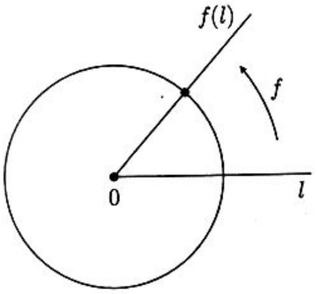
Skrót odczytu ze Szkoły Matematyki Poglądowej *Linearyzacja* (Siedlce, sierpień 1999), za który Autor otrzymał medal Filca.

Grupy Liego

Zbigniew MARCINIAK

Najkrótsza definicja grupy: „zamknięty w sobie zbiór przekształceń”, choć nieprecyzyjna, zwraca uwagę na podstawowe źródło grup w matematyce. Bo to jest tak: matematyk stara się odkryć nowe własności obiektów matematycznych. Taki obiekt, to zwykle zbiór X, wyposażony w pewną dodatkową strukturę S. Jednym z zabiegów, prowadzących do lepszego poznania obiektu (X, S) jest zbadanie jego symetrii, tj. rozważenie tych wzajemnie jednoznacznych przekształceń zbioru X na siebie, które zachowują zadaną strukturę. Przeważnie jest oczywiste, że tak zdefiniowany zbiór przekształceń G jest zamknięty ze względu na odwracanie i składanie przekształceń, tzn. jest *grupą przekształceń*.

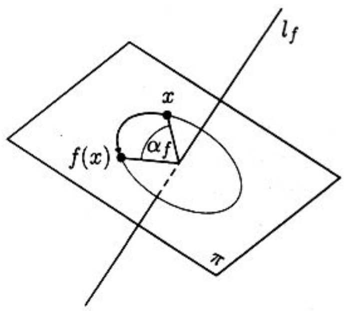
Na przykład, gdy X jest płaszczyzną kartezjańską $\mathbb{R}^2$, to można rozważać grupy wzajemnie jednoznacznych przekształceń $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zachowujących pola figur, zbiory otwarte (grupa homeomorfizmów), rodzinę prostych (grupa przekształceń afinicznych), odległość (grupa izometrii), itd.



Rys. 1

Dla niektórych struktur S ma sens pojęcie bliskości w zbiorze X. Tak jest np. wtedy, gdy rozważamy odległość. Wtedy często się zdarza, że grupa wszystkich przekształceń zachowujących S dziedziczy to pojęcie bliskości. Aby lepiej to objaśnić, obejrzyjmy przykład.

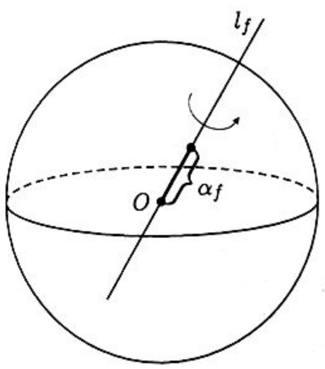
Rozważmy grupę $SO(2)$ obrotów płaszczyzny wokół ustalonego punktu O. Jest intuicyjnie oczywiste, że obroty o kąty 17° i 18° są znacznie bliższe, niż obroty o kąty 17° i 170°. Tej intuicyjnej bliskości łatwo nadać precyzyjny sens geometryczny (rys. 1). Rozważmy okrąg S^1 o środku O oraz ustaloną półprostą l o początku O. Z każdym obrotem płaszczyzny f zwiążemy punkt, w którym obrócona półprosta $f(l)$ przecina okrąg S^1. Otrzymamy w ten sposób wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie grupy obrotów $SO(2)$ na okrąg S^1, przy czym obroty o „bliskie” kąty odpowiadają bliskim sobie punktom okręgu. Biorąc to pod uwagę, możemy utożsamić grupę $SO(2)$ z okręgiem S^1.



Rys. 2

A jak wygląda grupa $SO(3)$ obrotów przestrzeni trójwymiarowej wokół punktu O? Każdy taki obrót f ma swoją oś – prostą l_f punktów stałych, przechodzącą przez O. Pod działaniem f każdy punkt przestrzeni porusza się w pewnej płaszczyźnie π prostopadłej do l_f, dokonując w niej obrotu o ustalony kat α_f wokół punktu $\pi \cap l_f$ (rys. 2). Znów jest intuicyjnie jasne, że dwa obroty, które mają „bliskie” osie obrotu l_f oraz niewiele różniące się kąty obrotu α_f można uznać za bliskie elementy grupy $SO(3)$. Jak to zobrazować geometrycznie?

