Pod prąd

Tomasz NOWICKI

1. Dlaczego nikt w szkole nie słucha nauczyciela matematyki?

Każdemu nauczycielowi, a nauczycielowi matematyki szczególnie często, zdarza się wykładać temat zupełnie niezainteresowanemu gronu słuchaczy. Najczęściej reakcją sali jest martwa cisza, w wyjątkowo aktywnych i życzliwych grupach komentarze i pytania – po co nam rachunek zdań, przemiana pokoleń, czy klasyfikacja ubezdźwięcznień. Nigdy nie będziemy używać schematu Bernoullego, cewki Malpighiego czy średniówki. Martwa cisza, albo szmer rozmów, chichoty i szurgot przeglądanych teczek jest równie częstym gościem sal seminaryjnych, gdzie nie ma tak wyraźnie zaznaczonej hierarchii nauczyciel – uczeń.

Kiedy mamy na sali jedną czy dwie obojętne lub wrogie osoby, albo jeśli zajęcia mają charakter incydentalny, to nie ma czym się przejmować. Jeżeli jednak zajęcia mają trwać semestr, cały rok, albo nawet kilka dni z rzędu, a w całej klasie nie możemy znaleźć choćby jednej przyjaznej duszy, to urzeczywistnienie przygotowanego planu może okazać się niewyobrażalną męczarnią i to zarówno dla słuchaczy jak i dla prowadzącego.

Tego rodzaju doświadczenia są znane też tym, którzy udzielali w czasach studenckich korepetycji na zlecenie rodziców dzieci odmawiających aktywności umysłowej czy to z domniemanego lenistwa, czy to z powodu krzywdy jaką im wyrządzili słabi pedagodzy, nauczyciele odbębniający zajęcia, albo nazbyt wymagający wielbiciele swoich dziedzin, dzielący uczniów na wybitnych przyszłych uczonych i nic nie znaczącą resztę.

Bardzo ciężko jest uczestniczyć w takich zajęciach, a jeszcze trudniej jest je prowadzić. Po studiach matematycznych w Uniwersytecie Warszawskim uczyłem przez dziesięć lat matematyki i statystyki w SGGW – studentami byli przyszli weterynarze, leśnicy, rolnicy, melioranci i mechanizatorzy. Nie po to szli na uczelnię rolniczą, żeby poznawać całki, ekstrema związane, macierze, zmienne losowe, przedziały ufności, testy istotności oraz inne równie egzotyczne i zupełnie niepotrzebne pojęcia. Również przez kilkanaście lat nauczania w UW często wykładałem matematykę przyszłym biologom, psychologom, ekonomistom, czy socjologom. Ich nastawienie nie było inne. Podobnie też było na zajęciach sobotnio–niedzielnych dla studentów pracujących, a również w liceach, czy to państwowych, czy prywatnych.

Jakie są przyczyny odmowy współpracy intelektualnej ze strony studentów? Pomińmy tu problem zabijania przez system szkolny naturalnej ciekawości dzieci. Pomińmy błędy pedagogiczne i dydaktyczne ich poprzednich nauczycieli. Jest jak jest i co można z tym zrobić? Zacznijmy od banału: matematyka jest nudna, bo jest niezrozumiała. Jest niezrozumiała, bo jest trudna. Jest trudna, bo trzeba się jej cały czas uczyć. Uczyć się nie sposób, bo jest nudna. Błędne koło zawstydzonego pijaka.

Wyposażenie nauczyciela matematyki – program, podręcznik, doświadczenie – nie podpowiada jak motywować uczniów. Najczęściej decyduje o tym nastawienie do studentów, a to jest przekazywane w środowisku przez osmozę. Nauczyciel jest rozliczany z realizacji programu, a nie z tego jaki porządek zostawi w głowach. Obawiam się, że również w przypadkach programów autorskich i zindywidualizowanych sukcesem nie jest podniesienie średniego poziomu, ale osiągnięcia szczytowe – hodowla wyczynowców.

Kiedy prowadzimy zajęcia bezpośrednio związane z głównym kierunkiem kształcenia możemy oczekiwać przynajmniej średniej, wewnętrznej motywacji słuchaczy. Matematyka na matematyce, fizyce, w klasach matfiz, w kółkach zainteresowań jest inaczej odbierana niż na psychologii, zootechnice czy grafice. Jednak, nawet w tak komfortowych warunkach jak grupy gwiazdkowe, nie można spodziewać się nieustannej wytężonej pracy, a co dopiero na tych kierunkach, gdzie często uczestnicy zajęć znaleźli się przez wybór negatywny – tam nie miało być matematyki.

Doświadczenia krańcowe – z jednej strony ścisłe zaprogramowane zajęcia z gwiazdkowymi grupami studentów matematyki, albo ze studentami informatyki (najlepiej wśród wszystkich kandydatów zdającymi ogólnouniwersytecki egzamin wstępny z matematyki), a z drugiej strony swobodne w wyborze treści konwersatoria ze studentami I roku Wydziału Grafiki ASP – są oczywiście bardzo różne, a jednak można próbować odszukać wspólny mianownik.

Niemal od początku mojej pracy nauczycielskiej próbowałem wmawiać studentom, że nie warto tracić czasu. Skoro mają spędzić co najmniej 60 godzin w semestrze na przeczekiwaniu matematyki równie dobrze (po odrobieniu ukradkiem w ostatniej ławce ćwiczeń z niemieckiego i opisie doświadczeń chemicznych) mogą próbować coś z zajęć skorzystać. Oczywiście jest to z punktu widzenia realizacji zaplanowanego materiału program defetystyczny. Z drugiej strony abstrakcyjne polecenie: siedź, słuchaj i korzystaj, jeśli potrafisz, spotka się z obywatelskim nieposłuszeństwem, chyba że pójdzie za tym konkretna propozycja. Belfer musi być showmanem, ale show powinien mieć solidną osnowę. Nie można opowiadać przez całe zajęcia anegdotek. Czyli wracamy do programu, całek, macierzy i duchowej nieobecności słuchaczy.

