Lemat o zamykaniu

Michał KRYCH, Warszawa

Matematycy z różnych przyczyn interesują się od dawna równaniami różniczkowymi. Wiele równań uważanych za ważne nie daje się rozwiązać lub gorzej: wiadomo, że ich rozwiązania są funkcjami nieelementarnymi. Niemniej jednak ludzie próbują uzyskać o nich jak najwięcej informacji. Jednym z pomysłów była próba opisania dosyć szerokiej klasy układów typowych, a następnie opisywania za ich pomocą innych układów lub modyfikowania tak, aby zjawisko dało się modelować układem typowym. Wiadomo było jakie są typowe zachowania się układów równań w pobliżu rozwiązań okresowych oraz nieco o tym jak zachowują się rozwiązania „nawijające" się na okresowe lub rozwijające się z okresowych (to zresztą to samo zjawisko po odwróceniu czasu). Oczywiście informacje nie były zbyt precyzyjne, ale było ich coraz więcej. Główne, niejako sumujące wyniki, należą do I. Kupki i S. Smale'a. Pozostał dosyć istotny problem, tzw. **lemat o zamykaniu**, częściowo rozwiązany przez C.C. Pugh i później C.R. Robinsona. Chodziło o to, czy jeśli rozwiązanie „podchodzi" pod siebie, to czy można za pomocą małego zaburzenia je zamknąć. Pugh wykazał prawdziwość hipotezy formułowanej przez R. Thoma i innych, ale jedynie przy założeniu, że dopuszczalne zaburzenia są C^1-małe. Chciałoby się, by mogły być małe w sensie C^k, tj. by małe było zarówno zaburzenie, jak i jego pochodne do rzędu k włącznie, ale tego do tej pory nikomu nie udało się wykazać, ani też podać przykładów świadczących o nieprawdziwości formułowanej hipotezy. Dowód Pugh ma dosyć jasną ideę, natomiast tzw. szczegóły są bardzo skomplikowane. Postaram się tu pokrótce objaśnić w czym rzecz na przykładzie pola wektorowego na dwuwymiarowej powierzchni (rozmaitości) zwartej bez brzegu.

Niech $f(t,x) = f_t(x)$ oznacza położenie w chwili t obiektu, który w chwili 0 znajdował się w punkcie x. Zbiór dopuszczalnych położeń ma być zwartą powierzchnią bez brzegu (może to być np. torus lub butelka Kleina, albo coś bardziej skomplikowanego). Standardowo przyjmujemy, że przekształcenie f_t jest homeomorfizmem rozpatrywanej powierzchni, a nawet jej dyfeomorfizmem klasy co najmniej C^1, oraz że przekształcenia (f_t) tworzą jednoparametrową grupę dyfeomorfizmów, co oznacza, że $f_t \circ f_s = f_{t+s}$ dla dowolnych liczb rzeczywistych t i s. W istocie zakładamy jeszcze więcej: przekształcenie f jako funkcja swych obu zmiennych ma być klasy C^1. Takie grupy są generowane przez pola wektorowe. Mówimy, że punkt p jest rekurencyjny, jeśli istnieje ciąg (t_n) rozbieżny do ∞ taki, że $f(t_n, p) \to p$, przy czym $f_t(p) \neq p$ dla $t > 0$ – wykluczamy więc punkty okresowe. Problem polega na tym: jeśli x jest punktem rekurencyjnym, to czy istnieje pole wektorowe, bliskie w C^1 topologii polu generowanemu przez f takie, że przez x przechodzi trajektoria okresowa nowego pola wektorowego?

Niżej postaram się przedstawić ideę dowodu podanego przez C.C. Pugh.

Zacznę od podstawowych lematów.

Lemat o linearyzacji przekształcenia
Jeśli $g : R^n \to R^n$ jest takim przekształceniem klasy C^1, $\alpha : R^n \to [0,1]$ zaś taką funkcją klasy C^∞, że $\alpha(x) = 0$, jeśli $\|x\| \geq 2$ i $\alpha(x) = 0$, jeśli $\|x\| \leq 1$ oraz $g_\varepsilon(x) = g(0) + \alpha(x/\varepsilon)Dg(0)x + (1 - \alpha(x/\varepsilon))(g(x) - g(0))$,
to g_ε i Dg_ε dążą jednostajnie do g i odpowiednio Dg na R^n.

