List do Redakcji

W jednej z przerw między wykładami na konferencji „Kultura w matematyce" (Grzegorzewice, 30.I–3.II 1998) wyrażono zdecydowany pogląd, że używanie zwrotu „wtedy i tylko wtedy" jest w matematyce [niewłaściwe]. Tak streszczono w *M-S-N* 21(VII 1998) w artykule „Matematyka w salonach" słowa niżej podpisanego. Końcowe słowo w streszczeniu było inne, miało wydźwięk inwektywy i niżej podpisany go nie użył. Powiedział jedynie mniej więcej tyle, że „wtedy i tylko wtedy" jest zwrotem mylącym, odwracającym uwagę od istoty rzeczy, będąc wyrazem przerostu strony formalnej. Jako „zwolennik tego poglądu" argumentowałem za nim przede wszystkim tym, że zazwyczaj jedna z implikacji z pary tworzącej „wtedy i tylko wtedy" bywa trywialna i zwrot „wtedy i tylko wtedy" zrównuje ją rangą z nietrywialnym twierdzeniem, jakim może być przeciwna do niej implikacja. Żelaznym przykładem jest twierdzenie Tichonowa o zwartości produktu przestrzeni zwartych, którego odwrócenie jest trywialne.

⋆ ⋆ ⋆

Ważniejszym argumentem przeciwko WKW – tak skracają nazwę tego zjawiska studenci, którzy nie chcą nazywać go warunkiem koniecznym i wystarczającym – jest to, że osłabia on dynamikę wywodu. Czy, dowodząc hipotezy – z myślą, iż będzie ona adekwatna do założeń – musimy sprawdzać, że każdy krok rozumowania jest odwracalny, wykonując w ten sposób podwójną pracę? Pytanie o twierdzenia odwrotne pojawia się nie z formalnej potrzeby skompletowania pary, mając zazwyczaj własną motywację, często bardzo dyskretną, jak np. twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa, nie tak sławne, ale pozwalające konstruować kąt prosty.

Dla matematyka ważne są nierówności – to w arytmetycznej jej części – oraz zawierania – to w geometrii i teorii mnogości. Przekładają się one w rozumowaniach na wynikania. Chcemy, żeby były one ostre. Ale nierówności między średnią geometryczną i średnią arytmetyczną nie nadajemy formy twierdzenia:

$$\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} \quad \textit{dla } a \textit{ i } b \textit{ dodatnich wtedy i tylko wtedy, gdy } a \neq b,$$

mimo że moglibyśmy to zrobić po sprawdzeniu ostrości oszacowania.

Wejdźmy wszakże w rejony mniej przedeptane.

Kiedy pytano Eulera o mosty królewieckie, to odpowiedział, że jeśliby je można było przejść idąc raz jeden po każdym, to wysp o nieparzystej liczbie wychodzących z nich mostów powinno być dwie lub nie powinno być ich wcale. To było to, co Eulera i pytających obchodziło. W sto lat później zauważono, że Euler zapomniał o twierdzeniu odwrotnym. Mimo że dowód tego twierdzenia odwrotnego jest trudniejszy niż dowód twierdzenia, które dał Euler, to jedynie historycy matematyki znają nazwisko autora tego trudnego dowodu. Twierdzenie Eulera było odkrywcze, a twierdzenie doń odwrotne było typowym dziewiętnastowiecznym twierdzeniem o istnieniu – w tym przypadku o istnieniu drogi unikursalnej po odpowiednim grafie.

Jest w topologii mnogościowej twierdzenie, które głosi, że przestrzeń topologiczna jest metryzowalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest normalna i ma bazę σ-lokalnie skończoną – przypadek Nagaty i Smirnowa – lub bazę σ-dyskretną – przypadek Binga. Wypowiadając w ten sposób to twierdzenie – akcentując, że jest to twierdzenie metryzacyjne – pozostawia się w cieniu nazwisko A.H. Stone'a, który wcześniej dowiódł, że przestrzenie metryczne mają tego rodzaju bazy (ich istnienie implikuje parazwartość przestrzeni metrycznych, co jest bardziej wszystkim znane). Dowody Stone'a są wysoce nietrywialne, o czym świadczy pojawienie się później „drugich dowodów", dając początek nowej metodzie związanej z tzw. rozkładami jedności. Dowód twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Stone'a, tj. dowód właściwego twierdzenia metryzacyjnego, polega na budowaniu wzoru na metrykę, do czego wykorzystuje się funkcje Urysohna dla par $\overline{U} \subset V$ dla zbiorów z odpowiednich pokryć i ich zwężeń, co pozwala ulokować przestrzeń w odpowiednim produkcie metrycznym. Niezależnie od pojawiających się i tu trudności dowodowych, nierównorzędność twierdzeń tego WKW jest mniej więcej taka, jak w przypadku mostów królewieckich: dopiero twierdzenie Stone'a umożliwiło wypowiedzenie twierdzeń metryzacyjnych – jako hipotez – w tej formie.

