Podstawy Matematyki w Wieku XX

Wiktor MAREK, Lexington Ken.,
Jan MYCIELSKI, Boulder Colo., USA

Autorzy dziękują p. Mirosławowi Truszczyńskiemu za wnikliwe uwagi.

Podstawy są dziedziną matematyki zajmującą się poprawnością rozumowań matematycznych, podstawowymi strukturami matematyki (takimi, które pozwalają zdefiniować wszelkie inne struktury) oraz efektywnością obliczeń matematycznych. Te trzy obszary skrystalizowały się w XX wieku w postaci trzech dużych rozdziałów matematyki: *logiki matematycznej, teorii mnogości* i *teorii obliczalności.* Postaramy się opisać rozwój każdego z tych trzech rozdziałów podstaw. Oczywiście, opis nasz będzie, z konieczności, raczej pobieżnym szkicem.

W wieku dwudziestym podstawami matematyki zajmowali się bardzo znani matematycy i filozofowie n.p. Cantor, Frege, Hilbert, Russell, Gödel, Tarski, Kleene, Martin, Skolem, Solovay, Shelah i Turing. Oczywiście, spotkamy poniżej wiele innych nazwisk – lista ta jest bardzo niekompletna. W Polsce, oprócz Tarskiego, badali podstawy: Chwistek, Ehrenfeucht, Grzegorczyk, Jaśkowski, Leśniewski, Lindenbaum, Łoś, Mostowski, Rasiowa, Sikorski, autorzy tego artykułu i wielu innych. Podręczniki logiki i podstaw (często książki bardzo obszerne) zawierają głównie wyniki badań matematyków dwudziestowiecznych. Obiektywne streszczenie dwudziestowiecznego rozwoju podstaw nie jest zatem zadaniem prostym, szczególnie że musimy to wszystko zmieścić na kilkunastu stronach maszynopisu. Ograniczymy się zatem do omówienia najistotniejszych rezultatów, m.in. twierdzeń Gödla o zupełności logiki pierwszego rzędu i o niezupełności bogatszych teorii matematycznych, niektórych twierdzeń o niezależności, informacji o roli aksjomatów istnienia bardzo dużych liczb kardynalnych itd.

Popatrzmy najpierw na stosunek podstaw matematyki do reszty matematyki. Nasuwa się nam następująca analogia. Dobry mechanik samochodowy nie musi znać termodynamiki (na której opiera się funkcjonowanie samochodów). Podobnie dobry matematyk, który nie ma pretensji do głębszego wykształcenia poza swoją specjalnością, nie musi znać podstaw matematyki. Co więcej, popularyzacja termodynamiki wśród mechaników samochodowych nie jest zadaniem łatwym – i podobne trudności napotyka popularyzacja podstaw matematyki wśród matematyków. Niektórych matematyków irytuje sam fakt, że ktoś o zainteresowaniach filozoficznych usiłuje opisać, choćby w części, funkcjonowanie ich umysłów i wyjaśniać w abstrakcyjny sposób, czym jest matematyka. Podkreślają oni, że matematyka, jaką znamy, uprawiana jest od tysiącleci i osiągnęła wielkie sukcesy na polu opisywania rzeczywistości bez tego, by ktoś wyjaśniał jej naturę.

Ale podstawy dają *matematyczną* teorię tego, czym jest matematyka, tak jak fizyka daje matematyczną teorię różnych innych zjawisk i procesów fizycznych. Jest naturalne, że – jak każdy opis rzeczywistości fizycznej – podstawy są niekompletne i stale są rozwijane i ulepszane.

Ponieważ podstawy traktują matematykę jako zjawisko fizyczne (proces konstrukcji pewnych tekstów), należy dodać, iż istnieją filozofowie i matematycy, którzy myślą, że ten punkt widzenia jest nierozsądny, że coś zaciemnia. Wierzą oni, iż matematyka jest nauką, która bada świat idei platońskich (które są transcendentalne, czyli istnieją poza światem fizycznym, niezależnie od ludzkości). A zatem, że matematyka nie jest zjawiskiem czysto fizycznym, bo ma na nią bezpośredni wpływ świat pozafizycznych idei. Jednakże matematyczne podstawy matematyki obywają się bez takich założeń i prowadzą do czysto fizykalnego i nader kompletnego opisu zjawiska, jakim jest matematyka. Dlatego liczni filozofowie i matematycy (w tym autorzy tego artykułu) odrzucają platonizm, jako założenie sprzeczne z „brzytwą Ockhama" (tj. tym, że

Gödel, o którym będziemy pisać wiele w tym artykule, reprezentował tę opinię.

najprostsze teorie zgodne z faktami, czyli „nie mnożące bytów ponad potrzebę", są najbardziej przekonywające).

Jak wspomnieliśmy wyżej, łatwo wykazać niekompletność współczesnych podstaw. Na przykład **nie** tłumaczą one, czym jest dobra matematyka. Wiemy, że matematyka ma strukturę postaci: aksjomaty-definicje-twierdzenia-dowody, ale nie wiemy, dlaczego niektóre prace matematyków wprawiają nas w zachwyt, a inne wydają się pozbawione pomysłów lub wręcz nudne. Podstawy nie tłumaczą też **jak** matematycy budują dowody swych przypuszczeń. Ponieważ nie mamy dobrego modelu procesu budowy dowodów, jest więc jeszcze daleko do prawdziwie efektywnego automatycznego dowodzenia twierdzeń (choć i w tej dziedzinie osiągnięto spektakularne sukcesy).

Jak żąda tego nasza definicja, na wykładach podstaw matematyki studenci poznają zazwyczaj logikę matematyczną, teorię mnogości oraz wprowadzenie do teorii obliczalności (rekursji). Wszystkie te części podstaw są ze sobą powiązane i w historii, którą poniżej przedstawimy, będą przenikać się wzajemnie. Ale zapytajmy najpierw, jaki był ich stan w roku 1900.

Logika miała zawsze co najmniej dwa aspekty – matematyczny i filozoficzny. Aspekt filozoficzny pochodzi od starożytnych Greków. Filozofia wymagała pewnej precyzji rozumowania. W tym celu filozofowie greccy, przede wszystkim Arystoteles, chcieli zrozumieć, czym są poprawne dowody. Sformułowali więc sylogistykę, kodyfikującą niektóre poprawne rozumowania. Z punktu widzenia dzisiejszej logiki były to reguły dotyczące relacji jednoargumentowych, czyli unarnych. Tak więc, jeśli Sokrates jest Grekiem, a wszyscy Grecy są śmiertelni, to i Sokrates jest śmiertelny. Dziś zapisalibyśmy ten sylogizm jako $[grek(Sokrates) \wedge \forall x(grek(x) \Rightarrow \acute{s}miertelny(x))] \Rightarrow \acute{s}miertelny(Sokrates)$. $grek(\cdot)$ i $\acute{s}miertelny(\cdot)$ są w tej formule symbolami do opisu relacji unarnych. Użyliśmy tu kwantyfikatora ogólnego $\forall x$ (dla każdego x). Podobnie wprowadza się kwantyfikator egzystencjalny $\exists x$ (istnieje x). Grecy nie formalizowali sylogizmów za pomocą formuł. Niemniej jednak analizowali sylogizmy i przez ponad dwa tysiące lat teoria sylogizmów stanowiła centrum logiki.

