Geometria naturalna

Lesław W. SZCZERBA, Siedlce

W latach dwudziestych Alfred Tarski, chcąc sprawić przyjemność swemu nauczycielowi Stanisławowi Leśniewskiemu, udowodnił, że geometrię można zbudować w oparciu o mereologię [2] (patrz też [4]). Mereologia była teorią konkurencyjną do teorii mnogości (por. [1]). W intencji jej twórcy, Stanisława Leśniewskiego miała uniknąć wszelkich antynomii teorii mnogości. Później okazało się, że nie uniknęła, bo nie mogła uniknąć. O mereologii można myśleć podobnie jak o teorii mnogości, która jest teorią zbiorów z relacją pierwotną „być elementem", oznaczaną grecką literą ϵ. W przypadku mereologii przedmiotami, o których się mówi, są kolekcje, ale zupełnie dobrze można o nich myśleć jako o zbiorach, relacją pierwotną jest relacja „być częścią", którą można rozumieć jako relację zawierania oznaczaną symbolem $\subseteq$. Taka interpretacja wystarcza przynajmniej do teoriomnogościowego wyjaśnienia wyniku A. Tarskiego. Jego prezentacji poświęcona jest pierwsza część niniejszego artykułu. Ponieważ język mereologii nie jest dziś zbyt popularny, zaś artykuł Tarskiego dość szkicowy, wydało mi się to powtórzenie korzystnym.

Odczytanie w teorii mnogości pracy A. Tarskiego było przedmiotem prac seminarium Wandy Szmielew w latach siedemdziesiątych. Odczytanie było powiązane z licznymi uproszczeniami. Jest mi trudno, a być może byłoby to niemożliwe, ustalenie dzisiaj, kto jest odpowiedzialny za konkretne uproszczenie. Kluczową postacią był w każdym razie Zenon Piesyk, podówczas adiunkt Uniwersytetu w Łodzi.

Wynik Tarskiego można wyrazić krótko: Geometrię euklidesową można zbudować przyjmując jako uniwersum zbiór kul otwartych (w przypadku dwuwymiarowym – kół otwartych), a jako jedyny predykat pierwotny relację zawierania. W dyskusjach na Seminarium podkreślano, że takie podejście jest znacznie bardziej naturalne: pojęcie punktu powstaje z pojęcia kuli przez przyjęcie zerowych wymiarów. Można powiedzieć, że punkt jest granicą malejącego ciągu kul, których promień zbiega do zera. Trudno zaprzeczyć, że jest to pojęcie dość zawansowane.

Na pierwszy rzut oka pojęcie kuli jest pozbawione tych wszystkich niedogodności. Po krótkim zastanowieniu nie trudno zauważyć, że pojęcie kuli też ma pewne wady: patrząc na konkretną bryłę trudno mieć pewność, czy jej średnica jest we wszystkich kierunkach taka sama.

Okazuje się, że można zastąpić kule bryłami. Przy bryłach nie ma wątpliwości, czy rozpatrywany przedmiot jest bryłą czy nie. Zawieranie się brył też nie sprawia wielu trudności intuicyjnych. Niestety, w przypadku brył samo zawieranie nie wystarcza do budowy geometrii euklidesowej, trzebą ją uzupełnić relacją przystawania, która jednak pewne wątpliwości może wzbudzać.

1. Geometria kół i geometria kul

Jako punkt wyjścia do pokazania geometrii kół lub kul oraz tego, że można w tej geometrii zbudować zwykłą geometrię euklidesową, zostanie przyjęta odpowiednio płaszczyzna lub przestrzeń kartezjańska nad ciałem liczb rzeczywistych. W dalszym ciągu rozważania zostaną ograniczone do przypadku płaskiego. Ułatwi to sporządzanie rysunków, a uogólnienie na przypadek trójwymiarowy nie powinno sprawiać żadnych trudności.