Dowód tego lematu to proste ćwiczenie dla studentów II roku, a w przypadku $n = 1$ dla studentów I roku. Funkcja g_ε pokrywa się z funkcją afiniczną (dawniej zwaną liniową) – linearyzacją g w pewnym otoczeniu 0, zaś na zewnątrz nieco większego otoczenia pokrywa się z g.

Lemat o realizacji linearyzacji
Jeśli V jest gładkim polem wektorowym określonym w otoczeniu produktu $B(r) \times [0,b] \subseteq R^{n+1}$, gdzie $B(r) = \{x \in R^n : \|x\| \leq r\}$ jest kulą domkniętą

o środku w $0 \in R^n$ i promieniu $r > 0$, postaci $V = W + e_{n+1}$, gdzie W jest polem stycznym do $R^n \times 0$, natomiast f oznacza dyfeomorfizm indukowany przez V, przekształcający $B(r) \times \{0\}$ w $B(r) \times \{b\}$ – trajektoria startująca z $(x, 0)$ trafia po czasie b w punkt $(f(x), b)$, przy czym $f(0) = 0$,
to istnieje pole W_1 dowolnie bliskie polu W w C^1 topologii takie, że analogiczny dyfeomorfizm f_1 indukowany przez pole $W_1 + e_{n+1}$ jest liniowy w otoczeniu 0.

W dowodzie tego lematu używamy lematu poprzedniego i deformujemy f do jego linearyzacji – mamy na to czas b, używamy oczywiście funkcji klasy C^∞ o zwartym nośniku do wygaszenia zaburzenia na zewnątrz „małego" otoczenia odcinka trajektorii wychodzącej z $(0, 0)$. Szczegóły pomijamy, w dowodzie jest kłopot natury technicznej związany z operowaniem przekształceniami klasy C^1 zamiast klasy C^∞.

Cięciem transwersalnym pola V w punkcie p nazywamy podrozmaitość kowymiaru 1, do której pole nie jest styczne w żadnym punkcie. Jest oczywistym, że w każdym punkcie, w którym pole jest różne od 0, istnieje bardzo wiele cięć transwersalnych (małych). Wprowadzając na dowolnym cięciu transwersalnym układ współrzędnych i przyjmując, że ostatnią współrzędną jest czas t, otrzymujemy tzw. mapę prostującą (*flow-box*), tj. układ współrzędnych (lokalny oczywiście), w którym V wygląda tak: $(0, \ldots, 0, 1)$. Zmniejszając cięcie można wydłużać mapę prostującą.

Niech $I = [-1, 1]$ i niech $h : I \times I \to [0, 1]$ będzie funkcją klasy C^∞ o nośniku zawartym w $I \times I$, dodatnią na $(-1, 1) \times (0, 1)$. Niech $h_b(x, y) = bh(x/b, y)$ i niech $A \subseteq (-1, 1)$ będzie zbiorem zwartym. Wtedy zachodzi następujący

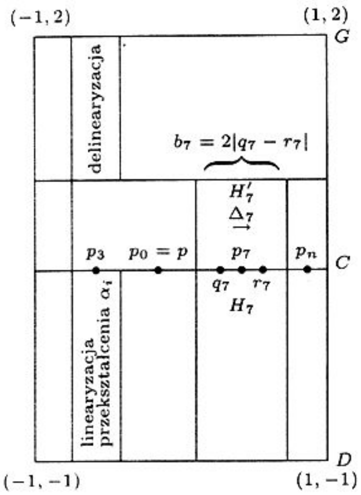
Lemat o minimalnym popchnięciu
Istnieje taka stała $k(A, h) > 0$, że **jeśli** $\psi_t(x, \varepsilon, b)$ jest rozwiązaniem ogólnym równania $x' = \varepsilon h_b(x, t)$, przy czym $\psi_0(x, \varepsilon, b) = x$,
to $\psi_1(ba, \varepsilon, b) - ba \geq \varepsilon kb$ dla dowolnego $a \in A$, $0 \leq \varepsilon$, $b \leq 1$.