Matematycy starożytni rozumowali podobnie jak my, intuicyjnie rozumieli, co jest poprawnym dowodem matematycznym, a co nim nie jest. Dowody, które wymyślili, są po dziś dzień wykładane w szkołach i spełniają dzisiejsze standardy ścisłości. W wieku XVII Leibniz miał nadzieję stworzenia *lingua universalis*, języka, który pozwalałby wyrazić zdania matematyki, i *calculus ratiocinator*, który by sprowadzał rozumowania do rachunków. W połowie XIX wieku Boole wprowadził, poprzez analogię z algebrą liczb, algebrę zdań. Dalszy rozwój logiki zawdzięczamy DeMorganowi, Peirce'owi, Fregemu i innym matematykom i filozofom. Było rzeczą jasną, że logika, jaką posługuje się matematyka, wykracza poza sylogistykę, już choćby dlatego, iż zajmuje się nie tylko relacjami unarnymi, lecz także takimi, które wiążą więcej niż jeden obiekt. Na przykład, podstawowa w matematyce relacja mniejszości wśród liczb nie jest unarna, lecz binarna, bo wiąże pary elementów.

Rozwój analizy matematycznej w wieku XVIII i brak dostatecznie jasnych definicji ciągłości, granicy funkcji i innych podstawowych pojęć analizy, spowodował, że trzeba było sprecyzować takie pojęcia, jak liczba rzeczywista, ciąg, funkcja, itd. Pytanie, czym są liczby rzeczywiste, przewijało się w pracach wielu matematyków i filozofów dziewiętnastowiecznych. Trzeba było zdefiniować (by użyć terminologii informatycznej), jakie są podstawowe „struktury danych" matematyki. Epokowa książka Dedekinda z r. 1883, *Was sind und was sollen die Zahlen* zawierała następujące stwierdzenie: „W nauce, co dowód posiada, nie powinno być bez dowodu przyjęte". Dedekind **udowodnił** podstawowe własności liczb rzeczywistych, własności, które poprzednio przyjmowano jako oczywiste. Stąd też pod koniec wieku XIX nadszedł czas budowy podstaw matematyki.

Spośród wielu matematyków, którzy przyczynili się do rozpoznania podstawowych matematycznych struktur, najważniejszym był G. Cantor, który udowodnił, że wszystkie przedmioty, jakie rozważają matematycy, można rozumieć jako zbiory. Co więcej, okazało się, że taka interpretacja usuwa wszystkie niejasności, które dawniej pojawiały się w matematyce. Na przykład, za pomocą pojęcia zbioru łatwo zdefiniować pojęcie liczby naturalnej, stąd zaś liczby całkowitej i wymiernej. Jak pokazał Dedekind (i niezależnie Cantor), przy użyciu pojęcia zbioru (nieco trudniej) definiuje się też liczby rzeczywiste.

Pojęcie zbioru par pozwala zdefiniować z kolei pojęcie funkcji. Podejście takie zrywało z poprzednio używanym pojęciem funkcji jako przepisu, algorytmu, który z elementami dziedziny pozwalał łączyć wartości. W latach 80. i 90. XIX wieku Cantor udowodnił wiele twierdzeń teorii mnogości (zbiorów). Cantor zanalizował też pojęcia takie, jak porządek liniowy, wprowadził pojęcie dobrego porządku (a w konsekwencji i liczby porządkowej). Stąd już był tylko krok do dowodów używających indukcji pozaskończonej. Było to całkowicie nowe i silne narzędzie w rękach matematyków. Wyszło ono istotnie poza indukcję względem liczb naturalnych oraz repertuar dowodowy odziedziczony po Grekach.

Teoria obliczalności w końcu XIX wieku jeszcze nie istniała. Istniały tylko liczne przykłady algorytmów. Na przykład algorytm Euklidesa dla znajdowania największego wspólnego podzielnika lub algorytm Cardano rozwiązywania równań trzeciego stopnia. Sprawy efektywności zajmowały matematyków i filozofów greckich, a także matematyków późniejszych. Newton i inni wielcy analitycy aż do połowy XIX wieku nie akceptowali prawdziwości zdań egzystencjalnych nie popartych algorytmem konstrukcji odpowiedniego przykładu. Jeśli więc twierdzili oni, np., że równanie różniczkowe $y' = -y$ z warunkiem początkowym $y(1{,}3) = 17$ ma rozwiązanie, to trzeba było wiedzieć, jak owo rozwiązanie skonstruować, innymi słowy, podać przepis na obliczanie wartości takiej funkcji $y(\cdot)$.

Urządzenia ułatwiające liczenie znane są od starożytności. Liczydła różnych systemów potrzebne były do obliczeń. Wielu wynalazców, inżynierów i matematyków, budowało maszyny, które ułatwiały liczenie. Artyleria i finanse wymagały szczególnie wielu obliczeń (i często dość dokładnych). Stąd też, ze sztabów wojskowych, urzędów podatkowych i banków pochodziło zapotrzebowanie na urządzenia liczące. Zostały wynalezione maszyny do dodawania i mnożenia, potrzebne w spisach ludności, i inne maszyny mechaniczne ułatwiające obliczenia. Ale pytania o istotę pojęcia obliczenia były rzadkie. W pierwszej połowie XIX wieku Babbage zaprojektował nawet rodzaj mechanicznego komputera używającego programów, ale pytanie, czym jest funkcja obliczalna, nie zostało jeszcze postawione.

Spróbujemy dalej przedstawić rozwój trzech głównych nurtów podstaw matematyki: teorii mnogości, logiki i teorii modeli, oraz teorii funkcji obliczalnych w wieku XX.

W roku 1900 odbył się w Paryżu Międzynarodowy Kongres Matematyczny, na którym Hilbert wygłosił referat pt. „Problemy Matematyczne". Nadzwyczaj jasno Hilbert opisuje tam rolę matematyki i proces twórczości matematyka. Po owym interesującym wstępie, autor przedstawia 23 otwarte problemy. Trzy z nich (nr. 1, 2 i 10) dotyczą podstaw matematyki.

Problem nr. 1 należał do teorii mnogości i pochodził od Cantora. Była to tak zwana hipoteza continuum (czy istnieją nieskończone zbiory liczb rzeczywistych, które nie są równoliczne ani ze zbiorem liczb naturalnych, ani z całym zbiorem liczb rzeczywistych). Problem nr. 2 należał do logiki (czy układ aksjomatów arytmetyki lub analizy jest niesprzeczny), problem zaś nr. 10 dotyczył teorii obliczalności (czy istnieje algorytm rozstrzygający istnienie całkowitych rozwiązań równań algebraicznych o współczynnikach całkowitych). Tak więc trzy wspomniane wyżej główne tematy podstaw pojawiły się już w wykładzie Hilberta.