Nauczyciel poza oczywistym (a nie zawsze faktycznym) opanowaniem materii na co najmniej dwa stopnie ponad uczniem powinien mieć ogólną wizję roli swego przedmiotu w otaczającym świecie. Taka spójna wizja nie może zmieniać się od klasy do klasy, ani zależeć od poziomu słuchaczy – zmieniać się może tylko jej przedstawianie, opakowanie w słowa.

2. Dlaczego to, co robimy w szkole to nauka, a nie badania lub poznawanie?

W tej części naszej kultury, której zależy na tradycji greckich filozofów, renesansowych badaczy, uczonych z przełomu wieku XVII i XVIII, oświeceniowych encyklopedystów, dziewiętnastowiecznych specjalistów i kongresów nauki ostatniego stulecia, zakorzeniony jest paradygmat naukowy. Uczeni mówią, że świat jest poznawalny przez doświadczenie i rozum. Doświadczenia zwiększające poznanie muszą być sprawdzalne, powtarzalne przez niezależne zespoły badaczy w innym miejscu i czasie. Teorie muszą dawać więcej niż do nich włożono – nie tylko dokładniej i dogłębniej opisywać dotychczas znany świat , ale i przewidywać nowe, sprawdzalne zjawiska. Rozumowania i argumenty powinny dawać się prześledzić do najdrobniejszych detali niezależnie od obecności ich autora. Ten rodzaj społecznej akceptacji nazywamy obiektywnością nauki.

Każda dziedzina nauki ma swój własny język, którym świat opisuje. Hermetyczność nauk, poza rzadkim wyrafinowaniem intelektualnym, wynika głównie z rozwoju tych języków. Słownictwo i kontekst w biologii są odmienne niż w filologii, fizyce czy archeologii. Jeśli po odrzuceniu pewnych obcobrzmiących terminów możemy rozumieć (choćby powierzchownie) o czym mówią uczeni, to dlatego, że języki tych dziedzin jeszcze w swej ewolucji nie odbiegły zanadto od języka potocznego i są jeszcze dosyć ze sobą spokrewnione. Odwołują się te języki do obiektów powszechnie znanych, albo przynajmniej takich, o których można mówić prostymi analogiami. Jednak nawet wtedy kontekst różnych gałęzi wiedzy niesie odmienne znaczenia, bowiem w obrębie poszczególnych dyscyplin na co innego kładzie się akcent i od innych cech się abstrahuje. Słowo ewolucja – choć budzi podobne skojarzenia – inaczej jest rozumiane w biologii, fizyce czy filologii.

Ta umiejętność abstrahowania stanowi o sile nauki, ale w pierwszym przybliżeniu prowadzi do jej rozdrobnienia. Rzadkie są przypadki, kiedy jeszcze silniejsze abstrahowanie prowadzi do syntezy nauk, tej syntezy, która z wady specjalizacji czyni zaletę różnorodności punktów widzenia. Abstrahowanie jest sztuką trudną, wybór tego co istotne i odrzucenie tego co nieistotne nie jest oczywisty. Kłopoty z fizyką w szkole często spowodowane są tym, że nie wiadomo, w którym miejscu należy użyć dodatkowej wiedzy, a w którym pominąć efekty uboczne.

Nauczanie encyklopedyczne polega na przekazywaniu efektów wielowiekowego abstrahowania bez pokazywania samego procesu. Przekazujemy uczniom schematy i klasyfikacje, narzucając im wybór istotne/nieistotne dokonany przez pokolenia badaczy. W istocie przekazujemy następujące posłanie – świat jest poznawalny i już został (w zasadzie) poznany. Nie przedstawiamy tajemnic i hipotetyczności naszej wiedzy z obawy, że uczniowie zlekceważą nauczyciela, który nie wie wszystkiego i sam zadaje pytania, na które nie zna odpowiedzi, a także dlatego, że w odkryte, osłabione ignorancją miejsca światłej wiedzy może wcisnąć się zabobon, ciemnota i magia. Tak szczytny cel powoduje, że zabija się w uczniach ciekawość, instynkt badawczy, a buduje się zniechęcenie i odrzucenie postulatu poznawalności świata i możliwości jego racjonalnego objaśnienia. A przecież z wielu świadectw widzimy, że wystarczy wśród pedagogów-encyklopedystów jeden nauczyciel, któryby pokazywał, że tajemnice są i jak sobie z nimi radzić, aby w ten sposób rozbudzić zainteresowanie niekoniecznie jego własną dziedziną.

Matematyka jest nauką budowaną na świadomości abstrahowania. Początkowe pojęcia w matematyce – liczba, przestrzeń, figura, związki, operacje i przekształcenia – są już abstrakcjami. Nauczanie w matematyce zaczyna się od abstrakcji, a nie jak w szeregu innych dziedzin na abstrakcji kończy. Bardzo szybko od zabawy patyczkami i liczydłami przechodzi się do operacji na symbolach i to nie symbolach tych przedmiotów, ale symbolach ich pewnych (niejasnych początkowo) własności. Przedmioty matematyki nie są przedmiotami fizycznymi, obiektami poznawalnymi zmysłami. Próby oddziaływania na wyobraźnię słuchaczy, przedstawianie dobitnych przykładów wymaga niezłej gimnastyki ze strony nauczyciela. Mało tego, większość matematyki po trzeciej klasie szkoły podstawowej, to wiedza i umiejętności potrzebne na potem, bez dostępnych modeli. Przecież wielokrotnie nauczyciele fizyki/chemii/geografii mówią matematykowi – dlaczego jeszcze nie przerobiłeś wektorów/proporcji/skali, zaraz mi to będzie potrzebne.

