

Grupy generowane przez odbicia, układy pierwiastków i algebry Liego

Henryk ŻOŁĄDEK, Warszawa

1. Odbicia w przestrzeni euklidesowej

Rozważmy przestrzeń euklidesową \mathbb{R}^n wyposażoną w iloczyn skalarny (\cdot, \cdot) . Odbiciem ortogonalnym w tej przestrzeni nazywamy przekształcenie postaci

$$\alpha \rightarrow s_\beta \alpha = \alpha - 2 \frac{(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \beta$$

Jest to odbicie wzdłuż prostej przechodzącej przez wektor $\beta \in \mathbb{R}^n \setminus 0$ i względem hiperpłaszczyzny H_β prostopadłej do β (rysunek 1).

Jest oczywiste, że s_β jest liniową izometrią (przekształceniem ortogonalnym) i że $s_\beta^2 = s_\beta \circ s_\beta = 1 (=id)$. To znaczy, że s_β ma rząd 2 w grupie $O(n, \mathbb{R})$ przekształceń ortogonalnych \mathbb{R}^n .

Będziemy badać skończone podgrupy W grupy $O(n, \mathbb{R})$ generowane przez odbicia. Podamy kilka przykładów takich grup.

(a) *Grupa dihedralna* (albo *dwuścienna*) $I_2(m)$. (Ta grupa jest czasami oznaczana przez D_m). Jest to grupa przekształceń ortogonalnych płaszczyzny, które zachowują m -bok foremny o środku w początku układu współrzędnych. Ta grupa zawiera m obrotów (o wielokrotności kąta $2\pi/m$) i m odbić względem osi symetrii wielokąta. Obroty tworzą normalną podgrupę cykliczną indeksu 2 generowaną przez obrót o kąt $2\pi/m$. Ponieważ to ostatnie przekształcenie jest złożeniem odbić względem dwóch sąsiednich osi (z kątem π/m pomiędzy nimi), więc cała grupa D_m jest generowana przez odbicia (rysunek 2).

(b) *Grupa A_n* . Rozważmy grupę symetryczną $S(n+1)$ (permutacji zbioru $(n+1)$ -elementowego). Można ją traktować jako podgrupę grupy ortogonalnej $O(n+1, \mathbb{R})$; po prostu elementy $\pi \in S(n+1)$ permutują wektory bazowe $e_i = (0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0)$, $\pi e_i = e_{\pi(i)}$. Grupa $S(n+1)$ jest generowana przez transpozycje (ij) . Każda taka transpozycja odpowiada odbiciu względem hiperpłaszczyzny $\{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) : x_i = x_j\}$ i wzdłuż wektora $e_i - e_j$ (rysunek 3).

Zauważmy teraz, że n -wymiarowa przestrzeń $\mathbb{R}^n \simeq \{x : x_1 + \dots + x_{n+1} = 0\}$ (prostopadła do wektora $e_1 + \dots + e_{n+1}$) jest niezmiennicza względem działania grupy $S(n+1)$ (bo wektor $e_1 + \dots + e_{n+1}$ jest niezmienniczy).

Zatem mamy włożenie grupy $S(n+1)$ w $O(n, \mathbb{R})$. Obraz tego włożenia jest grupą A_n .

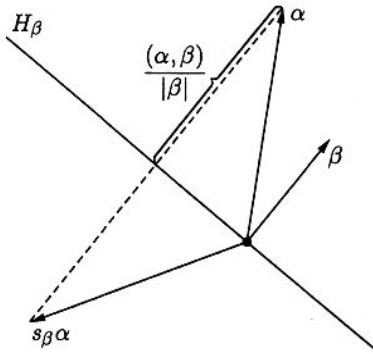
(c) *Grupa B_n* . Jest ona generowana przez grupę $S(n)$ działającą w \mathbb{R}^n (poprzez permutacje wektorów bazowych) i przez odbicia postaci $e_i \rightarrow -e_i$, $e_j \rightarrow e_j$, $j \neq i$ (zamiany znaków przed wektorami bazowymi). Sprzężenie takiej zmiany znaku (tzn. przed e_i) poprzez permutację π prowadzi do zmiany znaku przed $e_{\pi(i)}$. Stąd wynika, że B_n jest iloczynem półprostym grup $S(n)$ i $(\mathbb{Z}_2)^n$. Jej rząd wynosi $2^n n!$.