Płaszczyzna kartezjańska jest to zbiór par liczb rzeczywistych. Pary te, zwane punktami kartezjańskimi, będą oznaczane małymi literami alfabetu łacińskiego. Wskaźniki u dołu będą oznaczać odpowiednio pierwszą i drugą współrzędną, czyli pierwszy i drugi człon punktu: $a = (a_1, a_2)$. Odległość między punktami oblicza się według znanego wzoru kartezjańskiego

$$|a-b| = \sqrt{(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2}.$$

Przez *koło otwarte* rozumie się zbiór wyznaczony przez punkt a, zwany *środkiem* koła, i liczbę rzeczywistą dodatnią α, zwaną *promieniem* tego koła:

$$\mathbb{K}(a, \alpha) = \{x : |a - x| < \alpha\}.$$

Koła otwarte będą oznaczane początkowymi dużymi literami łacińskimi: $A, \ldots, E$. Środek koła A będzie oznaczany przez $\mathbb{S}_A$, jego promień zaś przez $\mathbb{R}_A$. Zatem $\mathbb{K}(\mathbb{S}_A, \mathbb{R}_A) = A$. Rodzinę wszystkich kół otwartych oznaczać się będzie przez $\mathbb{K}$.

Inkluzja jest pojęciem teoriomnogościowym. W oparciu o relację inkluzji między kołami należy zdefiniować tradycyjne pojęcia geometryczne. Będą to te same pojęcia, które przyjął Tarski w [3]: pojęcie *punktu*, *leżenia między* oraz *równej odległości*. Standardowy model Tarskiego to płaszczyzna kartezjańska nad ciałem liczb rzeczywistych, punkty, oznaczane małymi literami alfabetu łacińskiego, to pary liczb rzeczywistych, leżenie między zaś i równa odległość zdefiniowane mogą być następująco:

$$\mathbb{B}_{\mathfrak{C}}(a, b, c) \leftrightarrow \exists_\alpha\ 0 \leq \alpha \leq 1 \wedge b = (1 - \alpha)a + \alpha b,$$
$$ab \equiv_{\mathfrak{C}} cd \leftrightarrow |a - b| = |c - d|\,.$$

Oznaczenia w tych formułach mają swe zwykłe znaczenia z algebry liniowej. Zmieniona została tylko notacja na wygodniejszą: relacja *leżenia między*, zamiast $\mu(a, b, c)$, jak w [3], jest oznaczana przez $\mathbb{B}_{\mathfrak{C}}(a, b, c)$, *równa odległość* zaś zamiast $\delta(a, b, c, d)$ zapisywana jest $ab \equiv_{\mathfrak{C}} cd$.

Obie relacje zostaną zdefiniowane w terminach gemetrii kół. Definicje te są wyjaśniane towarzyszącymi im twierdzeniami, które łatwo udowodnić metodami geometrii analitycznej.

Na początek zostanie rozważone pojęcie *kół przecinających się*:

Def. 1. $A \mathbin{\bigcirc\mkern-12mu\bigcirc} B \leftrightarrow \exists_C\ C \subseteq A, B.$

Tw. 1. $A \mathbin{\bigcirc\mkern-12mu\bigcirc} B \leftrightarrow |\mathbb{S}_A\mathbb{S}_B| \leq \mathbb{R}_A + \mathbb{R}_B$.

Zapis $C \subseteq A, B$ jest skrótem koniunkcji $C \subseteq A \wedge C \subseteq B$. Konwencja ta będzie dalej szeroko stosowana.

Następnie definiuje się kolejno *koła rozłączne*:

Def. 2. $A \mathbin{\circ\circ} B \leftrightarrow \neg A \mathbin{\bigcirc\mkern-12mu\bigcirc} B.$

Tw. 2. $A \mathbin{\circ\circ} B \leftrightarrow |\mathbb{S}_A\mathbb{S}_B| \geq \mathbb{R}_A + \mathbb{R}_B$.

Mówienie w tym przypadku o kołach, że są rozłączne, jest nadużyciem. W istocie koła te mają wspólny punkt. Poprawniej byłoby powiedzieć, że koła te mają rozłączne wnętrza. Poniżej będzie jednak stosowana terminologia „koła rozłączne", zamiast długiego „koła o rozłącznych wnętrzach", tym bardziej, że praktyka taka jest zgodna z powszechnie stosowanymi zwyczajami.