Dowód lematu polega na stwierdzeniu, że istnieje taka stała dla $b = 1$, a następnie stwierdzeniu, że dzięki „liniowemu ściśnięciu" funkcji h do węższego prostokąta (mnożymy długość jednego boku przez $b \in (0, 1)$), wielkość popchnięcia ulega zmianie odpowiedniej, tj. proporcjonalnej. Istotą rzeczy jest to, że umiemy konstruować zaburzenia, których wielkość jest proporcjonalna do rozmiarów (szerokości) dziedziny.

Lemat podstawowy (kombinatoryka)
V oznacza pole wektorowe na rozmaitości M, zwartej, bez brzegu, $p \in M$ jest punktem rekurencyjnym, C jest cięciem transwersalnym do V zawierającym p, funkcja ρ jest metryką na C, funkcja $\phi = \phi(s, y)$, $s \in R$, $y \in M$, to potok pola V. Wtedy dla dowolnej liczby dodatniej ν **istnieją** punkty q, r takie, że dla pewnych liczb $T > t > 0$ jest $q = \phi(t, p) \in C$, jest $r = \Phi(T, p) \in C$, a także $\rho(p, q) < \nu$, $\rho(p, r) < \nu$ oraz
jeśli $y \in C$ oraz $y = \phi(s, p)$ dla pewnej liczby $s \in (t, T)$,
to $\rho(q, y) > 0{,}5\rho(q, r)$ oraz $\rho(r, y) > 0{,}5\rho(q, r)$.

Ten lemat pozwala tak wybierać punkty q oraz r na trajektorii punktu p, że punkty cięcia C leżące na trajektorii p między q i r są w miarę daleko od obu punktów q i r. Będziemy zaburzać pole wykorzystując ten luz do wyprodukowania dostatecznie dużego popchnięcia. Dowodu lematu nie przytaczam, bo jest on prosty i niewiele ma wspólnego z linearyzacją.

Przejdziemy teraz do omówienia zasadniczej idei dowodu. Punkt p będzie punktem rekurencyjnym pola wektorowego V określonego na dwuwymiarowej rozmaitości M zwartej, bez brzegu, $h : R^2 \to [0, 1]$ ustaloną funkcją klasy C^∞ spełniającą założenia lematu o popchnięciu, $n > 2/(k\varepsilon)$ liczbą naturalną, gdzie liczba k zależy od h, natomiast ε ustaloną liczbą dodatnią – zaburzenie będzie mniejsze niż ε. Wybierzmy dowolne cięcie transwersalne C przechodzące przez p. W tym przypadku C jest jednowymiarowe, więc jest krzywą. Zakładamy, że jest ona sparametryzowna za pomocą odcinka zawierającego w swym wnętrzu przedział $I = [-1, 1]$. Niech punkty $p = p_0, p_1, \ldots, p_n$ będą kolejnymi punktami trajektorii punktu p leżącymi na $I \subseteq C$ (utożsamiamy parametr z punktem). Ze zbiorem C wiążemy mapę prostującą zawierającą prostokąt $P = [-1,1] \times [-1,2]$. Oznacza to, że we współrzędnych na P pole wektorowe V ma postać $[0,1]$. Druga współrzędna punktów z C jest równa 0. Niech $D = I \times \{-1\}$, $G = I \times \{2\}$. Trajektoria punktu p powraca do $C \supseteq I \times \{0\}$ kolejno trafiając w punkty p_i, więc punkty leżące dostatecznie blisko p też powracają do C. To przekształcenie powrotu jest co najmniej tak gładkie jak V (gładka zależność rozwiązań układu równań różniczkowych od warunków początkowych plus twierdzenie o funkcjach uwikłanych, bo czas powrotu zależy od punktu). Powrót w okolice p_i oznaczamy α_i. Z lematu o realizacji linearyzacji wynika, że można tak zaburzyć pole V, by trajektorie nowego pola W pokrywały się z trajektoriami starego poza prostokątem P, by w pewnym, małym otoczeniu H punktu p przekształcenia powrotu β_i do C, generowane przez pole W, były liniowe. Można to zrobić zaburzając V kolejno na wąskich prostokątach, których dolne podstawy są zawarte w D, górne zaś w C, i znosząc efekt tej linearyzacji zaburzeniem skoncentrowanym na następnym wąskim prostokącie o wysokości 1, którego górna podstawa jest zawarta w G. Następnie zastępujemy punkt p punktem q z lematu podstawowego, z którym występuje w parze punkt r – oba wybieramy bardzo blisko p. Teraz jesteśmy gotowi do zaburzania pola W w środkowej, jeszcze nie wykorzystywanej części prostokąta P. Zrobimy to tak, że po zaburzeniu pole będzie mieć trajektorię okresową przechodzącą przez q. Niech $q_i = \beta_i(q)$, $r_i = \beta_i(r)$. Niech $b_i = 2|q_i - r_i|$, oraz $H_i = \{x \in C : |x - q_i| \leq 0{,}5b_i \text{ lub } |x - r_i| \leq 0{,}5b_i\}$ dla $i = 0, 1 \ldots, n$. Niech H' oznacza kopię $H \subseteq C$ znajdującą się o 1 ponad H, tj. w prostej $y = 1$. Oczywiście nie wiemy i nie mamy szans wiedzieć, po której stronie q_i znajduje się r_i – to zależy od pola W, a wcześniej pola V i struktury M: przecież β_i nie muszą zachowywać orientacji, co gorsza niektóre z nich mogą się zachowywać inaczej niż reszta. Definiujemy Δ_i jako $\pm 0{,}5\varepsilon\tau h_b[1,0]$, $0 \leq \tau \leq 1$ — por. lemat o popchnięciu, przy czym znak jest tak dobrany, by punkt q_i był popychany w kierunku r_i, zaś nośnikiem tego zaburzenia jest zbiór o podstawach H_i oraz H'_i. Liczba pchnięć n została tak dobrana, że przy $\tau = 1$ punkt q_n zostanie przepchnięty poza r_n przez pole $W + \sum \Delta_i$. Zmniejszając odpowiednio τ (własność Darboux) trafimy w r_n, więc otrzymamy trajektorię zamkniętą. To, że pchnięcie jest dostatecznie duże wynika z tego, że popychamy o pewną część odstępu, a dzięki liniowości przekształceń β_i, sformułowanie *pewną część* jest niezależne od wyboru i.