Jak wiec sensownie uczyć i nie marnować czasu swojego i uczniów? Staram się dotrzeć do istoty omawianych problemów i zrozumieć potrzeby – nie tylko praktyczne, ale i poznawcze słuchaczy. A jeśli program nie zostanie zrealizowany, to trudno, lepiej bowiem jest zainteresować niż uczyć i nie nauczyć.

3. O czym ma opowiadać nauczyciel matematyki, żeby słuchali go artyści (i księgowi)?

Studenci I roku Wydziału Grafiki ASP w Warszawie zostali przez ich dziekana postawieni w nieprzyjemnej sytuacji. Oprócz wielu wymagających projektów, które powinni wykonać starannie, sensownie i w terminie, a takie rzemiosło jest dla nich zazwyczaj nowością, muszą też uczestniczyć w obowiązkowym konwersatorium z matematyki w wymiarze 2 godziny tygodniowo w semestrze letnim. A przecież wydawało im się, że będą artystami! Jeszcze przełkną konieczność żmudnego ślęczenia nad techniką, precyzją i estetyką, bo te ćwiczenia warsztatowe być może przydadzą się w przyszłym zawodzie. Ale byli pewni, że koszmar matematyki mają po maturze za sobą. A jeszcze przedmiot trzeba zaliczyć, a więc na koniec zajęć przedstawić projekt, którego wartość artystyczna, lub warsztatowa nie jest tak istotna jak wkład intelektualny, muszą bowiem w swym dziele wykazać, że pojęli dobrze idee matematyczne, które się przewijały przez dziesięć spotkań konwersatorium.

Wprowadzanie tych zajęć miało dłuższą historię – początkowo co kilka lat odbywały się pojedyncze, nieformalne spotkania, na których pokazywałem różne, pobudzające wyobraźnię zjawiska występujące w matematyce.

Mówiłem o czwartym wymiarze, posadzkowaniu przestrzeni i powierzchniach jednostronnych, ilustrując to niezdarnymi szkicami i machaniem rękami. Później słuchaczom z nowych pokoleń studenckich opowiadałem o tych elementach geometrii, które mogą się przydać przy używaniu programów grafiki komputerowej, były to wiadomości o układach współrzędnych, geometrii rzutowej, czy odwzorowaniach afinicznych. Spotkania miały formę nieobowiązkowej serii dziesięciu wykładów, na których z początku widywałem całą grupę, a od połowy do końca już tylko jedną osobę (zresztą dziecko obciążone dziedzicznie matematyką). Wreszcie od dwóch lat zajęcia stały się obowiązkowe, a rezultatem ich jest książeczka, rodzaj katalogu zawierającego wszystkie prace zaliczeniowe, okraszone tekstem luźno nawiązującym do przerabianego materiału.

Jej skrót przedstawiamy na str. 6–9.

Jak trafić do tego grona słuchaczy – czujnych, ale chętnych do skupienia się na czymś zupełnie innym, od czego zacząć i do czego dążyć? Postawiłem na wspólnictwo. Najpierw w rozmowie opisywaliśmy wspólne obiekty zainteresowania – a więc przestrzeń i jej odwzorowanie na płaszczyznę. Co to jest przestrzeń, jakie ma atrybuty, jakim językiem ją opisać, jakie pojęcia są nam potrzebne? W naturalny sposób pojawiły się proste, płaszczyzny i punkty, wnętrze, zewnętrze, odległości, symetrie, wymiary i liczby. O każdym takim pojęciu rozmawialiśmy najpierw w języku potocznym, a potem precyzowaliśmy poprzez przykłady i paradoksy, co jeszcze jest takim obiektem, a co już się w naszym rozumieniu nie mieści. Przy okazji przedstawiałem jak definiuje się te pojęcia w matematyce i dlaczego tak się to robi. I pilnowałem, żeby kolejne abstrakcje były opisywane tylko przez poprzednie (a nie następne) oraz przez liczne przykłady mające wspólne cechy odpowiadające omawianemu pojęciu, a poza tym bardzo różnorodne.

Moim oczywistym celem było nakłonienie studentów do namysłu nad potocznie i często przez nich używanymi pojęciami, a to poprzez zderzenie ze spojrzeniem z innego, zupełnie im obcego punktu widzenia. Poza odrobiną przymusu (sprawdzanie listy, no i psychika I roku) motywacją było przyszłe wydawnictwo, a więc uczestnictwo w tworzeniu czegoś bardzo konkretnego. Ta motywacja nie była aż tak silna, ponieważ był to pierwszy raz i nie bardzo studenci wierzyli, że coś się zrobi i nie wyobrażali sobie (nikt inny też nie) jaki będzie końcowy rezultat. Celem nieco ukrytym, choć nie ukrywanym, było podsunięcie myśli, że oprócz techniki i emocji w ich pracy może przydać się przekonanie o zasadniczej, choć niespełnialnej poznawalności świata, o tym, że racjonalność może funkcjonować nie tylko w kontekście aktywności zawodowej, przy liczeniu honorariów i zabieganiu o prestiż, ale też jako narzędzie pomocne w ich przyszłej twórczości.

Niech jednak nikt się nie łudzi, że studenci matematyki są niepodatni na tego typu zmartwienia. Oczywiście rzecz się odbywa na innym poziomie, ale w każdej grupie, z którą miałem do czynienia było kilku bystrzaków, którzy w mig odgadują, co za chwilę będzie, nie peszyło ich to, że często się mylili. Było też zawsze kilka osób, którym sie wydawało, że nic nie rozumieją, bo rozumowali wolniej (czasem za to solidniej) i zawsze byli o trzy sekundy wolniejsi niż reszta.