Koła styczne zewnętrznie:

Def. 3. $A \mathbin{\circ\mkern-4mu\circ} B \leftrightarrow \forall_{C,D}\ A \subseteq C, D \wedge C, D \mathbin{\circ\circ} B \rightarrow C \subseteq D \vee D \subseteq C.$

Tw. 3. $A \mathbin{\circ\mkern-4mu\circ} B \leftrightarrow |\mathbb{S}_A\mathbb{S}_B| = \mathbb{R}_A + \mathbb{R}_B$.

Koła styczne wewnętrznie:

Def. 4. $A \odot B \leftrightarrow A \subseteq B \wedge \exists_C\ A, B \mathbin{\circ\mkern-4mu\circ} C.$

Tw. 4. $A \odot B \leftrightarrow |\mathbb{S}_A\mathbb{S}_B| = \mathbb{R}_B - \mathbb{R}_A$.

Koła przystające:

Def. 5. $A \equiv B \leftrightarrow \forall_C\ \exists_{D,E}\ A, B \mathbin{\circ\mkern-4mu\circ} D, E \wedge D, E \not\subseteq C \wedge D \mathbin{\circ\circ} E.$

Tw. 5. $A \equiv B \leftrightarrow \mathbb{R}_A = \mathbb{R}_B$.

Koła współśrodkowe (relacja asymetryczna):

Def. 6. $A \circledcirc B \leftrightarrow A \subseteq B \wedge \forall_{C,D}\ A \mathbin{\circ\mkern-4mu\circ} C, D \odot B \rightarrow C \equiv D.$

Tw. 6. $A \circledcirc B \leftrightarrow A \subseteq B \wedge \mathbb{S}_A = \mathbb{S}_B$.

Koła współśrodkowe (relacja symetryczna):

Def. 7. $A \circledcirc B \leftrightarrow A \Subset B \vee B \Subset A$.

Tw. 7. $A \circledcirc B \leftrightarrow \mathbb{S}_A = \mathbb{S}_B$.

Powyższe pojęcia i twierdzenia wystarczają, by łatwo zdefiniować pojęcie punktu. Punktami będą rodziny kół współśrodkowych. Z twierdzenia 7 łatwo wywnioskować, że relacja współśrodkowości (symetryczna) jest również zwrotna i przechodnia, a zatem jest relacją równoważności. Jest zatem sens mówić o jej klasach abstrakcji:

$$[A]_{/\circledcirc} = \{B : A \circledcirc B\},$$

nazywać je *punktami* i oznaczać małymi literami pogrubionymi. Na tak zdefiniowanych punktach łatwo zdefiniować relację leżenia między oraz relację równej odległości.

Leżenie między dla kół:

Def. 8. $\mathbb{B}(ABC) \leftrightarrow \forall_D \; A, C \subseteq D \rightarrow B \subseteq D$.

Intuicyjnie oznacza to, że B zawiera się w uwypukleniu sumy kół A i C.

Leżenie między dla punktów:

Def. 9. $\mathbb{B}_{\mathfrak{K}}(\boldsymbol{abc}) \leftrightarrow \forall_{A \in \boldsymbol{a}} \forall_{C \in \boldsymbol{c}} \exists_{B \in \boldsymbol{b}} \; \mathbb{B}(ABC)$.

Równa odległość dla punktów:

Def. 10. $\boldsymbol{ab} \equiv_{\mathfrak{K}} \boldsymbol{cd} \leftrightarrow \exists_{A,B,C,D} \; A \in \boldsymbol{a} \wedge B \in \boldsymbol{b} \wedge C \in \boldsymbol{c} \wedge D \in \boldsymbol{d} \wedge$
$\wedge A \equiv B \equiv C \equiv D \wedge A \infty B \wedge C \infty D$.