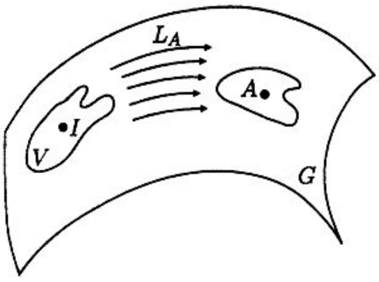
Rozważmy kulę o środku O i promieniu π. Z każdym obrotem $f \in SO(3)$ postaramy się związać pewien punkt tej kuli. W tym celu dla danego obrotu f poprowadźmy przez środek kuli jego oś l_f. Na tej osi zaznaczmy punkt w odległości α_f (miarę kąta wyrażamy w radianach) od środka O. Napotykamy tu problem: są dwa takie punkty. Jeśli $\alpha_f < \pi$, to wybieramy jeden z nich według następującej reguły: punkt należy wybrać po tej stronie punktu O, z której dany obrót widać jako przeciwny do ruchu wskazówek zegara (rys. 3). W ten sposób każdemu obrotowi o kąt mniejszy od π umiemy jednoznacznie przypisać punkt z wnętrza naszej kuli. Pozostały jeszcze obroty o kąt π, czyli symetrie osiowe. Te przekształcenia wyglądają z obu końców osi tak samo, więc poprzednio użyty sposób ich nie rozróżnia. Musimy się z tym pogodzić: symetrii osiowej odpowiada para punktów na powierzchni kuli – są to punkty, w których oś l_f przebija sferę. Poradzimy sobie inaczej: na powierzchni kuli dokonamy identyfikacji: zlepimy ze sobą końce każdej średnicy. Z kursu topologii pamiętamy, że w wyniku tej operacji otrzymamy trójwymiarową przestrzeń rzutową $\mathbb{R}P^3$. Zatem grupa $SO(3)$ obrotów przestrzeni trójwymiarowej może być utożsamiona z przestrzenią $\mathbb{R}P^3$.



Rys. 3

Zauważmy, że obie grupy $SO(2)$ i $SO(3)$ udało nam się przedstawić jako bardzo ładne przestrzenie. Zarówno okrąg S^1, jak i przestrzeń rzutowa $\mathbb{R}P^3$ są bowiem rozmaitościami, tj. są lokalnie homeomorficzne z przestrzenią euklidesową (odpowiednio wymiaru 1 i 3).

Taki ładny opis tylko zaostrza apetyt. Rozważmy zatem przypadek ogólny grupy $SO(n)$, składającej się z izometrii n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej, które nie poruszają ustalonego punktu O oraz zachowują orientację (dla $n = 2, 3$ są to dokładnie rozważane przed chwilą grupy obrotów).

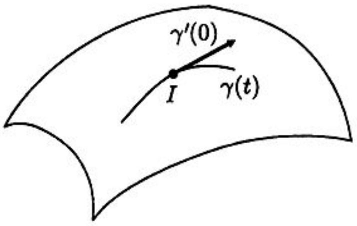


Rys. 4

Z kursu algebry liniowej wiemy, że każde przekształcenie tego typu może być opisane macierzą A o rozmiarach $n \times n$, której kolumny są parami prostopadłe i każda jest wektorem długości 1. Można to zgrabnie wyrazić warunkiem $A^T A = I$, gdzie A^T oznacza macierz transponowaną do A, a I jest macierzą jednostkową.

Z powyższego w szczególności wynika, że grupa $G = SO(n)$ jest pewnym podzbiorem zbioru macierzy $M_n(\mathbb{R})$. Wypisując wiersze macierzy jeden za drugim, otrzymujemy długi wektor o n^2 współrzędnych. W ten sposób można utożsamić zbiór $M_n(\mathbb{R})$ z przestrzenią euklidesową $\mathbb{R}^{n^2}$ i zastanawiać się, jak w tej przestrzeni wygląda interesujący nas podzbiór G.