Kwestia rozumienia pojęcia zbioru zajmowała (i zajmuje nadal) matematyków badających podstawy przez cały wiek XX. Naiwne podejście do tego pojęcia, zaproponowane przez Fregego i Russella (każda klasa, którą wymyślę, jest zbiorem), doprowadziło do sprzeczności, bowiem nieco później Russell zauważył, co następuje: rozpatrzmy klasę zbiorów R, którą we współczesnej notacji definiujemy: $\{x : x \notin x\}$. Zapytajmy, czy R jest zbiorem. Jeśli tak jest, to, zgodnie z formułą definiującą R, mamy natychmiast równoważność

$$R \in R \Leftrightarrow R \notin R.$$

Zatem R nie może być zbiorem. Stało się jasne, że pojęcie zbioru musi zostać sprecyzowane tak, aby nie doprowadzało do sprzeczności. Nie oznacza to, że społeczność matematyczna (w szczególności Cantor) kiedykolwiek przyjmowała za prawdziwy schemat istnienia zbiorów proponowany przez Fregego (że każda klasa jest zbiorem).

Ten sprzeczny schemat ma postać $\exists x \forall y [y \in x \Leftrightarrow \varphi(y)]$, gdzie φ jest dowolną formułą języka teorii mnogości.

Niemniej jednak było jasne, że pojęcie zbioru wymaga dobrego opisu. Trzeba było coś zrobić, by pojęcie zbioru mogło służyć matematykom, i z odpowiednią propozycją wyszedł Zermelo. W roku 1908 zbudował on układ aksjomatów opisujący zbiory i metody budowania zbiorów, przy czym aksjomaty nie pociągały za sobą wniosku, że klasa R jest zbiorem. Po pewnych ulepszeniach Skolema i Fraenkla wyłoniła się teoria mnogości Zermelo–Fraenkla, powszechnie dziś przyjęta aksjomatyzacja teorii mnogości i całej matematyki, zwana teorią ZFC.

Spośród aksjomatów tej teorii jeden budził zaniepokojenie niektórych matematyków, mianowicie aksjomat wyboru. Aksjomat ten mówi, że dla dowolnej niepustej rodziny zbiorów niepustych i parami rozłącznych istnieje zbiór (zwany selektorem) mający z każdym elementem owej rodziny dokładnie jeden element wspólny. Jest to uogólnienie oczywistej własności rodzin skończonych, ale jest ono nader niekonstruktywne. Jeśli bowiem myślimy o zbiorach jako tworach, które można konstruować z innych zbiorów za pomocą rozmaitych operacji, to zupełnie nie widać, jakie operacje konstruowałyby ów selektor, który – zgodnie z aksjomatem wyboru – ma istnieć. Dziś pogodziliśmy się z aksjomatem wyboru, który w rozmaitych formach (np. lematu Kuratowskiego–Zorna albo zasady dobrego uporządkowania) jest powszechnie używany. Niemniej jednak przyjęcie aksjomatu wyboru powoduje, że musimy też zaakceptować jego konsekwencje, na przykład paradoksalny rozkład kuli (patrz poniżej), sprzeczny z intuicjami fizycznymi. Na ogół konsekwencje aksjomatu wyboru są dalsze od zastosowań matematyki, niż twierdzenia, które obywają się bez tego aksjomatu.

Hipoteza continuum mówi, że każdy nieskończony zbiór liczb rzeczywistych jest przeliczalny bądź jest równoliczny z całym zbiorem liczb rzeczywistych. Teoria mnogości z aksjomatem wyboru dowodzi, iż jest to równoważne temu, że rodzina wszystkich podzbiorów zbioru liczb naturalnych ma liczność $\aleph_1$ (tj. najkrótszego zbioru dobrze uporządkowanego i nieprzeliczalnego). Próby rozwiązania tego problemu doprowadziły do wielu interesujących wyników i wskazały na niezupełność dotychczasowego zrozumienia pojęcia zbioru liczb rzeczywistych. K. Gödel w drugiej połowie lat 30. wykazał, że hipoteza continuum jest **niesprzeczna** z aksjomatyką teorii mnogości. Krok ten był podobny do innego, wcześniejszego rewolucyjnego wyniku Gödla – mianowicie dowodu niezupełności arytmetyki (który będziemy omawiać poniżej).

Technika użyta przez Gödla wiąże się z odwróceniem niejako obiekcji co do aksjomatu wyboru. Zamiast pytać, jak definiować zbiory, Gödel ogranicza zbiory do tych, które dadzą się skonstruować w trakcie (pozaskończonego) procesu, który pokrótce opiszemy poniżej. Postępujemy tak: definiujmy indukcyjnie „poziomy konstruowalne”, tak że zbiory należące do kolejnego poziomu są definiowalne w strukturze złożonej z obiektów poprzedniego poziomu. Definicje są formułami, a formułom można przypisać kody będące liczbami naturalnymi. Teraz możemy już definiować dobry porządek zbiorów konstruowalnych. Postępujemy indukcyjnie. Wystarczy wskazać porządek kolejnego poziomu. Najpierw porządkujemy k-tki obiektów z poziomów poprzednich. Następnie zaś dany poziom porządkujemy według par: kod formuły, ciąg parametrów (z uprzednich poziomów). Wszystko to, wraz z dodatkowym faktem (wielce nietrywialnym), mianowicie tym, że elementarne podstruktury poziomów są same izomorficzne z poziomami, wystarcza do wykazania, iż wszystkie konstruowalne zbiory liczb naturalnych są skonstruowane w krokach o indeksach przeliczalnych. To już łatwo implikuje hipotezę continuum wewnątrz uniwersum złożonego ze zbiorów konstruowalnych. Jeszcze tylko musimy wykazać, że wszystkie aksjomaty ZFC są spełnione w uniwersum zbiorów konstruowalnych, ale to już jest łatwe. W szczególności aksjomatyka ZFC pozostaje niesprzeczna po dołączeniu hipotezy continuum. Co więcej, wszystkie zbiory konstruowalne (i tylko one) są konstruowalne wewnątrz uniwersum konstruowalnego. Tak więc wszelkie konsekwencje teorii ZFC i zdania mówiącego, że wszystkie zbiory są konstruowalne, są prawdziwe wewnątrz uniwersum zbiorów konstruowalnych. Wewnątrz uniwersum złożonego ze zbiorów konstruowalnych prawdziwa jest nawet *uogólniona* hipoteza continuum: dla każdej liczby porządkowej α, jest $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$.

Klasa L zbiorów konstruowalnych może być wzbogacona przez dodatkowe obiekty, które mogą być używane w powyższej definicji indukcyjnej. Na przykład, jeśli dodamy wszystkie liczby rzeczywiste, otrzymujemy interesujące uniwersum zwane $L[\mathbf{R}]$.