Tak otrzymana struktura

$$\mathfrak{K} = \langle \mathbb{K}_{/\circledcirc}, \mathbb{B}_{\mathfrak{K}}, \equiv_{\mathfrak{K}} \rangle$$

jest izomorficzna z kartezjańską płaszczyzną euklidesową

$$\mathfrak{C} = \langle R^2, \mathbb{B}_{\mathfrak{C}}, \equiv_{\mathfrak{C}} \rangle.$$

Łatwo zauważyć, że izomorfimem tym jest funkcja przyporządkowująca punktowi kartezjańskiemu a rodzinę wszystkich kół o środku w tym punkcie:

$$\Phi(a) = \{\mathbb{K}(a, \alpha) : \alpha > 0\}.$$

Ostatecznie okazuje się, że można geometrię euklidesową płaską, na przykład taką jak opisana w [3], wyrazić jako teorię kół z jedną relacją pierwotną, relacją inkluzji. Powyższe rozumowanie bez istotnych zmian przebiega również w przypadku trójwymiarowym. Zatem geometrię euklidesową przestrzenną można wyrazić jako teorię kul z jedną relacją pierwotną, relacją inkluzji. Równie łatwe jest przeniesienie wyniku na wyższe wymiary.

2. Geometria figur i geometria brył

Pojęcie koła lub kuli jest niestety nie dość intuicyjne. Mając do czynienia z konkretną figurą lub bryłą nie sposób stwierdzić z całą pewnością, że jest to odpowiednio koło lub kula. Problem polega na tym, że obserwacje zawsze prowadzone są z pewną dokładnością. Może okazać się, że zniekształcenia są poniżej dokładności pomiaru, a nawet poniżej poziomu percepcji. Podniesienie dokładności pomiarów może doprowadzić do dyskwalifikacji kandydata na koło lub kulę.

Nie mają tej wady figury i bryły. Czym jest jednak figura? Nieprecyzyjnie mówiąc figurą jest to, co można narysować „w jednym kawałku" na kartce papieru. Czy można te intuicje uściślić?

Figura jest na pewno zbiorem punktów. Ponieważ ma się zmieścić na kartce papieru zatem

- *figura jest zbiorem ograniczonym.*

Ponadto

- *figura jest zbiorem domkniętym.*

Istotnie: rozróżnienie, że punkt brzegu należy lub nie należy do figury wymagałoby specjalnych konwencji, a to byłby już opis, a nie rysunek. W przestrzeniach kartezjańskich, które są zupełne, zbiory ograniczone i domknięte to dokładnie zbiory zwarte. Zatem

- *figura jest zbiorem zwartym.*

Narysowanie na płaszczyźnie jednowymiarowego fragmentu figury, na przykład odcinka, jest niemożliwe. W praktyce, każda kreska, nawet najcieńsza ma pewną szerokość. Można zatem założyć, że każda figura jest domknięciem swego wnętrza, a zatem

- *figura jest dziedziną zwartą.*

Figura powinna być zbiorem spójnym, a nawet sztywnym. Można to osiągnąć zakładając, że

- *wnętrze figury jest zbiorem spójnym.*

Ostatecznie rozważania te można podsumować następującą definicją:

Def. 11. *Figura jest to dziedzina zwarta o spójnym wnętrzu w dwuwymiarowej przestrzeni kartezjańskiej.*

Analogiczne rozumowanie prowadzi do określenia

Def. 12. *Bryła jest to dziedzina zwarta o spójnym wnętrzu w trójwymiarowej przestrzeni kartezjańskiej.*

Czy jest możliwe zbudowanie geometrii dwuwymiarowej w oparciu o pojęcie figury zamiast pojęcia koła? (Odpowiednio w przypadku geometrii przestrzennej – w oparciu o pojęcie bryły zamiast pojęcia kuli?) Okazuje się, że przyjmując jako jedyne pojęcie pozalogiczne pojęcie inkluzji – jest to niemożliwe. Istotnie, dowolne przekształcenie afiniczne, które nie jest podobieństwem, zachowuje zarówno pojęcie figury, jak i inkluzji, nie zachowuje natomiast pojęcia koła. Jeżeli jednak dopuścić drugą relację zwaną relacją przystawania, zadanie staje się wykonalne.

Figury będą oznaczane dużymi literami alfabetu łacińskiego. Nie ma tu konfliktu z oznaczaniem kół początkowymi dużymi literami alfabetu łacińskiego, gdyż każde koło jest figurą. Dwie figury X i Y są *przystające* (symbolicznie $X \equiv Y$) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje izometria przeprowadzająca X na Y.

