

## Skąd to się wzięło?

Zbigniew MARCINIAK, Warszawa

Matematyka wzięła się ze zmagania z rzeczywistością pozamatematyczną. Spróbujemy tę tezę zilustrować na przykładzie bardzo starej i poglądowej dyscypliny matematyki, jaką jest geometria.

Ludzi od niepamiętnych czasów fascynuje przestrzeń. Już Starożytni dostrzegli, że panuje w niej ład, który da się sprowadzić do niewielkiej liczby niemal oczywistych zasad. W swoich *Elementach* Euklides formułuje te najprostsze zasady, a następnie wywodzi z nich praktycznie całą ówczesną wiedzę ma temat geometrii przestrzeni, w której żyje.

Przez ponad dwa tysiąclecia opis przestrzeni pochodzący od Euklidesa był całkowicie zadowalający. Mimo systematycznego rozwoju nowych technik (wynałazek współrzędnych, metody rzutowe, geometria różniczkowa itd.) geometryczna wizja naszej przestrzeni pozostawała praktycznie nie zmieniona niemal do końca XIX wieku. Używając współczesnego języka, żyliśmy w tamtych czasach w przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ , wyposażonej w kartezjańską odległość

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i - y_i)^2}.$$

\* \* \*

Sformułowana przez Einsteina na początku XX wieku ogólna teoria względności doprowadziła do radykalnej zmiany w pojmowaniu przestrzeni fizycznej w skali kosmicznej, a w konsekwencji – do rewolucji w geometrii. Nowa geometria musiała sobie poradzić z nowymi faktami fizycznymi: otaczająca nas przestrzeń nie jest sztywna i wszędzie jednakowa, lecz „ugina się” pod ciężarem pojawiających się w niej gdzieś tam wielkich mas, a w dodatku bez przerwy rozciąga się jak powierzchnia balonu, który nadmuchujemy powietrzem.

Adekwatnym modelem przestrzeni stała się trójwymiarowa rozmaitość gładka  $M^3$ , tj. przestrzeń topologiczna która wygląda jak przestrzeń  $\mathbb{R}^3$  tylko lokalnie, w niedużym otoczeniu każdego punktu. Te nieduże otoczenia nazywamy mapami. W obrębie każdej mapy mamy współrzędne i możemy uprawiać klasyczną geometrię i mechanikę: badać tory pocisków, wyznaczać ich prędkości itd. Gładkość rozmaitości gwarantuje, że nie wystąpi sprzeczność, gdy pocisk przeleci z jednej mapy do drugiej.

Odległość w takiej przestrzeni nie może być określona jednym wzorem, takim jak na przykład  $\rho(x, y)$ , gdyż współrzędne punktu  $(x_1, x_2, x_3)$  mają charakter lokalny. Ten kłopot obchodzimy, wprowadzając na rozmaitości  $M^3$  tzw. metrykę Riemanna. Jest to funkcja  $g$ , która każdemu wektorowi stycznym  $\vec{v}$  przypisuje pewną liczbę nieujemną  $\|\vec{v}\|$ , zwaną jego długością. Funkcja  $g$  ma być gładka w następującym sensie: dla dowolnej krzywej gładkiej  $\gamma: (a; b) \rightarrow M^3$  funkcja  $t \mapsto \gamma(t) \mapsto \|\gamma'(t)\|$  też ma być gładka. Wykorzystując rachunek różniczkowy i całkowy można teraz łatwo określić długość dowolnej krzywej  $\gamma(t)$  wzorem

$$|\gamma| = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt,$$

a odległość między punktami  $x, y \in M^3$  wyrazić liczbą

$$\rho(x, y) = \inf\{|\gamma| : \text{krzywa } \gamma \text{ łączy punkty } x \text{ i } y\}.$$

W tak otrzymanej przestrzeni można uprawiać geometrię, która w codziennej skali sprowadza się do teorii opisanej przez Euklidesa. Podstawowe pojęcia klasycznej geometrii mają sens w naszkicowanej wyżej geometrii riemannowskiej  $(M^3, g)$ , choć czasem występują pod inną nazwą. Na przykład odpowiednikami prostych Euklidesa są linie geodezyjne. Pojawiło się także wiele nowych obiektów opisujących globalne własności przestrzeni, na przykład formy różniczkowe,

tensory, koneksje, klasy charakterystyczne itd., które niemal całkowicie pochłonęły uwagę dwudziestowiecznych geometrów.