(d) *Grupa D_n* . Jest to podgrupa grupy B_n indeksu 2. W D_n dopuszczamy tylko parzyste ilości zmian znaków u współrzędnych; na przykład, $e_i \rightarrow -e_i$, $e_j \rightarrow -e_j$, $e_k \rightarrow e_k$, $k \neq i, j$. Złożenie tego ostatniego przekształcenia z transpozycją $e_i \leftrightarrow e_j$ jest odbiciem wzdłuż wektora $e_i + e_j$ (rysunek 4).

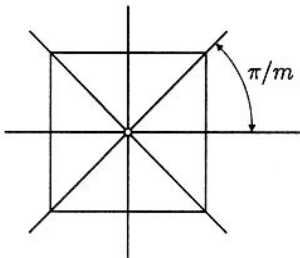
2. Grupy Coxetera

Można pokazać, że w każdym z powyższych przykładów grup istnieje taki wybór generatorów $S = \{s_1, \dots, s_r\}$ grupy, że jedyne relacje jakie zachodzą pomiędzy nimi mają postać

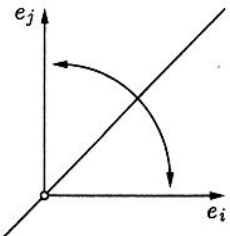
$$(st)^{m(s,t)} = 1, \quad s, t \in S$$



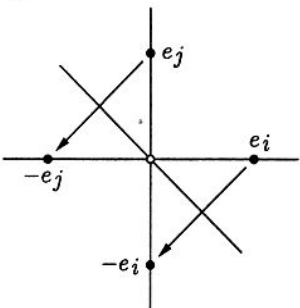
Rys. 1



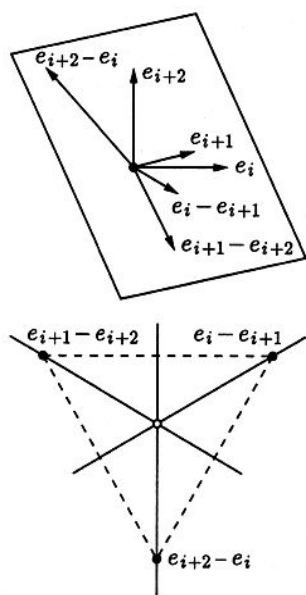
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

gdzie $m(s, s) = 1$ (tzn. $s^2 = 1$ jako, że s są odbiciami). Macierz $(m(s, t))_{s, t \in S}$ nazywa się *macierzą Coxetera*.

Przykłady. Grupa $I_2(m)$ ma dwa generatory s_1, s_2 odpowiadające odbiciom względem dwu kolejnych osi symetrii wieloboku. Zatem $s_1^2 = s_2^2 = (s_1 s_2)^m = 1$.

Grupa A_n ma n generatorów $s_i = s_{e_i - e_{i+1}}$, $i = 1, \dots, n$. Zauważmy, że jeśli $i + 1 < j$, to s_i i s_j są odbiciami we wzajemnie ortogonalnych podprzestrzeniach; zatem one komutują między sobą i mamy $(s_i s_j)^2 = s_i^2 s_j^2 = 1$. Jeśli $j = i + 1$, to wektory $e_i - e_{i+1}$ oraz $e_{i+1} - e_{i+2}$ leżą w płaszczyźnie $\{(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) : x_i + x_{i+1} + x_{i+2} = 0\}$ i tworzą kąt 120° (rysunek 5). Zatem $(s_i s_{i+1})^3 = 1$.

Definicja. Grupa W (skończona lub nieskończona) nazywa się *grupą Coxetera* jeśli istnieje zbiór jej generatorów $S = \{s_1, \dots, s_r\}$ taki, że jedynymi relacjami pomiędzy nimi są $(st)^{m(s,t)} = 1$, przy czym $m(s, s) = 1$.

Zauważmy, że macierz Coxetera jest macierzą symetryczną. Rzeczywiście, mamy $ts = t(st)t^{-1}$, co daje $(ts)^{m(s,t)} = t(st)^{m(s,t)}t^{-1} = 1$. Zatem $m(t, s)$ dzieli $m(s, t)$. Oczywiście zachodzi również relacja odwrotna.