Nadużywając terminologii, podobnie jak w przypadku kół, mówi się, że dwie figury *przecinają się*:

Def. 13. $X \mathbin{\bigcirc\mkern-12mu\bigcirc} Y \leftrightarrow \exists_Z \; Z \subseteq X, Y.$

Tw. 13. $X \mathbin{\bigcirc\mkern-12mu\bigcirc} Y \leftrightarrow \mathrm{Int}(X) \cap \mathrm{Int}(Y) \neq \emptyset.$

oraz, że figury są *rozłączne*, gdy nie przecinają się:

Def. 14. $X \mathbin{\circ\circ} Y \leftrightarrow \neg X \mathbin{\bigcirc\mkern-12mu\bigcirc} Y.$

Tw. 14. $X \mathbin{\circ\circ} Y \leftrightarrow \mathrm{Int}(X) \cap \mathrm{Int}(Y) = \emptyset.$

Za pomocą inkluzji można zdefiniować, co to znaczy, że figura zawiera się w sumie dwu innych figur:

Tw. 15. $X \subseteq Y \cup Z \leftrightarrow \forall_T \; T \subseteq X \rightarrow (T \mathbin{\bigcirc\mkern-12mu\bigcirc} Y \vee T \mathbin{\bigcirc\mkern-12mu\bigcirc} Z).$

a także, że figura zawiera sumę dwu figur:

Tw. 16. $Y \cup Z \subseteq X \leftrightarrow Y \subseteq X \wedge Z \subseteq X.$

W konsekwencji można w terminach inkluzji zdefiniować sumę mnogościową dwu figur

Tw. 17. $X = Y \cup Z \leftrightarrow X \subseteq Y \cup Z \wedge Y \cup Z \subseteq X.$

Należy zauważyć, że suma mnogościowa dwu figur nie zawsze jest figurą.

W przypadku, gdy sumowane figury przecinają się, suma tych figur jest figurą. Jeżeli natomiast są rozłączne i ich suma jest figurą, to te figury *przylegają*:

Def. 18. $X \obar Y \leftrightarrow \exists_Z\ X \cup Y = Z$.

Nietrudno pokazać, że

Tw. 19. $X \in \mathbb{K} \leftrightarrow \forall_{Y,Z \odot X}\ \exists_{T \odot X}\ T \equiv Y \wedge T \circledparallel Z \wedge (X \cup Y) \equiv (X \cup T)$.

Oznacza to, że pojęcie koła daje się zdefiniować w terminach figur, inkluzji i przystawnia. Ponieważ jak udowodnił Tarski [2] (por. też pierwszą część niniejszego artykułu) koła i inkluzja mogą służyć jako układ pojęć pierwotnych geometrii euklidesowej, zatem i w oparciu o pojęcia figury, inkluzji i przystawania można zbudować geometrię euklidesową. Podobnie jak w przypadku geometrii kół, tu też rozumowanie przenosi się bez istotnych zmian na przypadek trójwymiarowy. Otrzymuje się wówczas wynik, że układ pojęć: bryły, inkluzja i przystawanie wystarcza do zbudowania zwykłej euklidesowej geometrii przestrzennej.

Literatura

[1] Bolesław Sobociński, *Studies in Leśniewski's Mereology*, Polskie Towarzystwo Naukowe na Obczyźnie 5 (1954) str. 34–48.

[2] A. Tarski, *Les fondements de la géometrié des corps*, Księga Pamiątkowa Pierwszego Polskiego Zjazdu Matematycznego, Polskie Towarzystwo Matematyczne, Kraków (1929) str. 29–33.

[3] A. Tarski, *What is elementary geometry?*, The axiomatic methods with special references to geometry and physics. An international Symposium held at University of California, Berkeley. Ed. L. Henkin, P. Suppes, A. Tarski; North–Holland Publ. Co. Amsterdam (1959) str. 16–29.

[4] A. Tarski, *Foundations of the geometry of solids*, Logic, Semantics, Metamathematics. Papers from 1923–1938 (przetłumaczył J. H. Woodger) Clarendon Press Oxford (1956) (angielskie tłumaczenie [2]).