W znacznie trudniejszej sytuacji jest nauczyciel przedmiotów matematycznych na studiach dla pracujących w wyższych szkołach wdzięku i biznesu. Studenci – z wyjątkiem młodzieńców przeczekujących wojsko – pracują często od wielu lat, w pełnym wymiarze, mają na głowie dom i pracę, niejednokrotnie dojeżdżają z daleka, po dwie, trzy godziny w jedną stronę, i z pewnością nie mają głowy do abstrakcji i epistemologii. Jestem pełen podziwu dla ich determinacji, z jaką chcą zdobyć kwit zaświadczający o wyższym wykształceniu, zwany dyplomem licencjata. Znajomość matematyki jest znikoma – arytmetyka idzie sprawnie na liczbach dwu–, trzycyfrowych, można też liczyć na rozwiązanie równania liniowego z jedną zmienną (bez parametru i innych komplikacji). Zwracam uwagę, że są wśród nich osoby zajmujące się w przedsiębiorstwach rachunkami i bilansami. Jakże tu mówić o kryteriach zbieżności szeregów, o pochodnej funkcji złożonej, o ekstremach lokalnych i związanych funkcji wielu zmiennych, o macierzach i interpretacji geometrycznej rozwiązań układu równań, nawet o wykresach kilku podstawowych funkcji elementarnych.

W programach studiów będących jedną z podstaw do uzyskania przez szkołę uprawnień do wydawania dyplomów, zawarty jest prawdziwy koncert życzeń, a praktycznym progiem nie jest umiejętność całkowania, lecz sprawnego operowania na ułamkach. Czy można pogodzić wymagania z możliwościami? Przez dziesięć spotkań w semestrze staram się na przykładach uzasadnić, że wprowadzane nowe (dla studentów) metody miewają sens. Zaliczanie i egzaminy, to głównie sprawdzian umiejętności rozpoznawania jakiego typu problem łączy się z jakim typowym sposobem rozwiązania – same rozwiązania są zredukowane do minimum schematu. Jednak już to stanowi olbrzymią trudność.

Krąg: problem rzeczywisty, jego model schematyczny, redukcja do problemu matematycznego w postaci równania lub funkcji, odszukanie rozwiązania matematycznego, interpretacja w schemacie i druga w rzeczywistości z listą zastrzeżeń i poczynionych uproszczeń – ten krąg jest za długi i nie do ogarnięcia dla typowego studenta. W szkole bowiem nie mówimy tego, że świat poznajemy poprzez modele, metodą przybliżeń i kolejnych kroków, żmudnego docierania do sedna. Standardem jest pogląd o tym, że podawana wiedza jest pełna i kompletna, a co się w niej nie mieści jest złe, anaukowe i moralnie podejrzane. A nienaukowe i podejrzane nie mogą być treści stwierdzeń i głoszonych tez przez niezgodność z powszechnie przyjętą wykładnią nauk, są one bowiem prawdziwe lub fałszywe lub stanowią hipotezy w trakcie weryfikacja. Nienaukowe i podejrzane mogą być jedynie niekonsekwentne metody uzasadniania, słabe argumentacje lub często ich brak skrywany pod pięknymi, nadętymi słowami.

W każdym trybie kształcenia idzie o zachowanie delikatnej równowagi między egalitarnym – dostępnym dla wszystkich, a więc na niższym poziomie i elitarnym – kształcącym najlepszych i śrubującym wymagania – podejściem do uczniów. Można opowiadać bajki i schematy, a można wprowadzać coraz to bardziej wyrafinowane konstrukcje intelektualne. W mojej działalności nauczycielskiej zamiast wybierać między pytaniami: co robić? jak robić? i po co? staram się podpowiadać słuchaczom dlaczego to ważne, jak to może działać i jakie skojarzenia to w nas budzi.

Zadaniem matematyki nie jest bowiem dowodzenie twierdzeń, ani poznawanie świata, choć służą temu w innych naukach narzędzia matematyczne. Zadaniem matematyki jest lepiej świat zrozumieć.

Warszawa, 10. listopada 1999 r.

Oto przykładu stylu mówienia o matematyce z grafikami. Zostały one wzięte z wydanego przez Wydział Grafiki warszawskiej Akademii Sztuk Pięknych trójjęzycznego albumu *Klasa abstrakcji* (przedruk za zgodą Dziekana Wydziału Grafiki Akademii Sztuk Pięknych w Warszawie).

Wzorce

Świat postrzegamy poprzez wzorce. Rozpoznajemy to, co już znamy. Do nieznanego dobieramy klucze. Niepełne zarysy przykrawamy do naszej wiedzy i wrażliwości. Zupełnie nowe doświadczenia przedstawiamy przez negację, jako niewyobrażalne szczęście, niewypowiedziany ból, niesamowity widok, tragedię nie do opisania. Następne zdarzenia podobnego rodzaju znajdują już porównanie.

Słowa

Opisujemy to, co możemy nazwać. Wspominamy spacer po łące. Zauważamy i pamiętamy to, co możemy nazwać. Łąka była zielona, pełna ziół i owadów. Im więcej znamy słów, tym więcej i dokładniej potrafimy opisywać. Rosły trawy, głównie kostrzewa i rajgras, brzęczały pszczoły, bzykały muchy, brzmiał trzmiel. Język pozwala na wspólnotę, umożliwia dzielenie się doświadczeniem. Przygotowuje do porównania nowego ze znanym, choć nie przeżytym osobiście. Nazwy, pasujące do różnych sytuacji, odbierają opisowi wiele indywidualności. Zdarzenie uproszczone w opisie może być wzorcem do wielu różnych doświadczeń.