Z całą wyrozumiałością dla nostalgicznej tęsknoty niektórych swoich przedstawicieli za elegancją syntetycznej geometrii trójkątów i okręgów, społeczność matematyczna uznała wspomnianą wyżej rewolucję w geometrii za uzasadnioną lepszym zrozumieniem otaczającej nas przestrzeni i dlatego w pełni ją zaakceptowała.

\* \* \*

Od połowy lat osiemdziesiątych zachodzi w geometrii kolejna rewolucja: miejsce klasycznej już geometrii riemannowskiej zaczyna zajmować tzw. geometria nieprzemiana.

Źródło tej nowej geometrii jest tej samej natury co źródło geometrii riemannowskiej: korekta naiwnej ekstrapolacji. W zakresie odległości w jakich rozgrywa się nasze codzienne życie, najbliższa przestrzeń zdaje się być trójwymiarowym obszarem, tj. podzbiorem  $\mathbb{R}^3$ . Przechodząc z horyzontem wszechświata do nieskończoności, naturalne wydaje się założenie, że cała przestrzeń to trójwymiarowa przestrzeń kartezjańska. Nie znajduje to jednak potwierdzenia w danych doświadczalnych (ugięcie promieni światła w sąsiedztwie wielkich mas) i zmusza nas do rozważania ogólniejszego modelu – rozmaitości  $(M^3, g)$ .

Podobny problem napotykamy, gdy zmierzamy w kierunku mikroświata. Geometria Euklidesa zakłada, że najmniejszą, graniczną figurą jest bezwymiarowy punkt, zaś każdy obiekt fizyczny, choćby najmniejszy, jest bryłą. Ten pogląd też nie wytrzymuje konfrontacji z doświadczeniem. Rozważmy bowiem atom wodoru, którego rozmiar jest rzędu  $10^{-10}$  metra. Składa się on z 10 tysięcy razy mniejszego jądra oraz jednego maleńkiego elektronu. Ponieważ jądro ma ładunek dodatni, a elektron ujemny, to ich wzajemne przyciąganie winna równoważyć jakaś siła, chroniąca atom przed zapaścią.

Znamy pary brył, które przyciągają się wzajemnie, lecz na siebie natychmiast nie spadają, na przykład Ziemia i Księżyc albo Słońce i Ziemia. Powstrzymuje je przed tym siła odśrodkowa, wywołana ruchem jednej z tych brył wokół drugiej.

Jednakże przypuszczenie, że (szybki) ruch obiegowy elektronu chroni go przed upadkiem na jądro prowadzi do sprzeczności z prawami fizyki. Wiemy bowiem, że ładunek elektryczny poruszający się w przestrzeni ruchem krzywoliniowym emituje promieniowanie, przez co traci część swojej energii. W konsekwencji, elektron powinien spaść na jądro po mniej więcej  $10^{-11}$  sekundy, co oczywiście nie ma miejsca.

Dokładniejsze przyjrzenie się atomowi wodoru prowadzi do dalszych paradoksów. Z punktu widzenia klasycznej mechaniki, rozgrywającej się w przestrzeni Euklidesa (lub przestrzeni  $M^3$  – ze względu na małą skalę to rozróżnienie nie ma znaczenia) energia elektronu powinna w pewnym zakresie zmieniać się w sposób ciągły, w zależności od ciągłej zmiany odległości elektron–jądro. Tymczasem energia elektronu przyjmuje tylko niektóre, dyskretne wartości. Można to zaobserwować, gdy przez szklaną rurkę napełnioną wodorem przepuścimy światło, które następnie przepuścimy przez pryzmat. Na ekranie umieszczonym za pryzmatem ujrzymy charakterystyczny układ linii – widmo atomu wodoru. Jest to jego unikalny „podpis chemiczny”; każdy pierwiastek chemiczny ma swój indywidualny układ takich linii.