Teoria mnogości ZFC pozwala na przypisanie każdemu zbiorowi x jego *rangi*, którą oznaczamy $rank(x)$. Zbiorowi pustemu przypisujemy rangę 0. Dla zbiorów niepustych, $rank(x) = \sup\{rank(y) + 1 : y \in x\}$. Stąd już krok do zdefiniowania *poziomów von Neumanna*, V_α, mianowicie $V_\alpha = \{x : rank(x) < \alpha\}$. Każde V_α jest zbiorem. Zbiory V_α pozwalają z kolei zdefiniować zbiory *porządkowo definiowalne*. Zbiór x jest porządkowo definiowalny, jeśli dla jakiegoś poziomu von Neumanna V_α i jakiejś formuły $\varphi(\cdot)$, x jest zbiorem tych elementów y z V_α, które spełniają w $\langle V_\alpha, \in\rangle$ formułę $\varphi(y)$. Klasę zbiorów definiowalnych z liczb porządkowych oznaczamy OD. Jak wykazał Gödel, uniwersum złożone ze zbiorów *dziedzicznie definiowalnych z liczb porządkowych* (tj. takich, że one same, wszystkie ich elementy, elementy elementów etc. są definiowalne z liczb porządkowych) spełnia wszystkie aksjomaty ZFC. Podobnie jak $L[\mathbf{R}]$ definiujemy klasę $OD[\mathbf{R}]$. Jeden z problemów, jakie sformułujemy na końcu tego artykułu, odnosi się właśnie do tego uniwersum.

Długo nie umiano wykazać że hipoteza continuum jest niezależna, tzn. nie może być udowodniona na gruncie teorii mnogości ZFC (o ile ta ostatnia jest niesprzeczna). Zostało to wykazane w roku 1963 przez P.J. Cohena. Rozumowanie Cohena jest bardziej skomplikowane niż argument Gödla i opiera się na konstrukcji modelu boole'owskiego – klasy złożonej z pewnych funkcji o wartościach w algebrze Boole'a podzbiorów otwarto-domkniętych przestrzeni topologicznej. Przy odpowiedniej definicji relacji należenia i relacji równości dla takich funkcji, klasa tych funkcji nadaje wszystkim aksjomatom ZFC wartość boole'owską **1**. Ale dla odpowiednio dobranej przestrzeni topologicznej wartość formuły opisującej hipotezę continuum w tym uniwersum jest równa **0**. Teraz już tylko trzeba dowieść, że cokolwiek da się wykazać z formuł przyjmujących w owym modelu wartość **1**, też ma wartość **1**. Tak więc hipoteza continuum jest zdaniem niezależnym na gruncie teorii mnogości. Ani nie jest dowodliwa (Cohen), ani jej negacja nie jest dowodliwa (Gödel). Przy okazji dowodu niezależności hipotezy continuum Cohen wprowadził metodę tzw. forcingu. Metoda ta była następnie użyta do bardzo wielu dowodów niezależności, w tym do dowodu niezależności aksjomatu wyboru od pozostałych aksjomatów ZFC. Dość wspomnieć, że w latach sześćdziesiątych (i później) ciągle pojawiały się twierdzenia o niezależności różnych zdań od teorii mnogości ZFC. Istnieje jednak bardziej pozytywna strona badań w teorii mnogości: niemal wszystkie te zdania niezależne dają się jednak udowodnić lub obalić w dwóch naturalnych poduniwersach, mianowicie poduniwersum zbiorów konstruowalnych L oraz (przy użyciu hipotez o istnieniu dużych liczb kardynalnych) we wspomnianym wyżej poduniwersum $L[\mathbf{R}]$.

W związku z tym motywem przewodnim badań teorii mnogości stały się tzw. duże liczby kardynalne. Różnych klas takich liczb jest wiele – skoncentrujemy się tutaj na omówieniu jednego ich rodzaju, mianowicie liczb mierzalnych. Oto mianowicie liczbę kardynalną κ nazywamy mierzalną, jeśli dla zbioru X mocy κ, w rodzinie wszystkich podzbiorów zbioru X istnieje taka miara o wartościach 0, 1, że miara każdego zbioru jednoelementowego jest równa 0, miara całego zbioru X jest 1, suma zaś mniej niż κ zbiorów miary 0 ma miarę 0. Na gruncie teorii mnogości ZFC nie można udowodnić istnienia liczb mierzalnych, dlatego że w uniwersum L nie ma odpowiednich miar. Ale założenie istnienia liczb mierzalnych, lub innych dużych liczb kardynalnych, ma liczne ciekawe i głębokie konsekwencje w analizie rzeczywistej i kombinatoryce, szczególnie jej części dotyczącej zbiorów nieskończonych.

Praktykujący matematyk, algebraik albo analityk, nieczęsto styka się z problemami niezależnymi od teorii mnogości ZFC. Fakt ten jest zadziwiający, bowiem teoria mnogości została odkryta przez Cantora ponad 100 lat temu. Mimo że matematyka jest stale inspirowana przez nauki przyrodnicze (opisy rzeczywistości fizycznej), prawie nigdy nie prowadzi nas do zdań niezależnych od ZFC lub do nowych aksjomatów. Co więcej, w ostatnich latach wiele słynnych problemów (np. hipotezy Fermata oraz Bieberbacha) zostało rozwiązanych przy użyciu bardzo słabych podteorii teorii ZFC. Zważmy, że sama niezależność jakiegoś zdania od teorii mnogości nie mówi nam nic o prawdziwości tego zdania. Mówi ona tylko, że takie zdanie jest fałszywe w jakimś uniwersum będącym modelem teorii ZFC. Tak więc wyniki o niezależności różnych zdań zazwyczaj mówią tylko o tym, co się dzieje w pewnych poduniwersach. Jeśli ograniczymy się do uniwersum zbiorów konstruowalnych, to otrzymamy zupełnie inny obraz struktury zbiorów liczb rzeczywistych, niż w uniwersum złożonym ze zbiorów konstruowalnych z miary o wartościach 0, 1 na liczbie mierzalnej. Natomiast budowanie uniwersum wszystkich zbiorów jest procesem, który nie zakończył się (i prawdopodobnie nigdy się nie zakończy).

Szczególnie jasno widać rolę różnych uniwersów, gdy spojrzeć na konsekwencje aksjomatu determinacji. W latach 60. Mycielski i Steinhaus rozważali zdanie o istnieniu strategii zwycięskich dla klasy gier pozycyjnych należących do $L[\mathbf{R}]$, zwane *aksjomatem determinacji*. Istnienie takich strategii okazało się bardzo silnym założeniem (przeczącym aksjomatowi konstruowalności). Co więcej, aksjomat determinacji daje wiele konsekwencji zgodnych z intuicją fizyczną i pozwala rozwiązać wiele problemów dotyczących struktury zbioru liczb rzeczywistych i jego podzbiorów. Determinacja dostarczyła nowego impetu badaniom deskryptywnej teorii mnogości (tj. teorii definiowalnych podzbiorów tzw. przestrzeni polskich, czyli przestrzeni metrycznych ośrodkowych i zupełnych). W ostatnich latach Martin, Woodin i Steele wykazali, że istnienie owych strategii dla gier w $L[\mathbf{R}]$ wynika z aksjomatów istnienia „dużych" liczb kardynalnych.

Teoria mnogości odgrywa dziś rolę analogiczną do tej, jaką geometria Euklidesa grała przez ponad półtora tysiąca lat – do odkryć Newtona i Leibniza, mianowicie jest teorią uniwersalną dla współczesnej matematyki. Ale jej aksjomatyka nie jest zupełna. Niekiedy w trakcie rozwoju matematyki napotykamy nowe zasady dotyczące zbiorów, na przykład aksjomat determinacji dla klasy $L[\mathbf{R}]$. Rozwój matematyki zadecyduje, które z tych i innych nowych aksjomatów, jakie niechybnie się pojawią, będą powszechnie akceptowane w końcu XXI wieku.