Mam nadzieję, że to co napisałem wcześniej jest zrozumiałe. Dowód jest bardzo liniowy, choć teza absolutnie nie. W wyższych wymiarach dochodzą dodatkowe problemy związane z koniecznością „celowania" w r_i. To wymaga sporej pracy przy analizowaniu przekształceń liniowych, których nie można zapisywać w wygodnej bazie, bo każda zmiana bazy to zmiana metryki, więc i znaczenia słów: mały i duży. Te „techniczne szczegóły", to kilkadziesiąt stron szacowań w pracy C.C. Pugh z 1967 r. Trochę udało się to skrócić i poprawić dzięki wysiłkom Pugh i C.R. Robinsona, który przerobił dowód Pugh tak, że działa on dla pól hamiltonowskich (wymaga to dodatkowej kontroli zaburzeń).

Gdybyśmy nie chcieli, by zaburzenia były małe w C^1 topologii, lecz tylko w C^0, twierdzenie stałoby się trywialne – wystarczyłoby jedno pchnięcie na jednym odpowiednio wybranym prostokącie. Ponieważ konstruowane zaburzenia mają małe nośniki, więc żądanie by były małe w sensie C^1 oznacza, że muszą być małe w porównaniu z nośnikiem – twierdzenie o wartości średniej! W C^0 tego problemu nie ma, natomiast występuje on znacznie ostrzej w przypadku zaburzeń małych w C^k topologii, $k \geq 2$. Jest to na tyle istotny problem, że kwestia prawdziwości lematu o zamykaniu w tym ostatnim przypadku pozostaje otwarta i coraz więcej ludzi wątpi w jego prawdziwość.

Z lematu o zamykaniu wynika twierdzenie, wypowiedziane chyba po raz pierwszy przez R. Thoma, że typowe pola wektorowe nie mają całek pierwszych – tak, jak typowe funkcje ciągłe są nigdzie nieróżniczkowalne. Zainteresowany Czytelnik może zajrzeć do książki W. Szlenka, *Wstęp do gładkich układów dynamicznych*, Warszawa, PWN, 1982, str. 140.