Struktura i znaczenie

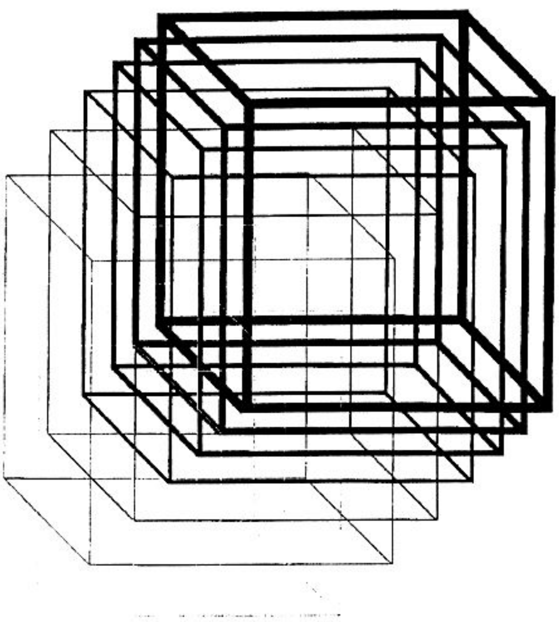
Wspominamy obrazy, zapachy i wrażenia przez skojarzenia i opisy. Znaczenie słowa rozpoznajemy poprzez kojarzenie z sytuacjami, w których były użyte. Słowa wiążemy w zdania, nadając im dokładniejsze znaczenie poprzez zestawienie z innymi. Zdania wiążą się w opisy. Uczymy się tych innymi. Zdania wiążą się w opisy. Uczymy się tych zestawień, rozpoznajemy ich wzorce. Poznajemy nowe nazwy, gdy pojawiają się w miejscach zazwyczaj używanych przez znane już słowa. Znane słowa nabierają nowego znaczenia, jeśli odnajdziemy je w znanych zestawieniach, w których dotychczas ich nie było. Uczymy się nowych struktur widząc znane słowa powiązane w nowy sposób.

Analogie i abstrakcje

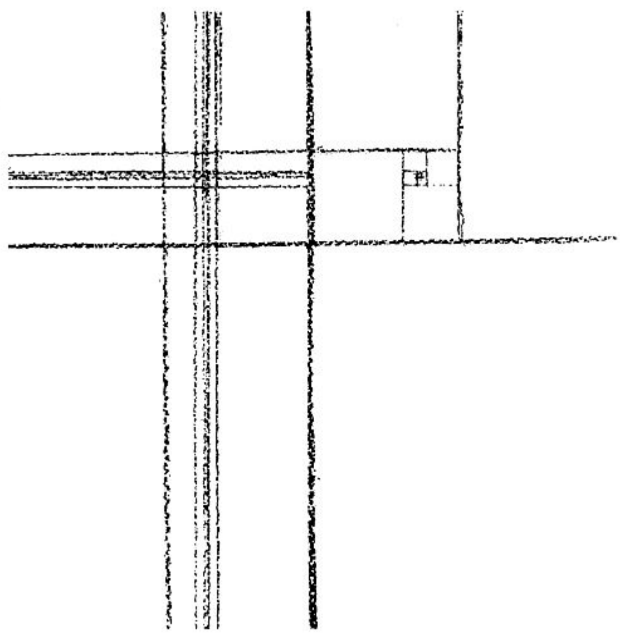
Możemy korzystać z języka, bo potrafimy porównywać i rozróżniać. Młodsi mają mało doświadczenia i dużo jest dla nich nowego. Uczą się wzorców, ich nazw, znaczeń i kontekstów. Starsi porównują z tym, przez co już przeszli lub z tym, czego się nauczyli. Nadają nazwy cechom różniącym, łączą i zmieniają konteksty. Łączymy zjawiska, które porównujemy, nadając im wspólną nazwę. Rozróżniamy dzięki wrażliwości. Łączymy podobne dzięki przenikliwości. Postrzegamy przedmioty o tej samej barwie, której nazwę znamy. Abstrahujemy barwę jako cechę wspólną tych przedmiotów. Obserwując wiele przedmiotów o wspólnej, nieznanej barwie szukamy jej nazwy.

Symbole

Podobne do nazw są symbole, umowne znaki przenoszące treści i uczucia. Niektóre symbole wydają się uniwersalnie czytelne, inne znowu mają znaczenie tylko dla niewielu. Ten, kto biegle opanował język symboli, zdaje się widzieć w nich rzeczywistość, którą mają przedstawiać. Inni rozpoznają powtarzający się znak, nie łączą z nim ukrytych znaczeń. Brak zrozumienia nie zasmuca ich, choć może irytować.



Katarzyna Lewandowska



Andres Agerbo

Artyści

Są osoby szczególnie wrażliwe i przenikliwe, potrafiące wydobyć subtelne różnice i nieoczywiste związki. Ich rzemiosło umożliwia przekazanie nowego znaczenia, połączenie znanych symboli, tworzenie nowych.