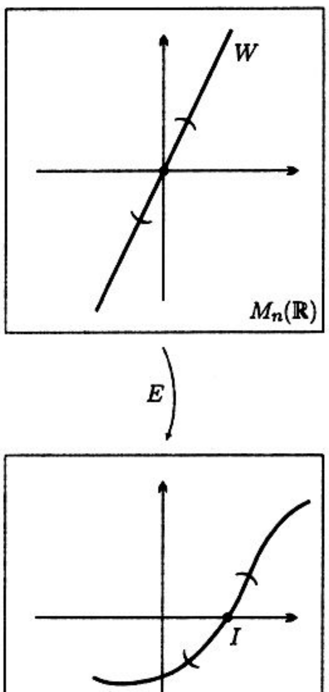
Zauważmy, że wystarczy zbadać i opisać okolicę V punktu $I \in G$. Istotnie, każdy inny punkt $A \in G$ ma otoczenie homeomorficzne z V, otrzymane za pomocą przesunięcia $L_A\colon V \to G$, $L_A(X) = A \cdot X$ (rys. 4).



Rys. 5

Aby obejrzeć okolicę punktu $I \in G$, rozważmy krzywą gładką $\gamma\colon (-a; a) \to G \subset \mathbb{R}^{n^2}$ taką, że $\gamma(0) = I$ (rys. 5). Zbiór wektorów prędkości wszystkich takich krzywych w chwili $t = 0$ wypełnia przestrzeń styczną do G w punkcie I. Rozważenie tego zbioru to dobry przykład użycia *linearyzacji* – tytułowej technologii tej Szkoły.

Ponieważ dla każdej liczby $t \in (-a; a)$ zachodzi $\gamma(t) \in G$, więc macierz $\gamma(t)$ spełnia warunek $\gamma(t)^T \cdot \gamma(t) = I$. Różniczkując tę równość stronami w chwili $t = 0$, otrzymujemy warunek $\gamma'(0)^T \cdot \gamma(0) + \gamma(0)^T \cdot \gamma'(0) = 0$. Oznaczmy wektor styczny $S = \gamma'(0)$. Pamiętając o tym, że $\gamma(0) = I$, otrzymujemy $S^T + S = 0$, czyli $S^T = -S$: wektory prędkości krzywych γ należą do podprzestrzeni liniowej $W \subset \mathbb{R}^{n^2}$, składającej się z macierzy antysymetrycznych. Czy każda macierz antysymetryczna S będzie w ten sposób wykorzystana?



Rys. 6

Tak jest w istocie, a przekona nas o tym przekształcenie $E\colon M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, dane wzorem $E(X) = I + X + \frac{X^2}{2!} + \dots + \frac{X^n}{n!} + \dots$. Szereg po prawej stronie jest zbieżny dla każdej macierzy X. Oczywiście $E(0) = I$. Ponieważ E jest przekształceniem przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^{n^2}$ w siebie, możemy obliczyć jego różniczkę w punkcie 0: $dE_0\colon \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^{n^2}$. Dla dowolnego wektora kierunkowego H mamy

$$dE_0(H) = \lim_{t\to 0} \frac{E(0+tH) - E(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{E(tH) - I}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(tH + \frac{t^2H^2}{2!} + \cdots\right) = H.$$

Zatem różniczka dE_0 jest identycznością. Z twierdzenia o rzędzie wynika, że E przekształca dyfeomorficznie pewne otoczenie punktu 0 na pewne otoczenie punktu $E(0) = I$ (rys. 6).

Zauważmy, że wektory z podprzestrzeni W są odwzorowywane przez E w zbiór G, gdyż z równości $S^T = -S$ wynika

$$E(S)^T \cdot E(S) = E(S^T) \cdot E(S) = E(-S) \cdot E(S) = E(-S+S) = E(0) = I,$$

tj. macierz $E(S)$ należy do G. W szczególności, krzywa $\gamma(t) = E(tS)$ ma wektor prędkości $S \in W$.

Z powiedzianego wyżej wynika, że przekształcenie E „zagina" otwarty podzbiór podprzestrzeni $W \subset \mathbb{R}^{n^2}$ tak, że staje się on otwartym podzbiorem V grupy G. Osiągnęliśmy podobny rezultat, jak w przypadku $n = 2, 3$: punkt $I \in G$ (a zatem i każdy inny) ma otoczenie homeomorficzne z przestrzenią euklidesową W.

Jaki jest wymiar przestrzeni macierzy antysymetrycznych W? Na przekątnej muszą być zera. Liczby, które stoją nad przekątną możemy wybrać dowolnie;

pod przekątną musimy umieścić liczby do nich przeciwne. Mamy zatem do swobodnego wyboru tyle parametrów, ile jest miejsc nad przekątną, tj. $\frac{n^2-n}{2}$ i taki jest wymiar W.

