Nie tylko o twierdzeniu Bezouta

Janusz KARKUT, Nowe Miasto Lubawskie

1. Program a podręcznik

Wśród celów kształcących nauczania matematyki w programie [1] wyróżnia się:
- rozwijanie aktywności umysłowej,
- kształcenie logicznego i twórczego myślenia,
- kształcenie umiejętności wnioskowania,
- kształtowanie umiejętności rozwiązywania problemów,
- uczenie ścisłego wyrażania myśli i poglądów

i inne.

Na podstawie tego programu został napisany podręcznik [2]. Nawet pobieżne porównanie tekstu tego podręcznika (Rozdział II, *Wielomiany i funkcje wymierne*) z celami kształcącymi nauczania matematyki i hasłami programowymi wzbudzić musi co najmniej niepokój: jak na podstawie takiego tekstu można wspomniane cele osiągnąć? Czy służyć ma temu np. tłumaczenie (na połowie strony), że przy dzieleniu z resztą zachodzi związek

$$dzielna = iloraz \cdot dzielnik + reszta\ ?$$

W artykule *Praktycznie o problemie niezdolności do studiowania* (*M-S-N* 23(VII 1999), str. 27) Marek Kordos pisze: *Dzielenie z resztą liczb naturalnych a przez b polega na znalezieniu takiej liczby naturalnej n, że* $nb \leq a < (n+1)b$ *– i to jest wynik dzielenia, a także takiej liczby naturalnej r, że* $a = nb + r$ *– i to jest reszta z dzielenia. Jak łatwo zauważyć, r jest jedną z liczb* $0, 1, 2, \ldots, b-1$. *Tak to wygląda w podstawówce.* Nic dodać, nic ująć.

Podręcznik [2] pomija zapisany z treściach uzupełniających schemat Hornera, a zamiast twierdzenia Bezouta podaje wniosek z niego wypływający.

Powyższe uwagi wypowiedziałem nie dlatego, by kogoś zniechęcić do korzystania z tego tekstu; uważam jednak, że za jego pomocą wypisanych w programie celów nie da się osiągnąć.

I jeszcze jedna uwaga. We wspomnianym już artykule Marek Kordos, zachęcając do pisania tekstów mogących proponować propedeutykę studiowania pisze tak: *Pisanie takich tekstów nie jest kopalnią złota (jak np. podręczników do podstawówki) i nie wiem, czy kiedykolwiek będzie.* Myślę, że gwoli sprawiedliwości w nawiasie powinny znaleźć się jeszcze trzy słowa: *lub szkoły ponadpodstawowej.*

2. Twierdzenie Hornera

Spróbujmy teraz w kolejnych krokach zbliżyć się do tytułowego twierdzenia, wypełniając niektóre hasła programu [1] nieco inną treścią, niż to zrobiono w podręczniku [2].

Rozwiązując równania wyższych stopni staramy się przedstawić ich lewą stronę w postaci iloczynowej, dlatego też umiejętność rozkładu wielomianu na czynniki jest bardzo ważna. Ćwiczymy więc tę umiejętność stosując różne metody. Początkowo jest to metoda wyłączania wspólnego czynnika poza nawias, którą z powodzeniem możemy zastosować np. do rozwiązania następujących równań:

a) $x^3 + 10x = 7x$,
b) $4x^3 - 2x^2 - 5x = 0$,
c) $x^4 - 12x^3 + 35x = 0$,
d) $x^2(x-3) = 2x(x-3)$,
e) $x^3 - 5x^2 + (x-5)^2 + 3x(x-5) = 0$,
f) $4(x^2+1)(x^2-1) - 17(x^2-1) = 0$.

Wszystkie te równania mogą być zapisane w postaci $f(x) = 0$, po rozłożeniu zaś na czynniki – w postaci $f(x) = g(x) \cdot h(x) = 0$. Aby je rozwiązać wystarczy już tylko skorzystać z równoważności $g(x) \cdot h(x) = 0 \iff [g(x) = 0 \vee h(x) = 0]$.