Na zakończenie omówienia teorii mnogości podkreślmy raz jeszcze, że teoria mnogości ZFC wystarcza do wyprowadzenia całej niemal współczesnej matematyki. Nie wiemy dlaczego tak się dzieje, aksjomatyka pochodzi z początku wieku (z roku 1908), a mimo to po dziś dzień 99% wyników matematycznych nie wymaga środków spoza ZFC. Wzmocnienia ZFC aksjomatami istnienia dużych liczb kardynalnych nie są inspirowane przez zastosowania, lecz raczej przez pojęcia tworzone w wyobraźni ludzkiej i nie mające interpretacji fizycznych. Tylko aksjomat determinacji dla $L[\mathbf{R}]$ inspirowany jest przez intuicje fizyczne.

Przejdźmy teraz do omówienia logiki i teorii modeli. Rozwój logiki matematycznej wymagał sprecyzowania przedmiotu logiki. Na początku XX wieku było ono nieco różne od dzisiejszego. Co prawda Frege wprowadził formalizm, który później został powszechnie przyjęty, ale sporo czasu zajęło znalezienie lepszej notacji! Whitehead i Russell, w książce „Principia Mathematica", której pierwszy tom ukazał się w roku 1910, spopularyzowali współczesny opis składni logiki, ale włączyli do niej część współczesnej teorii mnogości. Pierwszy naprawdę nowoczesny podręcznik logiki matematycznej, napisany przez Hilberta i Ackermanna, ukazał się w roku 1928. Zasadniczy problem, jakie to formuły są zawsze prawdziwe, przy założeniu jakiegoś zbioru formuł A, został rozstrzygnięty przez Gödla w jego pracy doktorskiej opublikowanej w roku 1930. Wykazał tam Gödel, że reguły dowodzenia, wskazane przez Fregego i spopularyzowane przez Whiteheada i Russella, są zupełne – to, co daje się dowieść za pomocą tych reguł z aksjomatyki A, to dokładnie zdania prawdziwe we wszystkich modelach aksjomatyki A. Własność tę nazywamy twierdzeniem o zupełności dla logiki pierwszego rzędu.

Streśćmy pokrótce dowód twierdzenia o zupełności (pochodzący od Henkina i nieco inny niż oryginalny dowód Gödla). Najpierw musimy wykazać, że cokolwiek jest dowodliwe (w systemie „Principia Matematica") z aksjomatyki A, jest prawdziwe we wszystkich modelach A. To wiedzieli już Whitehead i Russell. W drugą stronę rozumowanie jest trudniejsze – jeśli A nie dowodzi jakiejś formuły φ, to musimy skonstruować model, w którym A jest prawdziwa, ale φ nie jest. Model taki konstruujemy, dodając odpowiednie stałe i budując na nich interpretację spełniającą aksjomaty A oraz $\neg\varphi$. Na nowych stałych musimy definiować relacje tak, by aksjomaty A były spełnione, ale formuła φ nie. Korzystając z tego, że „nowe" stałe nie są wspomniane w A, rozszerzamy niesprzeczną teorię $A \cup \{\neg\varphi\}$ do teorii zupełnej T, mającej tę własność, iż ilekroć zdanie egzystencjalne $\exists x\psi(x)$ należy do T, to dla jakiejś stałej c, $\psi(c)$ należy do T. Taką konstrukcję musimy powtórzyć nieskończenie wiele razy, coraz to dodając nowe stałe. Ale każda formuła jest skończona i wobec tego, po owej iteracji wykonanej nieskończenie wiele razy, własność zupełności względem zbioru dodanych stałych będzie spełniona. Z tak skonstruowanego zbioru formuł już łatwo odczytać model, w którym A jest prawdziwe, ale φ nie. Na dodatek, jeśli język, z którego zaczynaliśmy konstrukcję, jest przeliczalny, to i model, jaki został skonstruowany, jest przeliczalny. Wynika stąd coś dziwnego, mianowicie że zbiór zdań prawdziwych arytmetyki liczb rzeczywistych (a nawet teorii mnogości!) ma modele przeliczalne. Pokazuje to, że logika „pierwszego rzędu" (dla której mamy własność zupełności) nie opisuje struktur nieskończonych w sposób jednoznaczny. Łatwo też zobaczyć, że arytmetyka Peano (w języku pierwszego rzędu) ma wiele nieizomorficznych modeli. Jeśli zezwolimy na pisanie zdań, w których będą kwantyfikatory przebiegające *podzbiory* zbioru liczb naturalnych, to „paradoks" nieizomorficznych struktur spełniających arytmetykę Peano znika, ale tylko pozornie. W każdym modelu teorii mnogości taka teoria ma jeden model, ma jednak inne, gdy zmieniamy model teorii mnogości.

Drugi problem Hilberta dotyczył niesprzeczności arytmetyki Peano. Jak można by wykazać ową niesprzeczność? Intuicyjnie arytmetyka Peano jest niesprzeczna – aksjomaty dotyczące sumy i iloczynu sprawdza się „na palcach", a nawet schemat indukcji jest też oczywisty – każde dziecko wie, że jeśli ustawić kamienie domina pionowo jeden za drugim i popchnąć, to wszystkie się przewrócą, nawet jeśli jest ich bardzo wiele. Jak można formalnie udowodnić, że żaden dowód nie wykaże równości $0 = 1$? Ale co to jest dowód?

Nieco uogólniając „drugi problem Hilberta", można pytać o niesprzeczność matematyki (nie tylko arytmetyki, ale teorii ZFC). W roku 1931 Gödel wykazał, że nie da się udowodnić niesprzeczności arytmetyki (ani teorii ZFC) w niej samej. Samo wyrażenie tej własności nie jest zupełnie proste. Zauważmy, że wewnątrz arytmetyki możemy efektywnie ponumerować formuły języka arytmetyki. Mianowicie formuła jest ciągiem symboli alfabetu języka arytmetyki.

Numerujemy więc symbole języka. Potem patrzymy na ciągi skończone symboli. Niektóre są poprawnie zbudowanymi formułami, inne zaś nie. Przypiszmy teraz ciągowi liczb $\langle a_1, \ldots, a_k \rangle$, odpowiadających kolejnym symbolom, liczbę $2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot \ldots p_k^{a_k}$ (gdzie p_k jest k-tą liczbą pierwszą), która będzie numerem całego ciągu. Łatwo rozpoznać, kiedy liczba m jest kodem formuły arytmetycznej. Następnie, względnie łatwo rozpoznać, czy liczba jest kodem dla aksjomatu arytmetyki (żmudne to, ale oczywiście możliwe). Dalej, możemy kodować ciągi formuł jako liczby, i znowu łatwo (acz żmudnie) można rozpoznać, czy dana liczba koduje poprawny dowód. Teraz możemy napisać zdanie arytmetyczne Con(PA), które mówi: „z aksjomatyki Peano nie da się wywieść formuły $0 = 1$". Otóż Gödel wykazał, że o ile arytmetyka Peano jest niesprzeczna, to Con(PA) dowodu nie ma! Oczywiście w teorii ZFC dowodzimy, że i negacja ($\neg Con$(PA)) dowodu w PA nie ma, bowiem PA posiada model. W szczególności, arytmetyka Peano nie jest teorią zupełną. Twierdzenie to zachodzi w silniejszej jeszcze formie. Mianowicie żadne niesprzeczne rozszerzenie arytmetyki Peano o skończoną liczbę aksjomatów nie jest zupełne. W licznych dziełach popularyzatorskich po dziś dzień pisze się o tym niezwykłym wyniku Gödla rzeczy wielce nieprawdziwe (na przykład takie, że Gödel wykazał, iż teorie zupełne nie istnieją).