Grupy $SO(n)$ stanowią przykład grup Liego. Z definicji, G jest grupą Liego, jeżeli:
(i) G jest grupą;
(ii) G jest rozmaitością gładką;
(iii) działania grupowe: $x, y \mapsto x \cdot y$ i $x \mapsto x^{-1}$ są przekształceniami gładkimi.

Jest to bardzo ważna klasa grup, pojawiająca się często zarówno w zastosowaniach matematyki, jak i w wielu, często nieoczekiwanych, działach matematyki „czystej".

Nietrudno wskazać inne przykłady grup Liego: grupa $\mathbb{R}^n$ wektorów z dodawaniem, grupa macierzy odwracalnych $GL_n(\mathbb{R})$, okrąg S^1 i jego produkty $S^1 \times \cdots \times S^1$, czyli torusy. Także każdą grupę dyskretną można uważać za 0-wymiarową grupę Liego.

Czy dowolna grupa Liego posiada opis podobny do tego, jaki znaleźliśmy np. dla grupy $SO(3)$? Zastanawiając się nad odpowiedzią, możemy się ograniczyć do grup spójnych i zwartych.

Można bowiem łatwo wykazać, że jeśli grupa Liego G nie jest spójna, to jest sumą rozłączną pewnej liczby kopii grupy spójnej: składowej spójnej jedynki $e \in G$. Wystarczy zatem zbadać, jak wyglądają spójne grupy Liego. Z kolei można (już nie tak całkiem łatwo) wykazać, że każda spójna grupa Liego G posiada podgrupę zwartą K taką, że przestrzeń G jest homeomorficzna z iloczynem kartezjańskim $K \times \mathbb{R}^m$ dla pewnej liczby m.

Jak zatem wyglądają spójne i zwarte grupy Liego? Otóż w pewnym sensie widzieliśmy już je wszystkie, gdyż ma miejsce

Twierdzenie. Każda zwarta i spójna grupa Liego jest podgrupą domkniętą grupy $SO(n)$.

Naszkicujemy dowód tego ważnego twierdzenia. Idea jest prosta: należy zadać działanie danej grupy G przez izometrie na pewnej przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ tak, by to działanie było wierne, tj. by tylko jedynka $e \in G$ działała jak identyczność. Wtedy przypisanie elementowi $g \in G$ odpowiadającej mu izometrii jest szukanym zanurzeniem.

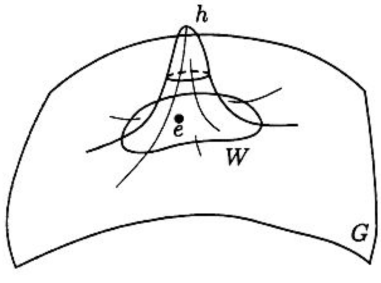
Zanim zaczniemy myśleć o działaniu przez izometrie, powinniśmy umieć znaleźć działanie G na $\mathbb{R}^n$ poprzez przekształcenia liniowe, tj. zanurzyć G w pewnej grupie $GL_n(\mathbb{R})$.

Łatwo wskazać przestrzeń liniową, na której G działa liniowo i wiernie. Jest to przestrzeń $V = C(G; \mathbb{R})$ wszystkich funkcji ciągłych $f\colon G \to \mathbb{R}$. Działanie elementu $g \in G$ na wektorze $f \in V$ daje nowy wektor $\tilde{f}$ określony wzorem $\tilde{f}(x) = f(x \cdot g)$, $x \in G$. Niestety, przestrzeń V ma nieskończony wymiar. Jest to jednak bardzo porządna przestrzeń euklidesowa, wyposażona w iloczyn skalarny $\langle f, g\rangle = \int_G f(x)g(x)dx$. Poradzimy sobie w ten sposób, że znajdziemy w przestrzeni V skończenie wymiarową podprzestrzeń, niezmienniczą ze względu na działanie grupy G.