Symetryczną macierz o nieujemnych całkowitych wyrazach można łatwo zakodować za pomocą grafu. W przypadku macierzy Coxetera dostaje się tzw. *graf Coxetera*. Zawiera on r wierzchołków odpowiadających generatorom $s \in S$. Różne wierzchołki s i t są połączone krawędzią z indeksem m jeśli $m(s, t) = m \geq 3$. To znaczy, że jeśli $m(s, t) = 2$, to wierzchołki s i t nie są połączone; odpowiada to sytuacji, gdy odbicia działają w ortogonalnych względem siebie podprzestrzeniach (patrz przykład z A_n). Umawiamy się również nie pisać indeksu $m = 3$.

Powyzsza definicja grup Coxetera jest abstrakcyjno-algebraiczna. Okazuje się, że można realizować grupy Coxetera geometrycznie. Weźmy przestrzeń wektorową \mathbb{R}^S (z bazą $(e_s, s \in S)$) i wyposaźmy ją w formę dwuliniową

$$a(e_s, e_t) = -\cos \frac{\pi}{m(s, t)}$$

Jeśli $x = \sum x_s e_s$ i $y = \sum y_s e_s$, to mamy $a(x, y) = (Ax, y)$, gdzie macierz A ma elementy macierzowe $a(e_s, e_t)$, a (\cdot, \cdot) jest euklidesowym iloczynem skalarnym.

Widzimy, że elementy diagonalne $a(e_s, e_s)$ są równe 1 i że A jest symetryczna. Niestety, nie zawsze zadaje ona iloczyn skalarny (od którego wymaga się, aby $a(x, x) > 0$ dla $x \in \mathbb{R}^S \setminus 0$, lub krócej $A > 0$). Na przykład, $\det A = 0$ dla grafu Coxetera $\tilde{B}_2 : \bullet - \frac{4}{4} - \bullet$ (sprawdzić).

Niezależnie od tego, czy $a(\cdot, \cdot)$ jest iloczynem skalarnym czy nie, definiujemy przekształcenia

$$\sigma_s : x \rightarrow x - 2a(e_s, x)e_s$$

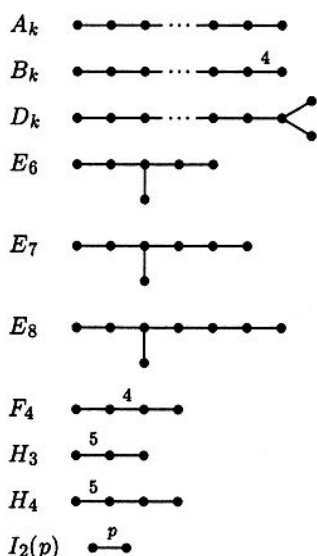
które nazywamy *pseudo-odbiciami*. Grupa Coxetera W pokrywa się z grupą przekształceń \mathbb{R}^S generowaną przez pseudo-odbicia. Zauważmy, że pseudo-odbicia są inwolucjami (bo $a(e_s, e_s) = 1$) oraz złożenie pseudo-odbić $\sigma_s \sigma_t$ jest obrotem o kąt $2\pi/m(s, t)$.

W przypadku gdy $A > 0$ przekształcenia σ_s są odbiciami w przestrzeni z iloczynem skalarnym. Okazuje się, że:

grupa Coxetera jest skończona wtedy i tylko wtedy, gdy macierz A jest dodatnio określona.

Na przykład, $A = \begin{pmatrix} 1 & -\cos \pi/m \\ -\cos \pi/m & 1 \end{pmatrix}$ dla grupy $I_2(m) : \bullet - \frac{m}{m} - \bullet$.

Powyzsza własność pozwala na uzyskanie pełnej klasyfikacji skończonych grup Coxetera (tylko nimi będziemy się dalej zajmować). Odpowiednie spójne grafy Coxetera są przedstawione na rysunku 6. (Spójność grafu Coxetera oznacza nierozkładalność grupy Coxetera na iloczyn podgrup działających w ortogonalnych podprzestrzeniach.)