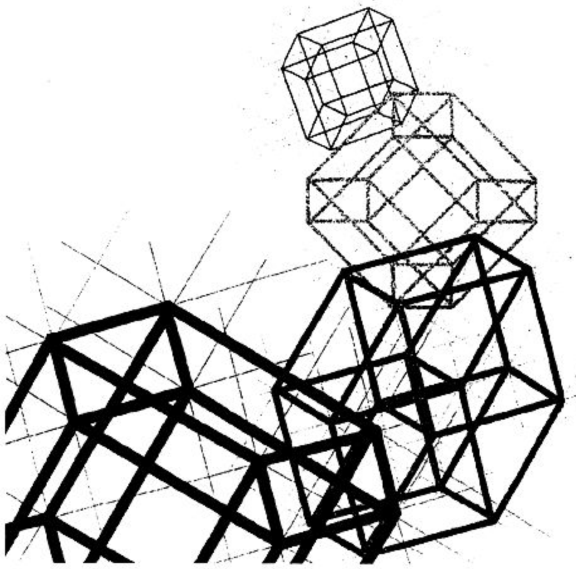
Przestrzeń

Mówimy o przestrzeni, o miejscu gdzie się znjdujemy, o scenie, na której działamy przekształcając stare, gdzie staje się nowe. Mówimy też o innych przestrzeniach, duchowych, emocjonalnych. Opisujemy bliskość punktów i bliskość myśli, i bliskość ludzi, i bliskość uczuć. Mówimy o punktach przestrzeni, o przedmiotach, o ich wzajemnym położeniu, o porządku. W końcu opisujemy sposoby, którymi chcemy te przestrzenie przedstawić, zredukować lub nadać im nowy sens. Przestrzeń, gładką i rozciągłą, rozcinaną i dzieloną powierzchniami, które nie pozostawiają w niej trwałych śladów, złożoną z ziaren punktów, ale niepodzielną na te ziarna, tę przestrzeń opisujemy przez jej własności, wprowadzając pojęcia, których nie potrafimy już bardziej redukować. Najpierw odnosimy się do doświadczenia, na które nałożył się język, ten znany od dzieciństwa. Widzimy powierzchnię ziemi i lustra wody, linię wzroku wzmocnioną wyciągniętą ręką i linię horyzontu, obecną choć nieosiągalną. Odnajdujemy rytm i symetrię. Postrzegamy płaszczyznę symetrii rozcinającą przestrzeń na dwie bliźniacze połowy. Na tej płaszczyźnie możemy wprowadzić oś symetrii, jak ślad zgięcia na kartce. Inna linia na tej samej kartce tworząca nową symetrię płaszczyzny z osią wyznacza cztery kąty proste.

Odległość

Cóż to jest prosta, którą wyłuskaliśmy symetriami z przestrzeni, cóż to są symetrie i bliźniaczość świata, która je podpowiada ? Mówimy – wszystko z tej

Zofia Bartoszewska



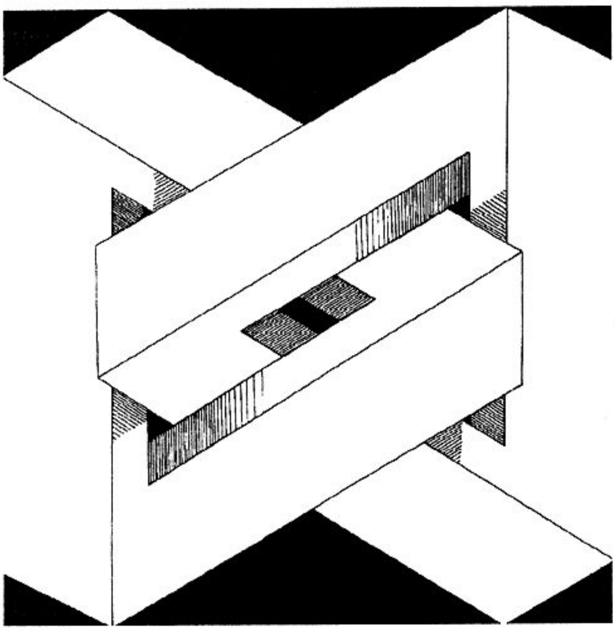
Anna Paź

strony jest tak samo położone jak z tamtej, w tych samych odległościach. Nasze doświadczenie prostej jest takie. Robimy kilka kroków po prostej, zatrzymujemy się, a potem jeszcze kilka następnych. I jeśli to było wzdłuż prostej, to nie możemy tego spaceru skrócić. A jeśli chodziliśmy wzdłuż różnych prostych, to możemy. Rozpoznajemy prostą przez długość spaceru, przez pomiar odległości wiążącej jego początek i koniec. Jeżeli wracamy po prostej, to robimy tyle samo kroków wstecz, co do przodu.

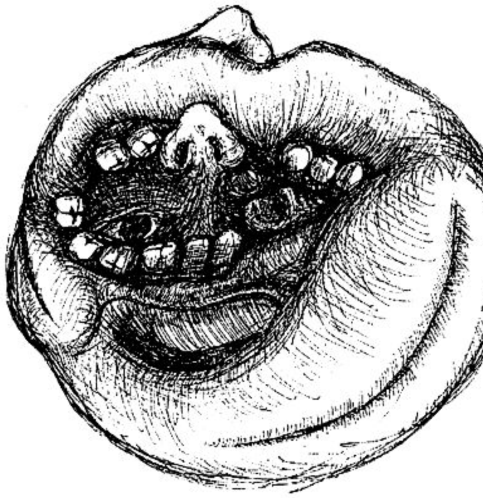
I nie da się ruszyć z miejsca nie robiąc kroku. Odległość wiążemy z przestrzenią, a nie z czasem. Bo można skrócić czas dotarcia do celu odchodząc na bok, opuszczając prostą, aby wynająć wierzchowca. Bo idąc z powrotem można iść wolniej ze zmęczenia, albo szybciej zbiegając z górki. Kiedy mamy w przestrzeni odległość możemy mówić o prostych, o odcinkach, o kołach i kulach, o trójkątach, kątach i całej geometrii. Odległość jest liczbą wiążącą dwa punkty w przestrzeni. I choć wiele można powiedzieć nie odwołując się jawnie do wartości tej liczby, a tylko mówiąc, że jest równa lub większa od innych odległości, to musimy mieć świadomość, że te liczby opisujące odległość dobrze znamy i rozumiemy. I musimy wiedzieć, co to są liczby dodatnie i jak je dodawać, i co to jest zero, i dlaczego jest takie specjalne. Można mówić o odległości, jako nieujemnej liczbie używając tylko tych trzech cech – równości tam i z powrotem, niemożliwości skrótu przez urozmaicenie drogi i unieruchomieniu, albo równości początku i końca spaceru, gdy odległość nie jest dodatnia. A jeśli się z tym zgodzimy, to zobaczymy przestrzenie, w których zupełnie inaczej wyglądają proste i koła, niepodobne do prostych świerków i kół na wodzie. Gdy jednak pomyślimy, że prosta składa się z tych miejsc, które można odwiedzić w jednej podróży nie nakładając drogi, a okrąg to miejsca, z których mamy do środka tak samo daleko, to różne kształty prostych i okręgów będą odzwierciedlały różne sposoby podróżowania.