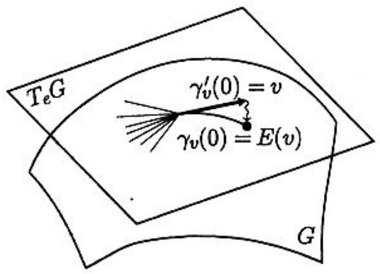
Takich podprzestrzeni dostarcza nam teoria operatorów. Niech $h\colon G \to \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją ciągłą taką, że $h(e) = 1$ oraz $h(x^{-1}) = h(x)$ dla wszystkich $x \in G$. Z taką funkcją możemy związać przekształcenie liniowe $K\colon V \to V$, dane wzorem $K(f)(x) = \int_G h(xy^{-1})f(y)dy$ i rozważyć jej podprzestrzenie własne V_λ, odpowiadające wartościom własnym λ: $K(f) = \lambda f$ dla $f \in V_\lambda$.

Otóż ten typ przekształceń ma następującą, bardzo interesującą dla nas, własność: podprzestrzenie własne odpowiadające wartościom własnym $\lambda \neq 0$ są skończenie wymiarowe!

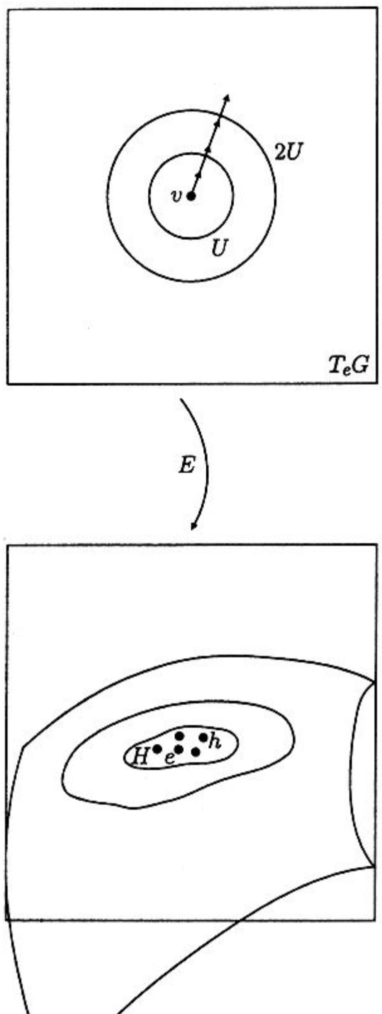
Nietrudno sprawdzić, że każda podprzestrzeń V_λ jest niezmiennicza ze względu na działanie grupy G. Jeśli bowiem $f \in V_\lambda$ oraz $\tilde{f}$ jest obrazem f przy działaniu $g \in G$, to $K(\tilde{f})(x) = \int_G h(xy^{-1})\tilde{f}(y)dy = \int_G h(xy^{-1})f(yg)dy$. Podstawiając



Rys. 7



Rys. 8



Rys. 9

$yg = z$, otrzymujemy $K(\tilde{f})(x) = \int_G h(xgz^{-1})f(z)dz = K(f)(xg) = \lambda f(xg) = \lambda \tilde{f}(x)$, czyli $\tilde{f}$ też należy do V_λ.

Niestety, nie mamy żadnej gwarancji, że na jednej z podprzestrzeni V_λ grupa G działa wiernie. Będziemy zatem podprzestrzenie V_λ wiązać w paczki, tj. rozważać sumy $\oplus_{\lambda > c} V_\lambda$ dla liczb $c > 0$. To są także podprzestrzenie niezmiennicze i skończenie wymiarowe. Jeżeli P_c oznacza rzut prostokątny V na V_c, to dla każdej funkcji $f \in V$ mamy, przy $c \to 0$, jednostajną zbieżność $P_c(f) \rightrightarrows f$. Wystarczy wykazać, że na jednej z podprzestrzeni V_c działanie G jest wierne, tj. jądro $\ker\rho$ homomorfizmu $\rho\colon G \to GL(V_c)$ jest trywialne.

Jądra $\ker\rho$ trudno pozbyć się od razu. Dlatego będziemy je zamykać w coraz to mniejszych otoczeniach otwartych $e \in U \subset G$. Wykażemy mianowicie, że dla dowolnego takiego otoczenia istnieje wartość parametru $c > 0$ taka, że $\ker\rho \subset U$, gdzie $\rho\colon G \to GL(V_c)$.

W tym celu dobierzmy mniejsze otoczenie $e \in W \subset G$ takie, że $W \cdot W \subset U$, a w definicji przekształcenia $K\colon V \to V$ użyjmy funkcji $h\colon G \to \mathbb{R}$ takiej, że $h(e) = 1$, $h(x^{-1}) = h(x)$ oraz $h(x) = 0$ dla $x \in G \setminus W$ (rys. 7).