W roku 1885 szwajcarski nauczyciel fizyki Balmer z wielką dokładnością zmierzył długości fal światła, odpowiadające kreskom widma wodoru. Otrzymał następujące wyniki:

0,000065628 cm, 0,0000486080 cm, 0,000043400 cm, 0,0000410130 cm,...

Człowiek mniej dociekliwy być może by na tym poprzestał, ale Balmer zrobił coś jeszcze: zbadał wzajemne stosunki tych niepozornych liczb i gdy podstawił

$L = 3645,6 \times 10^{-8}$  cm, otrzymał ciąg

$$\frac{9}{5}L, \frac{16}{12}L, \frac{25}{21}L, \frac{36}{32}L, \dots$$

Inaczej mówiąc, długości fal odpowiadające kreskom na widmie wodoru można wyrazić wzorem

$$\lambda = \frac{n^2}{n^2 - 4}L, \text{ gdzie } n = 3, 4, 5, 6, \dots$$

Biorąc odwrotność tego wyrażenia, otrzymujemy wzór na częstotliwość

$$\nu = \frac{1}{\lambda} = \frac{n^2 - 4}{n^2} \cdot \frac{1}{L} = \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) R,$$

gdzie  $R = \frac{4}{L}$  jest tzw. stałą Rydberga.

Właśnie Rydberg około roku 1890 wykazał, że powyższy wzór jest uniwersalny: widmo dowolnego atomu ma kreski odpowiadające częstotliwościom określonym wzorem

$$\nu = \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) R,$$

dla pewnych liczb naturalnych  $n, m$ . Z tego wzoru i z obserwacji wynika, że tylko niektóre pary częstotliwości można dodać by otrzymać częstotliwość też występującą w widmie – jest to tzw. reguła kombinacji. Tymczasem z klasycznej teorii wynikało, że obserwowane częstotliwości powinny tworzyć grupę przemianą, tj. każde dwie częstotliwości po dodaniu powinny dać trzecią.

Heisenberg był pierwszym uczonym który zauważył, że tajemnicza reguła kombinacji zachowuje się dokładnie tak, jak pewna algebra nieprzemienne. Rozważmy częstotliwości postaci  $\nu_i = \frac{R}{i^2}$  występujące we wzorze, gdzie  $i$  przebiega pewien skończony zbiór liczb  $I$ . Wtedy częstotliwości kresk są postaci  $\nu_{ij} = \nu_i - \nu_j$ , tj. można je poindeksować zbiorem  $\Delta = \{(i, j) : i, j \in I\}$ . Częstotliwości  $\nu_{ij}, \nu_{kl}$  można dodać tylko wtedy, gdy  $j = k$ . Otrzymujemy wtedy  $\nu_{il} = \nu_{ij} + \nu_{jl}$ . Mamy zatem w zbiorze  $\Delta$  działanie określone wzorem

$$(i, j) \cdot (k, l) = \begin{cases} (i, l) & \text{gdy } j = k, \\ 0 & \text{gdy } j \neq k. \end{cases}$$

Heisenberg zauważył, że jest to dokładnie reguła mnożenia zero-jedynkowych macierzy  $n \times n$ , tj. takich, które mają jedynkę na jednym miejscu, a na pozostałych zera. Zatem adekwatnym opisem widma atomu jest nieprzemienne algebra macierzy  $M_n(\mathbb{C})$ , gdzie  $n = |I|$ . Wykorzystując tę algebrę Heisenberg był w stanie objaśnić nie tylko częstotliwości kresk obserwowane w widmie atomu, ale także ich intensywności. W ten sposób w teorii przestrzeni pojawiła się algebra nieprzemienne.

Od dawna wiadomo, że z każdą przestrzenią topologiczną  $X$  związana jest w naturalny sposób pewna algebra przemienne. Jest to algebra  $C(X)$  funkcji ciągłych na  $X$  o wartościach rzeczywistych. Jeśli przestrzenie  $X, Y$  są topologicznie takie same (homeomorficzne), to ich algebry są izomorficzne. Homeomorfizm  $h: X \rightarrow Y$  zadaje bowiem izomorfizm pierścieni  $h^*: C(Y) \rightarrow C(X)$  określony wzorem  $h^*(f) = f \circ h$ .