Rys. 6

Zatrzymajmy się na chwilę na grupach H_3 i H_4 . Grupa H_3 działa w trójwymiarowej przestrzeni i jest generowana przez trzy odbicia względem płaszczyzn, które tworzą pomiędzy sobą kąty 90° , 60° i $36^\circ = 180^\circ/5$. Nietrudno domyśleć się, że mamy tutaj grupę izometrii dwunastościanu foremnego. Obroty o krotności kąta 120° są to obroty wokół 10 osi przechodzących przez pary antypodalnych wierzchołków (gdzie zbiegają się 3 krawędzie); obroty o krotności 72° to obroty wokół 6 osi przechodzących przez środki przeciwległych ścian (pieciokątów), obroty zaś o kąt 180° to symetrie osiowe względem 15 prostych przechodzących przez środki krawędzi. Te obroty wyznaczają 60-elementowy składnik prosty w H_3 izomorficzny z grupą *alternującą* $A(5)$ (parzystych permutacji 5 sześciąt wpisanych w dwunastościan). Mamy $H_3 \simeq A(5) \times \mathbb{Z}_2$, gdzie \mathbb{Z}_2 jest generowana przez symetrię przestrzenną.

Grupa H_4 jest grupą izometrii pewnej figury regularnej w \mathbb{R}^4 . Składa się ona ze 120 wierzchołków, 720 krawędzi, 1200 ścian i 600 komórek trójwymiarowych. Grupa liczy 14 400 elementów.

Grupy H_3 i H_4 nie są *grupami krystalograficznymi*. To znaczy, że działając w \mathbb{R}^3 (lub w \mathbb{R}^4) nie pozostawiają na miejscu żadnej siatki (struktury kryształu). Podobnie nie są krystalograficzne grupy $I_2(m)$ dla $m = 5$ (oznaczana także przez H_2) oraz $m \geq 7$. Pozostałe skończone grupy Coxetera są krystalograficzne.

3. Układy pierwiastków

Większość ze skończonych grup Coxetera okazuje się być grupami Weyla układów pierwiastków.

Definicja. Rozważmy przestrzeń wektorową \mathbb{R}^n z iloczynem skalarnym (\cdot, \cdot) . Skończony podzbiór $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n \setminus 0$ jest *układem pierwiastków* jeśli:

$$1) c_{\alpha\beta} \stackrel{\text{df}}{=} 2 \frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z} \text{ dla każdych } \alpha, \beta \in \mathcal{R};$$

$$2) \text{ odbicia } s_\beta, \alpha \xrightarrow{s_\beta} \alpha - 2 \frac{(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \beta, \text{ są bijekcjami zbioru } \mathcal{R}.$$

Jeśli \mathcal{R} jest układem pierwiastków, to grupa W generowana przez odbicia $s_\alpha, \alpha \in \mathcal{R}$ nazywa się *grupą Weyla*.

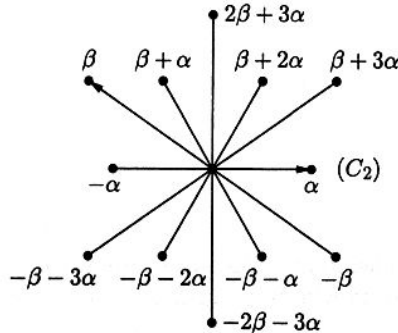
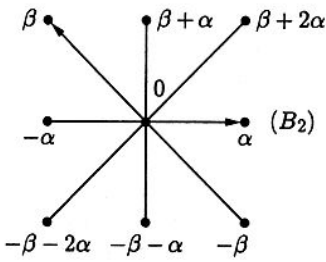
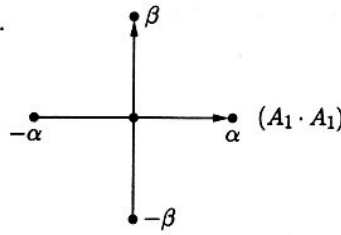
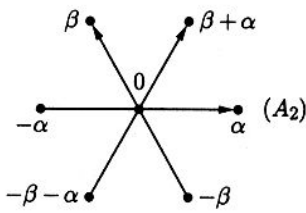
Przykład. Układ $A_n = \{\alpha_{ij} = e_i - e_j : i, j = 1, \dots, n+1, i \neq j\}$ w $\mathbb{R}^n \simeq \{\sum x_i = 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (ze standardowym iloczynem skalarnym) jest układem pierwiastków. Rzeczywiście, mamy $(\alpha_{ij}, \alpha_{ij}) = 2$ oraz $(\alpha_{ij}, \alpha_{kl}) = 0, \pm 1, \pm 2$, czyli warunek 1) jest spełniony. Z drugiej strony wiemy, że odbicia $s_{\alpha_{ij}}$ zadają transpozycje (ij) elementów bazy e_1, \dots, e_{n+1} . Zatem oczywistym jest, że pierwiastki przechodzą na pierwiastki. Oczywiście grupa Weyla układu pierwiastków A_n pokrywa się z grupą Coxetera A_n .