W wielu przypadkach posługujemy się też wzorami uproszczonego mnożenia, np. jeśli czynnikiem jest x^2-1, to piszemy $(x+1)(x-1)$, gdy zaś czynnikiem jest x^3-8, to napiszemy $(x-2)(x^2+2x+4)$. Pojawia się tutaj okazja do rozszerzenia tych wzorów. Pisząc

$$x^2 - y^2 =(x-y)(x+y),$$
$$x^3 - y^3 =(x-y)(x^2+2x+y^2),$$

mamy możliwość postawienia pytania o następne wzory

$$x^4 - y^4 =(x-y)(x^3+x^2y+\ldots),$$
$$x^3 - y^3 =(x-y)(\ldots),$$

które powinny skłonić do uogólnienia $x^n - y^n = \ldots$
Otrzymujemy w ten sposób

Twierdzenie Hornera. *Jeżeli $x, y \in \mathbf{R}$ i $n \in \mathbf{N}\setminus\{1\}$, to*
$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\ldots+x^2y^{n-3}+xy^{n-2}+y^{n-1}).$$

Istotnie, korzystając z prawa rozdzielności mnożenia względem dodawania, otrzymamy

$$\begin{aligned}
&(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\ldots+x^2y^{n-3}+xy^{n-2}+y^{n-1}) = \\
&\quad = x(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\ldots+x^2y^{n-3}+xy^{n-2}+y^{n-1}) - \\
&\quad\quad - y(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\ldots+x^2y^{n-3}+xy^{n-2}+y^{n-1}) = \\
&\quad = x^n+x^{n-1}y+x^{n-2}y^2+\ldots+x^3y^{n-3}+x^2y^{n-2}+xy^{n-1} - \\
&\quad\quad - x^{n-1}y-x^{n-2}y^2-x^{n-3}y^3-\ldots-x^2y^{n-2}-xy^{n-1}-y^n = x^n-y^n.
\end{aligned}$$

3. Schemat Ruffiniego

Przejdźmy teraz do dzielenia. Zdarza się, że interesujemy się tylko resztą z dzielenia danego wielomianu przez dwumian $x-a$. Samego dzielenia nie trzeba jednak wykonywać, gdyż zachodzi

Twierdzenie. *Reszta z dzielenia wielomianu $P(x)$ przez dwumian $x-a$ jest równa $P(a)$, tj. wartości liczbowej wielomianu dla $x=a$.*

Dowód. Oznaczając iloraz przez $Q(x)$, resztę zaś przez r, mamy

$$P(x) = (x-a)\cdot Q(x) + r.$$

Równość ta zachodzi dla każdej wartości x, a więc także dla $x=a$. Podstawiając po obu stronach $x=a$, otrzymujemy

$$P(a) = (a-a)\cdot Q(a) + r,$$

czyli $P(a)=r$, co kończy dowód.

Jeżeli chcemy znać nie tylko resztę, ale i iloraz z dzielenia danego wielomianu przez dwumian $x-a$, to także nie musimy wykonywać dzielenia. Wystarczy w tym celu posłużyć się schematem Ruffiniego, dla zilustrowania którego najlepiej posłużyć się przykładem. Załóżmy więc, że mamy wyznaczyć iloraz i resztę z dzielenia wielomianu $2x^4-7x^3+x^2-x+3$ przez dwumian $x-2$. Wykonujemy następujący schemat

	2	−7	1	−1	3	współczynniki wielomianu
2		4	−6	−10	−22	
	2	−3	−5	−11	−19	
	współczynniki ilorazu				reszta	

Mamy więc $2x^4-7x^3+x^2-x+3 = (x-2)(2x^3-3x^2-5x-11)-19$.

Jeśli chcemy podzielić wielomian $x^4-2x^2+15x-10$ przez $x+3=x-(-3)$, to schemat ten jest następujący

	1	0	−2	15	−10
−3		−3	9	−21	18
	1	−3	7	−6	8

Jest zatem $x^4-2x^2+15x-10 = (x+3)(x^3-3x^2+7x-6)+8$.

Zajmijmy się teraz podzielnością $x^n \pm a^n$ przez $x \pm a$.

1°. $(x^n - a^n) : (x - a)$. Reszta z tego dzielenia wynosi $r = a^n - a^n = 0$, zatem różnica $x^n - a^n$ dzieli się zawsze przez $x - a$.