Przechodząc do matematyki szczebla szkolnego, niżej podpisany przypomina sobie egzamin wstępny, na którym egzaminatorka polecała egzaminowanemu rozwiązującemu równanie $\sqrt{x-1} = 2 + \sqrt{x}$, aby na każdym kroku postępowania otrzymywał zadanie równoważne zadaniu z kroku poprzedniego. Była to tortura dla obserwującego ten spektakl. Wyrażone wcześniej obawy miały tu swoje wcielenie. Mogło też być inaczej. Na innym egzaminie z podobnym zadaniem – ale dodajmy, że był to egzamin pisemny i na politechnice – kandydat rozwiązywał równanie w zwyczajny dla siebie sposób, a więc przenosząc coś na drugą stronę, podnosząc obie strony do kwadratu etc. Jak głosi opowieść, kiedy był u końca obliczeń, zapytał poufnie dyżurującego asystenta: *czy trzeba sprawdzić?* Usłyszał odpowiedź: *jak pan ma czas, niech pan sprawdza.*

⋆ ⋆ ⋆

Autor „Matematyki w salonach" znał nazwisko dyskutanta „w jednej z przerw między wykładami", bo dyskutant nosił tabliczkę. Ale wolał użyć wielce rozpowszechnionego obecnie zwrotu postaci: „jeden z wiceministrów w resorcie transportu". Dyskutant – nazwany „zwolennikiem tego poglądu" rewanżuje się nie wymienieniem nazwiska autora artykułu. Czy to ładnie? Na pewno nie i nie jest to salon, chociaż nie jest to także jego przeciwieństwo. Jest to po prostu nijakie.

Jerzy MIODUSZEWSKI

Katowice, 30 sierpnia 1999 r.

Bardzo spodobała mi się propozycja rozpoczęcia dyskusji na temat sposobu mówienia i pisania matematyki, na temat problemu, czy i w niej potrzebny jest język giętki, który wyrazi wszystko, co pomyśli głowa, czy też raczej należy trzymać się możliwie najprostszego formalizmu, który ma przecież tę zaletę, że jest jednoznaczny aż do bólu. Dlatego też przekazałem tekst „zwolennika tego poglądu" autorowi „Matematyki w salonach" jeszcze przed wydrukowaniem kolejnego numeru M-S-N. Oto wynik.

Profesor Mioduszewski przytacza swoje racje na temat niewłaściwości zwrotu „wtedy i tylko wtedy". Ja jestem przywiązany do swoich, z których wynika coś przeciwnego: że jest to zwrot właściwy i godny używania. Jeśli Czytelnik jest zainteresowany moimi poglądami, może zajrzeć do *M-S-N* 21 i wyrobić sobie własne zdanie na ten temat, albo zmienić już posiadane – do czego i ja i na pewno profesor Mioduszewski oraz Redakcja zachęcają. Na szczęście spór nie jest matematyczny, a więc może nie być jednej prawdy. Francuzi jedzą rybę nożem.

Ja i profesor Mioduszewski mamy też różne zdania na temat, co jest ładnie, a co nie. Ja jestem prawie nie znany Czytelnikom *M-S-N*, profesor Mioduszewski jest bardziej znany tym, którzy czytują *M-S-N* regularnie albo są matematykami, ale chyba tylko tym. W tej sytuacji wymienianie nazwisk może sprawić wrażenie, że nie jest to dyskusja z poglądami, lecz spór personalny. Uważam, że bezosobowa forma była w tym przypadku lepsza.

Michał SZUREK

Warszawa, 1 września 1999 r.

Jak widać moja nadzieja się nie ziściła. Liczę jednak na jakieś głosy w tej sprawie Czytelników M-S-N.

Marek Kordos