Znacznie ciekawsze zjawisko zachodzi, gdy obie przestrzenie  $X, Y$  są zwarte. Wtedy z istnienia izomorfizmu pierścieni funkcji ciągłych wynika, że  $X$  jest homeomorficzna z  $Y$ ! Przekonajmy się, dlaczego tak jest.

Niech  $\phi: C(X) \rightarrow C(Y)$  będzie zadany izomorfizmem pierścieni. Korzystając tylko z algebraicznych własności pierścieni powinniśmy zbudować homeomorfizm  $u: X \rightarrow Y$ .

Wykorzystamy pojęcie ideału w pierścieniu. Przypomnijmy, że jest to podzbiór pierścienia  $I \subset R$  zamknięty na dodawanie i odejmowanie, który jest „pułapką” ze względu na mnożenie: jeśli  $x \in I$  oraz  $r \in R$ , to  $rx \in I$ . Ideał  $I \subseteq R$  nazywamy maksymalnym, jeśli jest podzbiorem właściwym oraz nie jest istotnie zawarty w żadnym większym ideale właściwym.

Przykładem ideału w pierścieniu liczb całkowitych jest zbiór liczb parzystych. Przykładem ideału w pierścieniu  $C(X)$  jest zbiór  $I_x$  wszystkich funkcji zerujących się w ustalonym punkcie  $x \in X$ .

Niech przestrzeń  $X$  będzie zwarta. Wykażemy, że każdy właściwy ideał pierścienia  $C(X)$  jest zawarty w pewnym ideale postaci  $I_x$ . Gdyby to nie było prawdą, to dla pewnego ideału  $J \neq C(X)$  mielibyśmy w każdym punkcie  $x \in X$  funkcję  $f_x \in J$ , która spełnia  $f_x(x) \neq 0$ . Wtedy także  $f_x \neq 0$  na pewnym otwartym otoczeniu  $U_x$  punktu  $x$ . Z pokrycia  $\{U_x\}_{x \in X}$  można wybrać skończone podpokrycie (zwartość!):

$$X = U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}.$$

Wtedy funkcja

$$f = f_{x_1}^2 + \dots + f_{x_n}^2$$

należy do ideału  $J$  i nigdzie nie znika. Wtedy także  $1 = f \cdot \frac{1}{f} \in J$ , bo  $J$  jest „pułapką” ze względu na mnożenie. Z tego samego powodu dowolna funkcja ciągła  $g = 1 \cdot g$  należy do  $J$ , czyli  $J = C(X)$  – sprzeczność.

Oczywiście izomorfizm pierścieni  $\phi: C(X) \rightarrow C(Y)$  przenosi ideały maksymalne na ideały maksymalne. Określmy zatem funkcję  $u: X \rightarrow Y$  wzorem  $u(x) = y$ , gdy  $\phi(I_x) = I_y$ . Nietrudno sprawdzić, że  $u$  jest szukanym homeomorfizmem.

Udowodniliśmy właśnie, że algebra pierścienia funkcji ciągłych  $C(X)$  koduje w sobie całą informację o topologii przestrzeni  $X$ .

\* \* \*

Dalej wygodniej nam będzie posługiwać się liczbami zespolonymi. Niech zatem  $C(X)$  oznacza od tej chwili pierścień funkcji ciągłych, określonych na przestrzeni zwartej  $X$ , o wartościach zespolonych:  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ . Zauważmy, że  $C(X)$  jest teraz przestrzenią liniową nad ciałem  $\mathbb{C}$ , wyposażoną w normę supremum:

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|,$$

względem której jest zupełna. Ponadto mamy operację  $*$ :  $C(X) \rightarrow C(X)$ , polegającą na sprzęganiu zespolonym:

$$f^*(x) = \overline{f(x)}.$$

Wyodrębnijmy podstawowe związki pomiędzy mnożeniem, normą i gwiazdką, zachodzące w  $C(X)$ , w formie aksjomatów. Mamy zatem do czynienia ze zbiorem  $A$ , który