2°. $(x^n - a^n) : (x + a)$. Ponieważ $x + a = x - (-a)$, więc resztą w tym przypadku jest $r = (-a)^n - a^n$. Jeśli więc n będzie liczbą parzystą, to $(-a)^n = a^n$ i $r = 0$; jeżeli zaś n będzie liczbą nieparzystą, to $(-a)^n = -a^n$ i $r = 2a^n \neq 0$. Zatem różnica $x^n - a^n$ dzieli się przez $x + a$ tylko wtedy, gdy n jest liczbą parzystą.
Zastosujmy schemat Ruffiniego do znalezienia ilorazu $x^6 - a^6$ przez $x + a$.

	1	0	0	0	0	0	$-a^6$
$-a$		$-a$	a^2	$-a^3$	a^4	$-a^5$	a^6
	1	$-a$	a^2	$-a^3$	a^4	$-a^5$	0

Jest zatem $x^6 - a^6 = (x + a)(x^5 - ax^4 + a^2x^3 - a^3x^2 + a^4x - a^5)$.
Ogólnie: ilorazem $x^n - a^n$ przez $x + a$, gdy n jest liczbą parzystą, jest wielomian jednorodny stopnia $n - 1$ uporządkowany malejąco ze względu na x, rosnąco ze względu na a, o współczynnikach na przemian 1 i -1.

3°. $(x^n + a^n) : (x + a)$. Resztą jest $r = (-a)^n + a^n$. Jeżeli więc n jest liczbą parzystą, to $r = 2a^n \neq 0$, jeżeli zaś jest liczbą nieparzystą, to $r = 0$, czyli w tym przypadku $x^n + a^n$ dzieli się przez $x + a$.
Zastosujmy schemat Ruffiniego do znalezienia ilorazu $x^5 + a^5$ przez $x + a$.

	1	0	0	0	0	a^5
$-a$		$-a$	a^2	$-a^3$	a^4	$-a^5$
	1	$-a$	a^2	$-a^3$	a^4	0

Jest zatem $x^5 + a^5 = (x + a)(x^4 - ax^3 + a^2x^2 - a^3x + a^4)$.
Ogólnie: ilorazem $x^n + a^n$ przez $x + a$, gdy n jest liczbą nieparzystą, jest wielomian jednorodny stopnia $n - 1$, uporządkowany malejąco ze względu na x, rosnąco ze względu na a, w współczynnikach na przemian 1 i -1.

4. Twierdzenie Bezouta

W poniższych przykładach pomocne będzie twierdzenie Hornera. Czy np. wielomian $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x - 27$ można przedstawić w postaci wynikającej z tego twierdzenia? Posłużę się tu sposobem, który sygnalizowałem w notatce *O różnych spojrzeniach na ten sam problem* (*Matematyka* 4'93/253).

Zauważmy, że $f(3) = 2 \cdot 3^3 - 4 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 - 27 = 0$. Oznacza to, że możemy napisać

$$\begin{aligned} f(x) - f(3) &= 2x^3 - 4x^2 + 3x - 27 - (2 \cdot 3^3 - 4 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 - 27) = \\ &= 2(x^3 - 3^3) - 4(x^2 - 3^2) + 3(x - 3), \end{aligned}$$

czyli $f(x) = (x - 3)(2x^2 + 2x + 9)$.
Ćwiczeń takich możemy wykonać jeszcze kilka. Zapiszmy wielomian $f(x)$ w postaci $f(x) = (x - k) \cdot g(x)$, gdy
a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$; $k = 3$,
b) $f(x) = 5x^3 - 15x^2 - 47x - 15$; $k = 5$,
c) $f(x) = 2x^5 - 3x^4 - x^2 + 6$; $k = -1$.