Do czasu udowodnienia niezupełności arytmetyki (1931) wydawało się matematykom, że każdy problem dotyczący liczb naturalnych, a nawet każdy problem teorii mnogości da się rozwiązać na podstawie znanych już od jakiegoś czasu aksjomatów. Natomiast Gödel dowiódł, że pewne zdania arytmetyczne oraz ich negacje nie dadzą się udowodnić ani obalić, nawet w najsilniejszej znanej teorii, mianowicie teorii mnogości.

Oprócz zdania Con(PA) znaleziono też różne własności teorioliczbowe albo kombinatoryczne niezależne od aksjomatyki Peano, w szczególności rozmaite uogólnienia twierdzenia Ramseya o kolorowaniu grafów. Dowody wielu z tych uogólnień wymagają metod analizy, a czasem i teorii mnogości. Co więcej, okazało się, że zdania takie wiążą się silnie z rozmaitymi aksjomatami „wielkich liczb kardynalnych". Badania Parisa, Solovaya i Friedmana dały wiele takich twierdzeń.

Logika, którą prezentowaliśmy powyżej, zajmuje się opisem struktur badanych przez matematyków. Teoria takich struktur została rozwinięta przez Tarskiego i jego uczniów (w oparciu o badania Schrödera, Skolema i innych). Jest to tzw. *teoria modeli*, która jest dużym działem matematyki znajdującym się na pograniczu logiki, algebry i analizy.

Wszyscy pamiętamy, że Cauchy wprowadził $\varepsilon - \delta$ definicję ciągłości po to, by uniknąć używania liczb nieskończenie małych. Matematycy XVII i XVIII wieku używali wielkości nieskończenie małych bez zadowalających definicji tych pojęć. Korzystając z technik teoriomodelowych, A. Robinson wykazał w latach 60., że pojęcie nieskończenie małych można w pełni uściślić. Dziś istnieją podręczniki, w których rozwija się analizę, używając wielkości nieskończenie małych w całkowicie jasny sposób.

W praktyce matematycznej niemal zawsze używamy logik „wielosortowych" (jest to też istotne w informatyce). Logiki wielosortowe dają się zredukować do logiki pierwszego rzędu, a ta z kolei do prostszej jeszcze logiki równościowej Birkhoffa.

Przejdźmy teraz do zagadnień obliczalności. W trakcie dowodu twierdzenia o niezupełności arytmetyki, które opisaliśmy powyżej, Gödel rozważał klasę funkcji, które dziś nazywamy obliczalnymi (rekurencyjnymi). Nazwijmy zbiór liczb naturalnych obliczalnym, jeśli jego funkcja charakterystyczna jest obliczalna, a rekurencyjnie przeliczalnym, jeśli jest pusty lub jest zbiorem wartości jakiejś funkcji obliczalnej. Otóż Gödel wykazał, że zbiór (kodów) twierdzeń arytmetyki Peano jest rekurencyjnie przeliczalny, ale nie jest obliczalny. Dalszy krok w naszym zrozumieniu pojęcia obliczalności został postawiony przez Turinga, który wprowadził pojęcie maszyny (dziś nazywanej maszyną Turinga) i wykazał istnienie uniwersalnej takiej maszyny, tj. maszyny, która za pomocą odpowiednich parametrów jest w stanie symulować każdą maszynę. Wreszcie Kleene głęboko rozwinął teorię obliczalnych funkcji częściowych.

Maszyna Turinga operuje na *taśmie* podzielonej na *komórki* (komórki te ponumerowane są liczbami naturalnymi). Komórka taka może być pusta lub może być w niej 0 lub 1. Działanie maszyny jest opisane przez akcje jej *głowicy pisząco-czytającej*. Głowica ta znajduje się zawsze w jakimś *stanie* (ze skończonego zbioru stanów S). Poza tym głowica *wskazuje* na jakąś komórkę. Akcje głowicy są jednoznacznie wyznaczone przez *funkcję przejścia*. W zależności od stanu głowicy i od symbolu w komórce, na którą wskazuje głowica, głowica zmienia zapis w komórce, zmienia swój stan i przesuwa się w prawo lub w lewo. Jeden ze stanów jest wyróżniony – kiedy maszyna go osiąga – staje. Funkcja f z liczb naturalnych w liczby naturalne może być reprezentowana przez maszynę M w taki sposób. Dana wejściowa n zapisana jest przez kolejnych n jedynek. Maszyna liczy i staje zapisując kolejnych $f(n)$ jedynek. Jeśli tak jest dla każdej liczby n z dziedziny funkcji f, to mówimy, że funkcja f jest reprezentowana przez maszynę M. Turing wykazał, że maszyny reprezentują dokładnie obliczalne funkcje częściowe.

Pojęcie maszyny Turinga lub funkcji obliczalnej o argumentach i wartościach całkowitych pozwala też zbudować adekwatną definicję funkcji obliczalnych o argumentach i wartościach rzeczywistych. Teorię taką rozwijali w latach międzywojennych Banach i Mazur. Okazuje się, że wszystkie funkcje obliczalne są ciągłe na swojej dziedzinie, ale dziedzina może być np. zbiorem liczb niewymiernych i funkcja może nie mieć ciągłego przedłużenia na żadną liczbę wymierną. Teoria Banacha i Mazura stanowi rozwiązanie dziewiętnastowiecznego problemu „czym są funkcje?". Z jednej strony mamy ścisłą teoriomnogościową ogólną definicję funkcji. Z drugiej strony mamy ścisłą definicję funkcji obliczalnych opartą na jasnych przepisach obliczania ich wartości.