Niech $f = K(h)$. Oczywiście mamy $f(e) = \int_G h(x^{-1})h(x)dx > 0$. Jeżeli dla pewnego punktu $x \in G$ zachodzi $f(x) \neq 0$, to $\int_G h(xy^{-1})h(y)dy \neq 0$, a zatem istnieje element $y \in G$ taki, że $h(xy^{-1}) \neq 0$ oraz $h(y) \neq 0$. To może się zdarzyć tylko wtedy, gdy xy^{-1}, $y \in W$, a stąd $x = xy^{-1} \cdot y \in U$. Wykazaliśmy zatem, że funkcja f znika poza zbiorem U.

Ponieważ $P_c(f) \rightrightarrows f$ gdy $c \to 0$, to istnieje c tak małe, że dla wszystkich $x \notin U$ zachodzi nierówność $P_c(f)(x) < P_c(f)(e)$. Dla takiej liczby c zachodzi inkluzja $\ker\rho \subset U$.

Niech bowiem $x \in \ker\rho$. Wtedy $x(f') = f'$, gdzie $f' = P_c(f)$. Zatem dla dowolnego elementu $t \in G$ zachodzi równość $f'(tx) = f'(t)$. Podstawiając $t = e$ otrzymujemy $f'(x) = f'(e)$. Z poprzedniego akapitu wynika, że $x \in U$.

Gdyby grupa Liego G nie działała wiernie na jednej z przestrzeni V_c, to w dowolnie małym otoczeniu otwartym U punktu $e \in G$ istniałaby nietrywialna podgrupa. Tak się jednak zdarzyć nie może, gdyż grupy Liego nie mają „małych" podgrup: istnieje otoczenie otwarte jedynki, które zawiera tylko podgrupę trywialną.

Aby się o tym przekonać, użyjemy ponownie linearyzacji. Dla dowolnej grupy Liego G istnieje odpowiednik odwzorowania E. Jest to odwzorowanie $E\colon T_eG \to G$ określone na przestrzeni stycznej do G w punkcie e w następujący sposób. W kierunku wektora v wypuszczamy geodezyjną γ_v taką, że $\gamma_v'(0) = v$ i kładziemy $E(v) = \gamma_v(1)$ (rys. 8). Podobnie jak w przypadku grupy $SO(n)$, różniczka dE_0 jest identycznością, a zatem E przekształca dyfeomorficznie pewne otoczenie otwarte $0 \in W \subset T_eG$ na otwarte otoczenie $e \in G$. Wybierzmy podzbiór otwarty $0 \in U \subset T_eG$ tak, by $2U \subset W$ (rys. 9). Wykażemy, że zbiór $E(U)$ nie zawiera nietrywialnych podgrup grupy G.

Przypuśćmy, że zbiór $E(U)$ zawiera nietrywialną podgrupę H i wybierzmy $h \in H \setminus \{e\}$. Wtedy $h = E(v)$ dla pewnego $v \in U \setminus \{0\}$. Istnieje liczba naturalna r taka, że $2^r v \in 2U \setminus U$. Wtedy $h^{2^r} = E(2^r v) \in E(2U) \setminus E(U)$, podczas gdy $h^{2^r} \in H \subset E(U)$ – sprzeczność.

Powyższa uwaga kończy dowód, że dowolna grupa Liego G działa liniowo i wiernie na pewnej przestrzeni $V_c \approx \mathbb{R}^n$. Aby zanurzyć G w $SO(n)$ należy jeszcze wykazać, że G działa na tej przestrzeni poprzez izometrie. W tym celu zmodyfikujemy iloczyn skalarny na V_c za pomocą wzoru $\langle f, g\rangle = \int_G \langle x(f), x(g)\rangle dx$. Elementy $x \in G$ zachowują ten iloczyn skalarny, czyli są izometriami. Gdy wybierzemy bazę przestrzeni V_c ortonormalną względem tego iloczynu, to macierze opisujące działanie elementów $x \in G$ będą ortonormalne. Ponieważ grupa G jest spójna, to cała będzie zawarta w podgrupie $SO(n)$ izometrii zachowujących orientację.

Oczywiście o strukturze grup Liego można powiedzieć znacznie więcej. Jest to jednak temat, który musi zaczekać na inną okazję.