Pójdźmy dalej i przedstawmy wielomian $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ w postaci $f(x) = (x - k) \cdot g(x)$, gdzie k oznacza jego miejsce zerowe, tzn. jest $f(k) = ak^3 + bk^2 + ck + d = 0$.
Mamy

$$\begin{aligned} f(x) = f(x) - f(k) &= ax^3 + bx^2 + cx + d - ak^3 - bk^2 - ck - d = \\ &= a(x^3 - k^3) + b(x^2 - k^2) + c(x - k) = \\ &= a(x - k)(x^2 + kx + k^2) + b(x - k)(x + k) + c(x - k) = \\ &= (x - k)[a(x^2 + kx + k^2) + b(x + k) + c] = \\ &= (x - k)(ax^2 + akx + ak^2 + bx + bk + c) = \\ &= (x - k)[ax^2 + (ak + b)x + ak^2 + bk + c]. \end{aligned}$$

Zauważmy, że współczynnikami ilorazu są a, $ak + b$, $ak^2 + bk + c$.

Przeprowadźmy podobny rachunek dla wielomianu
$f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(x) - f(k) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 - \\
&\quad - a_4k^4 - a_3k^3 - a_2k^2 - a_1k - a_0 = \\
&= a_4(x^4 - k^4) + a_3(x^3 - k^3) + a_2(x^2 - k^2) + a_1(x - k) = \\
&= a_4(x - k)(x^3 + kx^2 + k^2x + k^3) + \\
&\quad + a_3(x - k)(x^2 + kx + k^2) + a_2(x - k)(x + k) + a_1(x - k) = \\
&= (x - k)[a_4(x^3 + kx^2 + k^2x + k^3) + a_3(x^2 + kx + k^2) + a_2(x + k) + a_1] = \\
&= (x - k) \cdot \\
&\quad \cdot [a_4x^3 + (a_4k + a_3)x^2 + (a_4k^2 + a_3k + a_2)x + (a_4k^3 + a_3k^2 + a_2k + a_1)].
\end{aligned}
$$

Współczynnikami ilorazu są tutaj a_4, $a_4k + a_3$, $a_4k^2 + a_3k + a_2$, $a_4k^3 + a_3k^2 + a_2k + a_1$. A jakie są współczynniki ilorazu, gdy wielomianem jest $f(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$?

Weźmy teraz pod uwagę wielomian $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$. Przyjmując, że k jest jego miejscem zerowym, mamy $f(k) = a_nk^n + a_{n-1}k^{n-1} + \ldots + a_1k + a_0 = 0$. Jest więc

$$
\begin{aligned}
f(x) = f(x) - f(k) &= a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 - \\
&\quad - a_nk^n - a_{n-1}k^{n-1} - \ldots - a_1k - a_0 = \\
&= a_n(x^n - k^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - k^{n-1}) + \ldots + a_1(x - k).
\end{aligned}
$$

Po zastosowaniu twierdzenia Hornera mamy:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a_n(x - k)(x^{n-1} + kx^{n-2} + \ldots + k^{n-2}x + k^{n-1}) + \\
&\quad + a_{n-1}(x - k)(x^{n-2} + kx^{n-3} + \ldots + k^{n-3}x + k^{n-2}) + \ldots + a_1(x - k).
\end{aligned}
$$

Ostatecznie więc

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x - k) \cdot \\
&\quad \cdot [a_nx^{n-1} + (a_nk + a_{n-1})x^{n-2} + (a_nk^2 + a_{n-1}k + a_{n-2})x^{n-3} + \ldots \\
&\quad \ldots + (a_nk^{n-1} + a_{n-1}k^{n-2} + \ldots + a_1)],
\end{aligned}
$$

czyli $f(x) = (x - k) \cdot g(x)$, gdzie $g(x)$ jest wielomianem stopnia $n - 1$, jeśli tylko $a_n \neq 0$. Wykazaliśmy w ten sposób

Twierdzenie Bezouta. *Jeżeli liczba k ($k \in \mathbf{R}$) jest miejscem zerowym wielomianu f stopnia $n \geq 1$, to istnieje taki wielomian g stopnia $n - 1$, że $f(x) = (x - k) \cdot g(x)$ dla wszystkich $x \in \mathbf{R}$.*

Z twierdzenia tego wynika oczywiście, że $g(x) = \frac{f(x)}{x-k}$.

Literatura

[1] Bryński M., Dróbka N., Kaja J., Szymański K.: *Matematyka. Program nauczania dla szkoły średniej.* WSiP, Warszawa 1996.

[2] Bryński M., Dróbka N.: *Matematyka II. Podręcznik dla klasy drugiej liceum i technikum*, WSiP, Warszawa 1997.