Teoria obliczalności i, w szczególności, maszyny Turinga pojawiły się jako ogólne teoretyczne modele dobrze zdefiniowanych procedur obliczeniowych (czyli algorytmów). Niebawem elektronika poczyniła odpowiednie postępy i można było budować fizyczne maszyny Turinga. Do postępu przyczyniła się II wojna światowa, a następnie „zimna wojna". Trzeba było „łamać" niemiecki szyfr Enigma i maszyny to czyniące były pierwszymi komputerami (acz kandydatów do tego tytułu jest więcej). Następnie zaś potrzebne były maszyny obliczeniowe do budowania broni jądrowych i elektrowni atomowych. Po nadzwyczajnym sukcesie ogólnego pojęcia obliczalności zaczęto wprowadzać bardziej konkretne pojęcia lepiej modelujące funkcje, które obliczane są na komputerach. W szczególności badano funkcje opisywane przez maszyny Turinga, w których liczba kroków jest ograniczona przez jakiś wielomian względem rozmiaru danych wejściowych (klasa PTIME), a także klasę funkcji, w których rozmiar aktualnie używanej części taśmy jest ograniczony przez podobny wielomian (klasa PSPACE). Dziś PTIME stanowi najlepszą matematyczną definicję funkcji praktycznie obliczalnych. Klasy PTIME, PSPACE i pokrewne wiążą się z rozmaitymi aspektami definiowalności różnych zbiorów liczb naturalnych za pomocą efektywnych środków, a pytanie, czy dwie takie klasy (PTIME i NPTIME) są równe, jest jednym z podstawowych nierozwiązanych problemów podstaw matematyki. Pytanie, czy PTIME = NPTIME, ma bardzo wiele reprezentacji, w tym kombinatorycznych, teorioliczbowych i grafowych. W logice reprezentowane jest ono za pomocą „problemu spełnialności" – czy istnieje algorytm odpowiadający na pytanie, czy dana formuła φ rachunku zdań jest spełnialna – algorytm dający odpowiedź w czasie proporcjonalnym do wielomianu względem długości formuły φ.

W drugiej połowie XX wieku zastosowania w informatyce i, w szczególności, konieczność zbudowania solidnych podstaw informatyki były jednym z motywów rozwoju podstaw. Tak się bowiem składa, że badania informatyczne korzystają z wielu dziedzin matematyki i to nawet dziedzin dość abstrakcyjnych. Wystarczy choćby spojrzeć na związki teorii kategorii z programowaniem za pomocą obiektów (OOP).

Wróćmy teraz do 10. problemu Hilberta. Okazało się, że nie istnieje algorytm, który pozwala stwierdzić, które równania diofantyczne mają rozwiązania. Po wielu latach badań Davis, Putnam, Julia Robinson i Matijasevicz wykazali, że algorytmu takiego nie ma. Ich twierdzenie mówi nam, że już elementarna teoria liczb całkowitych jest bardzo głęboka i nie ma jednolitej metody rozwiązywania jej problemów.

Powróćmy na chwilę do ogólnych problemów podstaw matematyki. Praktyka matematyczna pokazuje, że matematyka jest nie tyle nauką co sztuką, sztuką budowania teorii dedukcyjnych. Na przykład hipoteza Goldbacha jest dobrze potwierdzonym faktem empirycznym, ale matematycy nie przyjmują jej do arsenału swoich aksjomatów, bo nie jest ona podstawą żadnej ciekawej teorii (a także dlatego, że jest nadzieja, iż da się ją udowodnić na gruncie dotychczasowych aksjomatów). Zatem w matematyce czystej chodzi przede wszystkim o sztukę dedukcji raczej niż o fakty. Hipoteza continuum jest jeszcze bardziej abstrakcyjna, bo nie ma żadnego znaczenia fizycznego; mimo to stanowi ona problem nadzwyczaj piękny.

Hipoteza ta mówi, że każda liczba parzysta większa od 2 jest sumą dwóch liczb pierwszych.

Nie znaczy to, że matematyka czysta bierze się tylko z wyobraźni ludzkiej. Przeciwnie, prawie cała matematyka inspirowana jest przez opisy świata fizycznego. Na przykład pojęcie zbioru nieskończonego inspirowane jest przez na pozór niekończące się procesy oraz przez kontinuum fizycznej czasoprzestrzeni.

Wspomnimy jeszcze, że podstawy matematyki wyłoniły w XX wieku wiele jeszcze innych dziedzin, w tym logiki nieklasyczne i modalne, logikę konstruktywną (intuicjonizm), rekurencyjną matematykę i inne specjalności. Nie mamy niestety miejsca by omówić w tym artykule, choćby pobieżnie, osiągnięcia tych dziedzin.

Spójrzmy teraz na rolę Polski w rozwoju dwudziestowiecznych podstaw matematyki. Odzyskanie niepodległości Polski w roku 1918 zbiegło się ze znacznym ożywieniem badań naukowych. Wydawane w Polsce „Fundamenta Mathematicae" (których pierwszy tom ukazał się w roku 1920) skoncentrowały się na tematyce szeroko pojętych podstaw matematyki. Profil „Fundamentów" był i jest szerszy niż tylko logika i teoria mnogości – bardzo silnie reprezentowana jest tam topologia, o której tu nic nie piszemy. Niemniej jednak, od samego początku, „Fundamenta" publikowały wiele zasadniczych prac w dziedzinie podstaw matematyki.

Do „wielkich nazwisk" podstaw matematyki w Polsce między wojnami należą Kuratowski, Sierpiński, a zwłaszcza Tarski. Wyniki tych badaczy znajdują się dziś w podręcznikach logiki i teorii mnogości. Lista ważniejszych wyników zarówno ich, jak i ich współpracowników, jest długa i trudno byłoby adekwatnie przedstawić wszystkie. Z konieczności wspomnimy tylko najważniejsze kierunki. Podstawy w Polsce między wojnami uprawiane były głównie w Warszawie i we Lwowie. Badania w dziedzinie „czystej" teorii mnogości prowadzili Sierpiński i Tarski, w dziedzinie „dużych" liczb kardynalnych Sierpiński, Tarski i Ulam (stąd właśnie wzięły się liczby mierzalne wspomniane wyżej).

Ulepszając wcześniejsze twierdzenie Hausdorffa w 1924 r., Banach i Tarski pokazali, jak można rozłożyć kulę na skończoną liczbę odpowiednich części i z tych samych części złożyć dwie kule, obie tej samej wielkości, co wyjściowa kula.

Oczywiście, części takie nie mogą być mierzalne (no bo wtedy już łatwo wykazać, że $1 = 2$). Istnienie takiego rozkładu wymaga założenia aksjomatu wyboru i powojenne badania determinacji (Steinhaus i Mycielski) dały bogatą teorię zbiorów bez tego paradoksu. W teorii tej wszystkie zbiory są mierzalne.

Tarski wprowadził definicję spełniania i wykazał jego podstawowe własności. Był to prawdziwy początek teorii modeli. Tarski udowodnił też twierdzenie o niedefiniowalności pojęcia prawdy, udowodnił wiele twierdzeń o liczbach kardynalnych oraz twierdzenie o rozstrzygalności geometrii elementarnej. Badano też problemy związane z aksjomatem wyboru (Tarski, Lindenbaum i Mostowski), deskryptywną teorię mnogości (Kuratowski, Sierpiński, Tarski i inni) i teorię „części i całości" (Leśniewski, Tarski). We wszystkich tych dziedzinach znaczące były wyniki Alfreda Tarskiego. Jego wszechstronne zainteresowania i mnogość twierdzeń doprowadziły do rozkwitu podstaw w Polsce w latach międzywojennych.