Bardzo proste warunki 1) i 2) nakładają istotne ograniczenia na geometrię zbioru \mathcal{R} . Na przykład, jeśli $\alpha \in \mathcal{R}$, to $s_\alpha \alpha = -\alpha \in \mathcal{R}$ oraz jeśli $\alpha \in \mathcal{R}$ i $m\alpha \in \mathcal{R}$, to $m = \pm 1/2, \pm 1, \pm 2$. Istotnie, zakładając, że $m > 1$ dostajemy $c_{m\alpha, \alpha} = 2 \frac{m|\alpha|^2}{m^2|\alpha|^2} = \frac{2}{m} \in \mathbb{Z}$. Układ pierwiastków \mathcal{R} nazywa się *zredukowanym*, jeśli z faktu $\alpha \in \mathcal{R}$ i $m\alpha \in \mathcal{R}$ wynika, że $m = \pm 1$.

Mamy ponadto $n_{\alpha\beta} \stackrel{\text{df}}{=} c_{\alpha\beta} c_{\beta\alpha} = 4 \frac{(\alpha, \beta)^2}{|\alpha|^2 |\beta|^2} = 4 \cos^2 \theta$, gdzie $\theta = \theta_{\alpha\beta}$ jest kątem pomiędzy α i β . Jako że ta liczba jest całkowita, to może ona przyjmować tylko wartości 0, 1, 2, 3 (o ile pierwiastki nie są równoległe). To odpowiada kątom $90^\circ, 120^\circ, 135^\circ$ i 150° ; o ile bierzemy kąty w zakresie od 90° do 180° . Oczywiście wtedy mamy $c_{\alpha\beta} = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$.

Zauważmy jeszcze, że $c_{\alpha\beta}/c_{\beta\alpha} = |\beta|^2/|\alpha|^2$, o ile pierwiastki nie są prostopadłe. Te relacje pozwalają wyznaczyć względne długości pierwiastków. Mamy następujące możliwości:

$$\begin{aligned} c_{\alpha\beta} &= c_{\beta\alpha} = 0, & \theta &= 90^\circ; \\ c_{\alpha\beta} &= c_{\beta\alpha}, & \theta &= 120^\circ, & |\alpha| &= |\beta|; \\ c_{\beta\alpha} &= 2c_{\alpha\beta}, & \theta &= 135^\circ, & |\alpha| &= \sqrt{2}|\beta|; \\ c_{\beta\alpha} &= 3c_{\alpha\beta}, & \theta &= 150^\circ, & |\alpha| &= \sqrt{3}|\beta|. \end{aligned}$$



Rys. 7

Na rysunku 7 są przedstawione wszystkie zredukowane układy pierwiastków w \mathbb{R}^2 .

Dla opisu klasyfikacji układów pierwiastków potrzebne jest jeszcze pojęcie *układu prostych pierwiastków* $\mathcal{S} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \mathcal{R}$. Elementy \mathcal{S} powinny tworzyć bazę przestrzeni \mathbb{R}^n i każdy element z \mathcal{R} powinien mieć przedstawienie postaci

$$\alpha = \sum n_i \alpha_i$$

gdzie współczynniki n_i są całkowite i tego samego znaku (albo wszystkie nieujemne albo wszystkie niedodatnie).

Okazuje się, że układ prostych pierwiastków zawsze istnieje (choć nie jest wyznaczony jednoznacznie). Można go skonstruować wychodząc z porządku leksykograficznego $>$ w \mathbb{R}^n . Mówimy, że pierwiastek $\alpha > 0$ jest *prosty*, jeśli nie jest sumą dodatnich pierwiastków, $\alpha \neq \beta + \gamma$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$.

W ten sposób dostaje się zbiór \mathcal{S}

pierwiastków, który spełnia warunki układu prostych pierwiastków. Można pokazać, że $(\alpha, \beta) \leq 0$ dla $\alpha, \beta \in \mathcal{S}$ (patrz rysunek 7).