Wymiar

Obraz jest redukcją przestrzeni do płaszczyzny. Mówimy: przestrzeń jest trójwymiarowa, płaszczyzna dwuwymiarowa, a prosta ma jeden wymiar. Mówimy też, że sprawy należy rozpatrywać w wielu wymiarach, albo, że ktoś ma jednowymiarowe poglądy. Potrafimy wymiary określać w innych sytuacjach. Sznurek zwinięty w spiralę pozostaje jednowymiarowy, kartka zwinięta w rurkę ciągle jest dwuwymiarowa. Nawet okrąg, choć zakreśla dwuwymiarowe koło, którego jest brzegiem, sam pozostaje jednowymiarowy. Waza pełna spaghetti jest pełna tworów jednowymiarowych. Powłoka balonu, albo dętka wycinają kawałek przestrzeni trójwymiarowej, ale pozostają dwuwymiarowe. Można powiedzieć tak – dwuwymiarowe może być brzegiem trójwymiarowego, jednowymiarowe – dwuwymiarowego. Ale to nie chwyta istoty. W przestrzeni niepozwijanej, gdzie można prowadzić proste łączące dowolne punkty można wymiar określić przez liczbę niezależnych kierunków. Kierunek jest wspólną cechą prostych wzajemnie równoległych. Kierunki będą zależne, jeśli idąc na spacer kolejno wzdłuż prostych o tych kierunkach możemy wrócić do punktu wyjścia. Na płaszczyźnie znajdziemy dwa kierunki niezależne, wiemy więcej, do dowolnego kierunku dobierzemy na wiele sposobów drugi niezależny. Na tej samej płaszczyźnie każde trzy kierunki będą zależne. Albo możemy pokręcić się po trójkącie, jeśli kierunki są różne, albo też pójść w jedną stronę, potupać w miejscu i wrócić po śladach, jeśli pierwszy i trzeci kierunek się pokrywają. Na prostej jest jeden kierunek niezależny – właśnie kierunek tej prostej. W przestrzeni znajdziemy trzy, a nie znajdziemy czterech. Jeśli przestrzeń jest trochę pozwijana, to można przybliżyć oko, tak, żeby wydawała się prawie płaska i szukać wtedy kierunków niezależnych. Jest też inny sposób. Bierzemy worek



Anna Niemierko

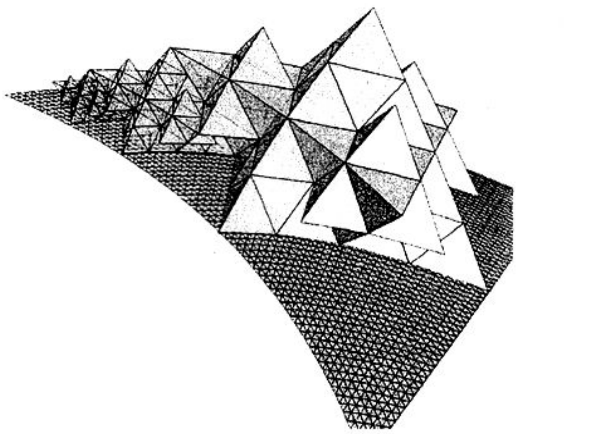


Łukasz Kamieniak

z kulistymi, albo sześciennymi koralikami i układamy je na figurze, której wymiar chcemy zmierzyć. Liczymy ile potrzebujemy koralików. Potem bierzemy worek z mniejszymi koralikami, powiedzmy o dwukrotnie krótszej średnicy. Pokrywamy figurę. Liczymy koraliki. Dla odcinka potrzeba dwa razy tyle, co poprzednio. Dla kwadratu cztery razy tyle, dla sześcianu osiem. Zmniejszamy dalej. Liczymy dalej. Patrzymy, która potęga zmniejszenia średnicy jest odpowiedzialna za zwiększenie liczby koralików. Dla odcinka pierwsza, dla kwadratu druga, dla sześcianu trzecia. Są takie figury, których wymiar nie jest liczbą całkowitą. Tak dzieje się czasem, gdy do figury systematycznie doklejamy, albo z niej usuwamy coraz mniejsze podobne kawałki.

Liczby

Liczby są pochodną pamięci. Mam tyle samo, co przedtem. Czy to już wszystko co miałem ? U podstaw liczb jest porównanie liczebności przez gromadzenie liczydeł albo karbowanie. Liczymy kładąc rękę na przedmiotach, a równocześnie na liczmanach. Można też recytować wyliczanki. To wszystko jest dobre dla potwierdzenia stanu posiadania, może nawet do stwierdzenia stanu niedoboru lub nadwyżki. Dopiero wprowadzenie operacji łączenia liczmanów, czyli dodawania i innych działań na liczmanach lub ich symbolach wprowadza liczby jako wspólną cechę zbiorów o takiej samej liczebności, stwierdzanej przez wyliczanie. To są liczby kardynalne, opisywane przez liczebniki główne. Liczby porządkowe pochodzą od wyliczanek, od recytacji, gdzie jeden dźwięk poprzedza w ustalonym porządku inny. Kiedy mamy dodawanie i uproszczenie wielokrotnego dodawania, czyli mnożenie, można się pokusić o odejmowanie i dzielenie, jako odgadywanie, co należałoby dodać, albo przez co pomnożyć, aby dostać podaną sumę, czy iloczyn. Można też wprowadzać nowe liczby, żeby odejmowanie i dzielenie dawało się wykonać, można wprowadzić działania symboliczne, czyli arytmetykę i algebrę. Wtedy można powrócić do działań i wydobyć z nich te cechy, które dadzą się