- a) jest przestrzenią liniową z normą  $\|\cdot\|$ , względem której jest zupełny;
- b) ma dwuliniowe mnożenie, względem którego jest pierścieniem łącznym;
- c) ma involucję  $*$ :  $A \rightarrow A$ , spełniającą warunki

$$(a^*)^* = a, \quad (a + b)^* = a^* + b^*, \quad (\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*, \quad (ab)^* = b^* a^*.$$

- d) spełnia warunek

$$\|a^* a\| = \|a\|^2$$

dla dowolnych  $a, b \in A$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

Zbiór spełniający warunki a)–d) nazywamy  $C^*$ -algebrą. Taka algebra jest przemienna, jeśli dla dowolnych  $a, b \in A$  zachodzi równość  $ab = ba$ . Oczywiście algebry funkcji ciągłych  $C(X)$  są przemienne. Przykładami nieprzemiennych  $C^*$ -algebr są algebra macierzy  $M_n(\mathbb{C})$  lub ogólniej, algebra  $B(\mathcal{H})$  operatorów ciągłych na przestrzeni Hilberta.

W rzeczywistości poznaliśmy już wszystkie przemienne  $C^*$ -algebry, gdyż mamy

**Twierdzenie Gelfanda–Najmarka.** *Każda przemienna  $C^*$ -algebra z 1 jest postaci  $C(X)$  dla pewnej przestrzeni zwartej  $X$ .*

Co więcej, istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między kategorią przestrzeni topologicznych zwartych a kategorią przemiennych  $C^*$ -algebr z jedynką.

Druga część twierdzenia oznacza, że wszystko to, co możemy powiedzieć o przestrzeniach topologicznych zwartych i przekształceniach ciągłych między nimi, potrafimy jednoznacznie przetłumaczyć na język algebry.

\* \* \*

Jaki jest pożytek z powyższego utożsamienia topologii z algebrą? Otóż otrzymujemy szansę na uprawianie geometrii nieprzemiennej. Postąpimy bowiem podobnie jak wtedy, gdy chcemy uprawiać geometrię w przestrzeniach wymiaru wyższego niż trzy. Przypomnijmy – robimy to tak: w dobrze nam znanej przestrzeni trójwymiarowej wprowadzamy układ współrzędnych, utożsamiając ją z obiektem algebraicznym: zbiorem  $\mathbb{R}^3$  trójek  $(x_1, x_2, x_3)$  liczb rzeczywistych. Następnie odrzucamy założenie, że współrzędne są tylko trzy i otrzymujemy ogólniejszy obiekt algebraiczny  $\mathbb{R}^n$ , w którym wprowadzamy pojęcia geometryczne przez analogię z  $\mathbb{R}^3$ .

Analogicznie, w geometrii nieprzemiennej zastępujemy przestrzeń  $X$  przez  $C^*$ -algebrę przemienną, a następnie odrzucamy założenie przemienności. Ogólniejsze, „nieprzemienne” przestrzenie to hipotetyczne obiekty, których algebry funkcji ciągłych są nieprzemienne. Istnieją (albo nie istnieją) one w takim samym sensie, w jakim istnieje (lub nie – rzecz gustu) przestrzeń czterowymiarowa.

\* \* \*

Tworzenie geometrii nieprzemiennej polega na budowaniu słowniczka, który każde pojęcie topologiczne tłumaczy na język  $C^*$ -algebr. To jest możliwe, na mocy twierdzenia Gelfanda–Najmarka. Sztuka polega jednak na tym, by po stronie algebraicznej nie użyć ani razu przemienności algebry. Wtedy dane pojęcie topologiczne będzie funkcjonowało także w przestrzeniach nieprzemiennych, które zdają się lepiej opisywać mikroświat.

Na przykład spójność przestrzeni odpowiada warunkowi, że w algebrze  $A$  jedyne projekcje, tj. elementy  $a \in A$  spełniające warunki  $a = a^* = a^2$ , to 0 i 1.

\* \* \*

Oczywiście do uprawiania geometrii (i fizyki) sama topologia nie wystarczy. Musimy się jeszcze nauczyć, jak w przestrzeniach nieprzemiennych wprowadzać odległość, rachunek różniczkowy i całkowy, teorię miary, formy różniczkowe, homologie itd. To wszystko można zrobić, ale to temat na inny odczyt.