Każdy układ pierwiastków koduje się za pomocą tzw. *diagramu Dynkina*. Jego wierzchołki odpowiadają prostym pierwiastkom $\alpha \in \mathcal{S}$. Wierzchołki $\alpha, \beta \in \mathcal{S}$ są połączone za pomocą $n_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta}c_{\beta\alpha} = 0, 1, 2, 3$ krawędzi. Jeśli $n_{\alpha\beta} \neq 0$, to dorysowuje się strzałkę idącą od większego do mniejszego z pierwiastków.

Spójne i zredukowane układy pierwiastków są pokazane na rysunku 8.

(Spójność oznacza nierozkładalność układu pierwiastków na niezależne układy w prostopadłych podprzestrzeniach.) Jedyne niezredukowane układy pierwiastków powstają z sum układów B_n i C_n ; są one oznaczane przez $B_n C_n$.

- W przypadku A_n mamy $\mathcal{R} = \{e_i - e_j\}$ oraz $\mathcal{S} = \{e_i - e_{i+1}\}$.

- Układ pierwiastków B_n jest następujący

$$\pm e_i, i = 1, \dots, n; \pm e_i \pm e_j, i < j.$$

Tutaj jest $\mathcal{S} = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n, e_n\}$, grupa Weyla zaś pokrywa się z grupą Coxetera B_n (permutacje wektorów e_i i zmiany znaków przed e_i).

- Układ C_n jest następujący

$$\pm 2e_i; \pm e_i \pm e_j,$$

a $\mathcal{S} = \{e_1 - e_2, \dots, e_{n-1} - e_n, 2e_n\}$. Tutaj grupa Weyla jest taka sama jak dla układu B_n .

- D_n : $\mathcal{R} = \{\pm e_i \pm e_j, i \neq j\}$, $\mathcal{S} = \{e_1 - e_2, \dots, e_{n-1} - e_n, e_{n-1} + e_n\}$. Grupa Weyla jest izomorficzna z grupą Coxetera D_n .

- Układ E_6 leży w $\mathbb{R}^6 = \{x \in \mathbb{R}^8 : x_6 = x_7 = -x_8\}$ i składa się z

$$\pm e_i \pm e_j, 1 \leq i < j \leq 5; \pm \frac{1}{2}(e_8 - e_7 - e_6 + \sum_1^5 \epsilon_i e_i), \epsilon_i = \pm 1, \prod \epsilon_i = 1.$$

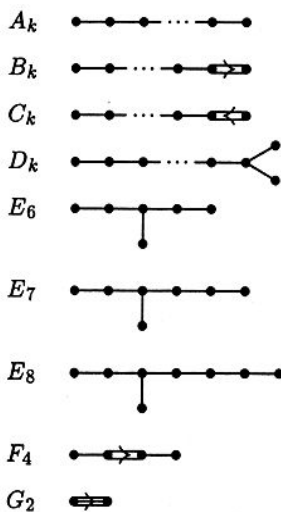
- E_7 leży w przestrzeni $\mathbb{R}^7 = \{x \in \mathbb{R}^8 : x_7 = -x_8\}$ i składa się z wektorów

$$\pm e_i \pm e_j, 1 \leq i < j \leq 6; \pm (e_7 - e_9) \pm \frac{1}{2}(e_7 - e_8 + \sum_1^6 \epsilon_i e_i), \prod \epsilon_i = -1.$$

- E_8 : $\pm e_i \pm e_j, 1 \leq i < j \leq 8; \frac{1}{2} \sum \epsilon_i e_i, \prod \epsilon_i = 1$.

- F_4 : $\pm e_i; \pm e_i \pm e_j, 1 \leq i < j \leq 4; \frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)$.

- Układ G_2 jest przedstawiony na rysunku 7 i ma grupę Weyla izomorficzną z grupą Coxetera $I_2(6)$; (dlatego też nie ma grafu G_2 na rysunku 6).



Rys. 8

4. Algebra liniowa i półproste algebry Liego

Okazuje się, że układ pierwiastków A_n rządzi naszą uniwersytecką algebrą liniową.

