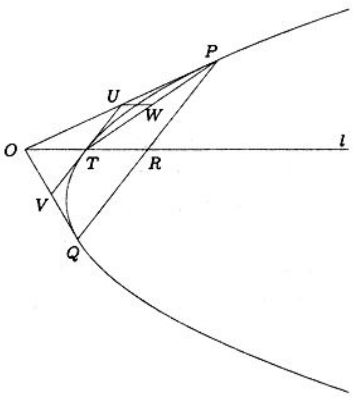
Trójkąty OMP i OSP są przystające, gdyż mają wspólny bok OP, równe boki MP i SP oraz równe kąty OPM i OPS. Zatem $OM = OS$. W podobny sposób pokazujemy, że $ON = OS$. Trójkąt ONM jest więc trójkątem równoramiennym. Ponieważ prosta OR jest równoległa do osi paraboli, więc jest prostopadła do kierownicy. Odcinek OK jest więc wysokością w trójkącie równoramiennym ONM, skąd wynika, że $MK = NK$. Z twierdzenia Talesa wynika, że $PR = QR$, co kończy dowód twierdzenia.

Twierdzenie. Niech styczne do paraboli w punktach P i Q przecinają się w punkcie O. Niech prosta l równoległa do osi paraboli i przechodząca przez punkt O przecina parabolę w punkcie T. Wtedy styczna do paraboli w punkcie T jest równoległa do cięciwy PQ.



$UV \parallel PQ$

Dowód. Poprowadźmy cięciwę TP i prostą równoległą do osi paraboli przechodzącą przez punkt U. Oznaczmy przez W punkt przecięcia tej prostej z cięciwą TP.



Odcinki UP i UT są styczne do paraboli. Zatem prosta UW połowi cięciwę PT, czyli $PW = WT$. Proste UW i OR są równoległe, bo obie są równoległe do osi paraboli. Zatem z twierdzenia Talesa wynika, że $PU = OU$. W podobny sposób pokazujemy, że $QV = OV$. Jeszcze raz stosujemy twierdzenie Talesa i stwierdzamy, że $PQ \parallel UV$.

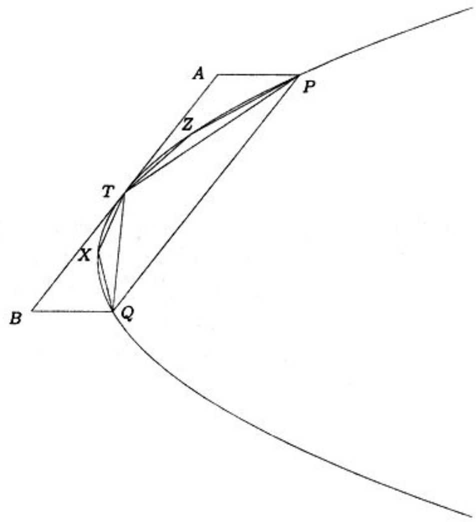
Wniosek. Przy powyższych oznaczeniach zachodzi równość $OT = TR$.

Wniosek. Oznaczmy przez Z punkt przecięcia prostej UW z parabolą. Wtedy pole trójkąta TPZ jest osiem razy mniejsze od pola trójkąta TQP.

Dowód. Z poprzedniego wniosku wynika, że $UZ = ZW$. Zatem pole trójkąta ZWP jest połową pola trójkąta UWP. Następnie zauważamy, że pole trójkąta UWP jest cztery razy mniejsze od pola trójkąta OTP. Teraz wystarczy zauważyć, że pola trójkątów OTP i TRP są równe.

Wniosek. Pole trójkąta TPZ jest osiem razy mniejsze od pola trójkąta QPT.

Teraz możemy już obliczyć pole odcinka paraboli. Rozpatrzmy część płaszczyzny ograniczoną cięciwą PQ i łukiem paraboli $PZTXQ$. Prowadzimy styczną AB równoległą do cięciwy PQ i budujemy równoległobok $ABQP$ tak, by boki AP i BQ były równoległe do osi paraboli. W ten sposób będziemy mogli skorzystać z ostatnich dwóch wniosków. Następnie powtarzamy to postępowanie dla cięciw TP i TQ itd.



Wiemy już, że pola trójkątów TPZ i TQX są osiem razy mniejsze od pola trójkąta TQP. Łącznie pola tych dwóch mniejszych trójkątów stanowią czwartą część pola trójkąta TQP. Następnie zauważamy, że pole trójkąta TQP stanowi więcej niż połowę odcinka paraboli (bo jest połową pola równoległoboku $BQPA$, a pole odcinka paraboli jest oczywiście mniejsze od pola tego równoległoboku) i tak samo będzie dla następnych trójkątów. Zatem z metody wyczerpywania Eudoksosa (por. *M. Kordos, Wykłady z historii matematyki*, str. 73 – 75) wynika, że pole paraboli będzie równe sumie pól trójkąta TQP, trójkątów TPZ i TXQ i tak dalej. Zatem jest ono równe

$$S_{\triangle TQP} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \ldots\right) = \frac{4}{3} \cdot S_{\triangle TQP} = \\ = \frac{2}{3} \cdot S_{ABQP}.$$