Magdalena Sykulska

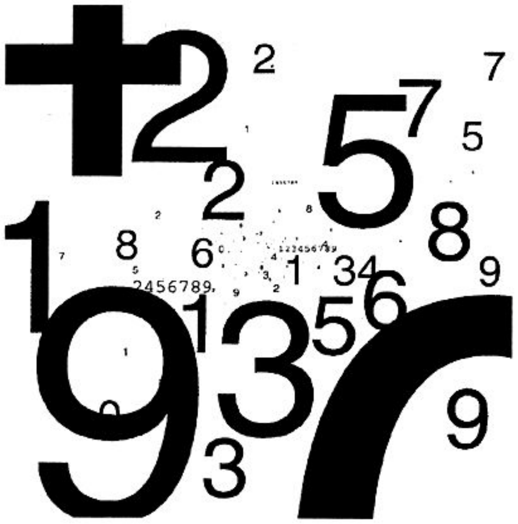
wypowiedzieć bez odwoływania do poszczególnych własności liczb powstałych z odliczania przedmiotów, bez trudności z jednostkami i z nieporównywalnością wielkości różnego rodzaju. I okazuje się, że można sensownie dodawać kąty na płaszczyźnie, albo godziny na zegarze tak, że dodawanie czegoś stałego nie wyprowadza nas poza ograniczoną od początku dziedzinę. Można też, korzystając z umiejętności dzielenia, skojarzyć liczby z odległościami na prostej, dodając znak zwrotu, czyli początkowego ustawienia przed spacerem. Można też próbować rozszerzyć cztery działania na płaszczyznę, co daje się zrobić, albo na przestrzeń, co udaje się tylko z dodawaniem i odejmowaniem, bo dwóch punktów przestrzeni niesposób dzielić zgodnie z działaniami na prostej tak, aby otrzymać punkt przestrzeni będący ich ilorazem.

Twierdzenia

Matematycy mówią tak: określamy pewne pojęcia, co do których mamy intuicje z innych dziedzin. Odzieramy je ze wszystkiego, co niepotrzebne, ale zachowujemy to, co istotne. Mówimy: te pojęcia definiują się przez następujące własności. Mówią: mamy tu powszechnie uznane reguły wnioskowania. Teraz wyprowadzamy coraz nowsze własności pojęć. Chętnie przy tym będziemy korzystać z porównywania tych pojęć z już nam znanymi i badanymi od dawna pojęciami matematycznymi. Jeżeli się nie zapomnimy w naszej pracy, to może na koniec spróbujemy zrozumieć, jak te nowe własności mają się do początkowych intuicji. Jeżeli nie, to trudno, mamy nadzieję, że dotarliśmy jednak do sedna sprawy i w przyszłości okaże się w innej sytuacji, że już sporo można o niej powiedzieć. A tym razem może intuicja była zła, albo pojęcia nie dość dobrane, albo tą metodą nie da się problemu opisać, albo rozwiązać.

Matematyka

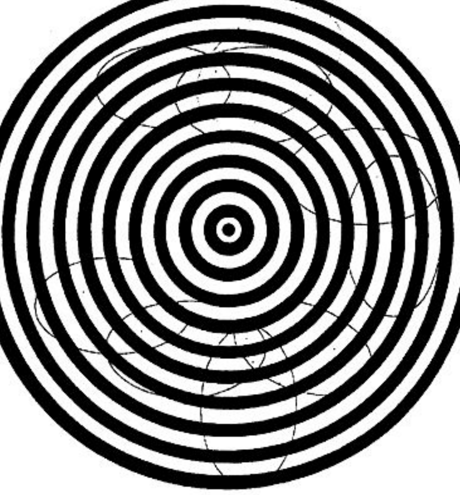
Matematyka jest sztuką szukania, tworzenia i opisywania wzorców. Wzorce te występują na wielu poziomach. Są odniesienia do zależności codziennych, są i takie, które wymagają pamiętania o poprzednio wprowadzonych znaczeniach. Początkowo zajmowano się liczeniem i mierzeniem. Potem liczbami i figurami.



Marcin Lachowski

Następnie operacjami na tych obiektach, a zaraz potem operacjami jako obiektami. W końcu zaczęto szukać ograniczeń stosowanych metod i opisywać te metody tak jak przedtem liczby i figury. Tworzenie nowych konstrukcji nie zwalnia od powrotu do podstaw, do pytań o sens używanych pojęć. Oto niektóre z nich. Tożsamość: to samo – co innego, takie samo – inne, a także: równe – nierówne. Porównania: większe – mniejsze, a także dokładniej: jaka różnica. Położenie: w tym samym miejscu – obok – gdzie indziej, ale dodatkowo też: bliżej – dalej. Zadajemy pytania: co to znaczy porównać, jak to badać, jakim językiem wyrazić równość. Jakie cechy pomagają w porównywaniu, a jakie przeszkadzają. Co innego wolno nam z sensem zrobić, a co będzie prowadziło do niedorzeczności.

Taki jest warsztat matematyka, to są jego narzędzia i rzemiosło. Tak jak warsztatem grafika jest dłuto, kwas i farba, technika rycia, odwzorowania, światło, faktura i kolor. Matematyka, grafika jak i inne dziedziny zajmują się światem. Niekiedy są użyteczne, pomagają wypełniać inne zupełnie zadania. Czasem zachwycają. Matematyk rozwija warsztat, szykuje narzędzia, bada świat. Czasem tworzy, czasem odkrywa. Często błądzi.



Magdalena Świercz