Rozważmy przestrzeń \mathfrak{g} zespolonych macierzy wymiaru $(n+1) \times (n+1)$ o zerowym śladzie, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C}) = \{A : \text{Tr } A = \sum a_{ii} = 0\}$. Jest to algebra Liego ze względu na komutator $[A, B] = AB - BA$ (bo $\text{Tr } AB = \text{Tr } BA$). Ta algebra posiada podalgebrę złożoną z macierzy diagonalnych, $\mathfrak{h} = \{\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) : \sum \lambda_i = 0\}$. Jest to *abelowa* podalgebra, tzn. $[A, B] = 0$ dla $A, B \in \mathfrak{h}$.

Zobaczmy jak wygląda komutator macierzy diagonalnej $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ i dowolnej macierzy $A = (a_{ij})$. Mnożenie przez Λ z lewej strony oznacza, że wiersze A są mnożone przez liczby λ_i , mnożenie zaś z prawej strony oznacza mnożenie kolumn przez λ_j . Dla macierzy $B = [\Lambda, A] = (b_{ij})$ dostajemy następujące wyrażenie

$$b_{ij} = (\lambda_i - \lambda_j)a_{ij}.$$

To oznacza, że następujące operatory liniowe $ad_\Lambda : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, $ad_\Lambda A = [\Lambda, A]$ mają wspólny rozkład na własne podprzestrzenie: na n -wymiarową zerową przestrzeń \mathfrak{h} i na 1-wymiarowe podprzestrzenie własne

$$\mathfrak{g}^{ij} = \mathbb{C} \cdot E_{ij},$$

gdzie E_{ij} jest macierzą z 1 na przecięciu i -tego wiersza i j -tej kolumny i z zerami na pozostałych miejscach.

Wartości własne $\lambda_i - \lambda_j$ operatorów ad_Λ są funkcjami liniowymi na przestrzeni \mathfrak{h} , czyli elementami przestrzeni dualnej \mathfrak{h}^* . Jeśli zdefiniujemy wektory e_i przestrzeni \mathfrak{h}^* jako $e_i(\Lambda) = \lambda_i$, to dostajemy układ wektorów $\{e_i - e_j, i \neq j\} \subset \mathfrak{h}^* \setminus 0$. Oczywiście Czytelnik rozpoznaje układ pierwiastków A_n w $\mathbb{R}^n \simeq \mathfrak{h}^*$.

Powyzsza obserwacja nie jest przypadkiem; okazuje się być przykładem zastosowania ogólnej teorii zespolonych półprostych algebr Liego.

Definicja. Algebra Liego \mathfrak{g} jest *prosta*, jeśli nie jest abelowa i nie posiada właściwych (t.j. $\neq 0, \mathfrak{g}$) ideałów; (przyjmujemy, że $\mathfrak{j} \subset \mathfrak{g}$ spełnia $[\mathfrak{j}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{j}$, *abelowość* zaś oznacza $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$). Odpowiada to prostocie odpowiedniej grupy Liego G (dla której $\mathfrak{g} = T_e G$), tzn. nieistnieniu właściwych dzielników normalnych; (ideałowi $\mathfrak{j} \subset \mathfrak{g}$ odpowiada dzielnik normalny $J = \exp \mathfrak{j} \subset G$, a każda abelowa grupa Liego dodatniego wymiaru ma dzielniki normalne). Algebra Liego \mathfrak{g} jest *półprosta*, jeśli jest sumą prostą prostych algebr Liego; inaczej, \mathfrak{g} jest półprosta, jeśli nie zawiera abelowych ideałów.

Na przykład, algebra $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ wszystkich $n \times n$ -macierzy nie jest półprosta, bo jej centrum $\mathbb{C} \cdot I$ jest abelowym ideałem; (na *centrum* składają się elementy komutujące ze wszystkim). Algebra $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ jest przykładem tzw. *reduktywnej* algebry Liego. Podobnie nie są półproste algebry górno-trójkątnych macierzy i ściśle górno-trójkątnych macierzy (t.j. z zerami na diagonalu). Pierwsza jest przykładem tzw. *rozwiązalnej* algebry Liego, a druga *nilpotentnej* algebry Liego.