W czasie drugiej wojny światowej zginęło wielu polskich matematyków, w szczególności logicy Lindenbaum i Wajsberg, a inni rozproszyli się po świecie. Tarski znalazł pracę w Uniwersytecie Stanu Kalifornia w Berkeley. Szczęściem w Polsce pojawiła się nowa generacja badaczy podstaw, a jako uboczny wynik rządów komunistycznych uległa też zmianie organizacja nauki, stwarzając wiele nowych miejsc, gdzie matematyka (w tym podstawy) mogła być uprawiana. Na okres powojenny przypadł rozkwit twórczości Andrzeja Mostowskiego. Do swojej śmierci w r. 1975, odgrywał on wielką rolę w badaniach podstaw matematyki w Warszawie. Grupa jego uczniów (Ehrenfeucht, Grzegorczyk, Marek, Rasiowa i Sikorski), a także matematycy wrocławscy (w tym Łoś, Mycielski, Pacholski, Ryll-Nardzewski i Węglorz) wznowili i rozwinęli badania podstaw. W Warszawie uzyskano znaczące wyniki w teorii rekursji, niezupełności arytmetyki, teorii mnogości, logikach nieklasycznych i innych dziedzinach. Kiedy w r. 1950 Tarski zaproponował program badań teorii modeli, Mostowski i jego współpracownicy (szczególnie Ehrenfeucht) odegrali w nim dużą rolę, np. znaleźli tzw. metodę elementów nieodróżnialnych. Łoś (który pracował we Wrocławiu, a później w Toruniu i w Warszawie) wprowadził fundamentalną konstukcję ultraproduktu, a także pojęcie „kategoryczności w mocy", jedno z podstawowych narzędzi teorii modeli. Prace Cohena spowodowały, że wielu uczniów Mostowskiego zajęło się modelami teorii mnogości i jej fragmentów. To z kolei doprowadziło do uogólnień pojęcia kwantyfikatora, a także do badań fragmentów arytmetyki (istotnych w podstawach informatyki). Istotne też były wyniki Szmielew, w tym dowód rozstrzygalności teorii grup abelowych i wiele rezultatów w podstawach geometrii. Rasiowa i Sikorski rozwijali algebraiczne podejście do logiki. Dalsze badania Rasiowej ewoluowały w kierunku podstaw informatyki, prowadząc do nowych zastosowań podstaw.

We Wrocławiu działali: Łoś, Ryll-Nardzewski i Słupecki, którzy uzyskali ważne wyniki w teorii modeli (wspomniane wyżej) oraz w aksjomatyzacji arytmetyki. Tam też, w roku 1961 Mycielski i Steinhaus sformułowali aksjomat determinacji. Teoria determinacji należy nadal do bardzo żywych tematów teorii mnogości.

I dzisiaj badania podstaw kontynuowane są w Polsce, przede wszystkim w Uniwersytecie Warszawskim, Uniwersytecie Wrocławskim i Instytucie Matematycznym PAN, a także w innych ośrodkach. Można oczekiwać, że i dalej będą prowadzone.

Czas na podsumowanie. Spytajmy więc jakie są największe osiągnięcia podstaw matematyki w dwudziestym wieku? Wskażemy tu trzy, naszym zdaniem najważniejsze.

• Został zbudowany ścisły język dla matematyki. Możemy więc dziś powiedzieć, czym są zdania matematyczne oraz co to jest dowód, czyli wyprowadzenie zdania z jakiegoś zbioru aksjomatów. Twierdzenie Gödla o zupełności dla logiki pierwszego rzędu pokazuje adekwatność tego pojęcia dowodu względem sprecyzowanej przez Tarskiego semantyki opartej na pojęciu struktury relacyjnej (modelu). Matematycy dawniejszych wieków odwoływali się do intuicji logicznej, która dopiero w XX wieku została w pełni opisana i wyjaśniona.

• Została zbudowana aksjomatyczna teoria mnogości oparta na jednym pojęciu pierwotnym: należeniu elementu do zbioru. Dzisiejsza matematyka jest ugruntowana na tej teorii. Jej aksjomaty są tak proste, że można je zmieścić na jednej stronie. Niemniej teoria ZFC nie rozstrzyga wielu pytań z zakresu arytmetyki liczb naturalnych lub podstaw analizy matematycznej. Nadal trwa rozbudowa teorii ZFC za pomocą nowych mocnych aksjomatów.

• Została zbudowana teoria funkcji obliczalnych i algorytmów. Mamy jasne rozróżnienie między ogólnym pojęciem funkcji, a jego podklasą funkcji obliczalnych (o argumentach i wartościach naturalnych lub rzeczywistych).

Znikło dawne pomieszanie między ogólnym pojęciem funkcji i bardziej specjalnym pojęciem funkcji obliczalnych. Badane są też bardziej konkretne pojęcia (na przykład klasy PTIME i NPTIME).

Zatem podstawy matematyki uległy wielkiemu rozwojowi w XX wieku, pomimo tego, że naturalna hipoteza, iż podstawowe teorie matematyczne (PA, ZFC) są zupełne, została obalona przez Gödla. Stwierdzenie Hilberta, że „Musimy wiedzieć, będziemy wiedzieć" okazało się zbyt śmiałe – matematyka jest bogatsza i mniej uchwytna niż sądzono. A jednak uzyskano odpowiedzi na podstawowe pytania XIX wieku i odpowiedzi te okazały się zaskakujące i piękne. Nasuwa się pytanie, czy podstawy matematyki (i informatyki) za sto lat będą nadal oparte na pojęciach, na których były oparte w wieku dwudziestym. Zaryzykujmy twierdzenie, że uniwersum zbiorów z relacją należenia pozostanie fundamentalną strukturą, na której opierać się będzie cała matematyka.

Na zakończenie sformułujemy trzy otwarte problemy podstaw matematyki, które wydają nam się szczególnie ważne.

– *Rozwinąć efektywne metody automatycznego budowania dowodów hipotez matematycznych, a przynajmniej takich, które mają proste dowody*! Istnieją już interesujące metody tego rodzaju (zajmuje się tym dziedzina nazywana „automatyczne dowodzenie twierdzeń"), ale te metody ani nie umieją budować większości dowodów, które matematykom wydają się łatwe, ani dowody, które te metody budują matematykom nie wydają się łatwe. Poza tym dotychczasowe metody nie są dynamiczne w tym sensie, że nie umieją posługiwać się wiedzą matematyczną, którą można by im dostarczać. Mamy nadzieję, iż postępy sztucznej inteligencji w XXI wieku doprowadzą do znalezienia efektywnych, dynamicznych metod dowodzenia hipotez matematycznych.

– *Czy wszystkie zbiory liczb rzeczywistych należące do klasy OD lub nawet do klasy* $OD[\mathbf{R}]$ *(patrz powyżej) są zdeterminowane w sensie Mycielskiego-Steinhausa*? Jest to hipoteza podobna do hipotezy continuum w tym sensie, że jest ona niezależna od aksjomatów ZFC plus wszystkie znane aksjomaty istnienia dużych liczb kardynalnych i jest także niesprzeczna z teorią ZFC przy założeniu istnienia dużych liczb kardynalnych.

– *Czy* PTIME $\neq$ NPTIME *lub choćby* PTIME $\neq$ PSPACE?

Pytania te i podobne dominują współczesną informatykę teoretyczną i pierwsze z nich można rozumieć jako problem trudności pytań typu: „czy istnieje dowód danej hipotezy nie przekraczający danej długości". Na razie problem ten opiera się wysiłkom wielu informatyków, logików i matematyków.