Okazuje się, że każda półprosta algebra Liego \mathfrak{g} zawiera pewną maksymalną abelową podalgebrę (nie ideał) \mathfrak{h} nazywaną *podalgebrą Cartana*; (tutaj maksymalność jest rozumiana w sensie porządku zawierania). Można zdefiniować \mathfrak{h} jako $\{y : ad_x y = [x, y] = 0\}$ dla typowo wybranego elementu $x \in \mathfrak{g}$. Na przykład, w algebrze $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$ za x można wybrać macierz z różnymi wartościami własnymi; wtedy macierze y komutujące z x mają ten sam rozkład na podprzestrzenie własne co i x

$$xv_i = \lambda_i v_i \Rightarrow x(yv_i) = y(xv_i) = \lambda_i(yv_i) \Rightarrow yv_i = \text{const} \cdot v_i.$$

Operatory $ad_h : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, $h \in \mathfrak{h}$ komutują i dzięki temu mają wspólny rozkład na podprzestrzenie własne. Wartości własne α tych operatorów są elementami przestrzeni sprzężonej \mathfrak{h}^* . Okazuje się, że:

układ złożony z niezerowych takich funkcjonatów jest układem pierwiastków, przy tym zredukowanym.

Wiemy, że istnieje klasyfikacja układów pierwiastków. Na jej podstawie dokonano klasyfikacji zespolonych (pół)prostych algebr Liego. Pokrywa się ona z klasyfikacją z rysunku 7. (Istnieje również klasyfikacja rzeczywistych (pół)prostych algebr Liego.)

Przykład. Algebra Liego D_n . Jest to $o(2n, \mathbb{C})$, czyli algebra Liego grupy $O(2n, \mathbb{C})$ zespolonych macierzy $2n \times 2n$ zachowujących pewną niezdegenerowaną formę kwadratową (zespolony odpowiednik algebry Liego grupy ortogonalnej). Ponieważ nad ciałem \mathbb{C} wszystkie formy kwadratowe są takie same, więc możemy ją wybrać w postaci $(\cdot, J\cdot)$, gdzie $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ (w rozbiściu na

n -wymiarowe bloki). Wtedy $o(2n, \mathbb{C})$ składa się z macierzy postaci $\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & U \end{pmatrix}$ takich, że $U = -X^T$, $Y = -Y^T$, $Z = -Z^T$. Podalgebra Cartana jest równa $\mathfrak{h} = \{\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n, -\lambda_1, \dots, -\lambda_n)\}$. Pierwiastki i odpowiednie wektory własne są następujące: $\lambda_i - \lambda_j$, $\begin{pmatrix} E_{ij} & 0 \\ 0 & E_{ji} \end{pmatrix}$; $\lambda_i + \lambda_j$, $\begin{pmatrix} 0 & E_{ij} - E_{ji} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $-\lambda_i - \lambda_j$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{ij} - E_{ji} & 0 \end{pmatrix}$.

Algebra Liego B_n jest równa $o(2n+1, \mathbb{C})$, algebra zaś C_n jest równa $sp(2n, \mathbb{C})$ (macierzy $2n \times 2n$ zachowujących formę symplektyczną). Często zamiast oznaczenia $o(k, \mathbb{C})$ (ortogonalna) używa się oznaczenia $so(k, \mathbb{C})$ (specjalna ortogonalna) dla podkreślenia faktu, że macierze są bezśladowe (bo $A^T J + J A = 0$).

Trudno oprzeć się następującemu pytaniu. Czy inne serie algebr Liego B_n , C_n , D_n są tylko szczególnymi obiektami w klasycznej algebrze liniowej, czy też same stanowią niezależne algebry liniowe?

Literatura

- M. Berger, *Géométrie*, CEDIC/FERNAND NATHAN, Paris, 1978.
 N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, v. XXXIV, Hermann, Paris, 1968; v. XXXVIII, Hermann, Paris, 1975.
 J. E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge Studies in Adv. Math, v. 29, Cambridge Un-ty Press, Cambridge, 1990.
 F. Klein, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik in 19. Jahrhundert*, Teil 1, (bearbeitet vor R. Courant und O. Neugebauer), Verlag von Julius Springer, Berlin, 1926.
 J.-P. Serre, *Algèbres de Lie semi-simples complexes*, W. A. Benjamin, New York, 1968.
 E. B. Vinberg i A. L. Onišcik, *Seminar po gruppam Li i algebraičeskim gruppam*, Nauka, Moskwa, 1988.
 H. Żołądek, *The monodromy group*, (w przygotowaniu).