Zapis odczytu z XXII Szkoły Matematyki Poglądowej.

O liczbie kolorów

Zbigniew MARCINIAK, Warszawa

0. Zagajenie

W bieżącym roku przypadają jubileusze dwóch czasopism: 50-lecie *Matematyki* oraz 25-lecie *Delty*. Szkoła Matematyki Poglądowej wydaje mi się wyjątkowo odpowiednim miejscem, by oba jubileusze świętować. Przyłączając się do gratulacji dla obu Zespołów Redakcyjnych, zastanawiałem się, jak mógłbym tę okazję uczcić. W końcu przyszło mi do głowy, że mogę to zrobić wygłaszając wyjątkowo łatwy odczyt. (Myślę, że raz na 10 lat mogę sobie na taką ekstrawagancję pozwolić.)

1. Jaka jest liczba kolorów?

Liczba kolorów jest dla redaktorów każdego czasopisma bardzo ważną sprawą. Dlatego postanowiłem, że w swojej pogadance zajmę się właśnie tym.

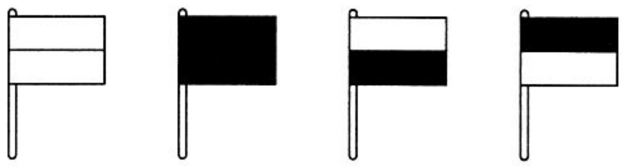
Jaka jest liczba kolorów? Od fizyka lub fizjologa oczekiwalibyśmy konkretnej liczby. Matematyk zaś odpowiada na to pytanie tak:

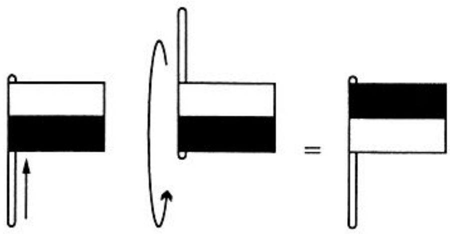
Liczba kolorów wynosi q.

W dalszym ciągu odczytu każdy słuchacz może w miejsce q podstawić swoją ulubioną liczbę naturalną. Wyobraźmy zatem sobie, że mamy q pojemniczków z farbami i odpowiednio duży zapas pędzli.

2. Co będziemy malować?

Będziemy barwić różne przedmioty: chorągiewki, plansze, klocki itp. Z tą zabawą wiąże się ciekawy problem matematyczny: ile *naprawdę* różnych wzorów możemy otrzymać? Na przykład, chorągiewkę uszytą z dwóch poziomych pasów materiału możemy (na pierwszy rzut oka) pomalować dwoma kolorami (np. białym i czarnym) na cztery sposoby:





Jeśli jednak w ostatniej chorągiewce przesuniemy patyczek, to okaże się, że taka sama chorągiewka leży obok, tyle że inaczej. Wobec tego mogliśmy sobie zaoszczędzić pracy i poprzestać na pomalowaniu trzech chorągiewek.

Sytuacja w rozważonym przykładzie była prosta, bo mogliśmy łatwo rozważyć po kolei wszystkie przypadki i wyeliminować powtórzenie. Co jednak zrobić, gdy liczby pasków na chorągiewce i liczba kolorów wzrosną? Jeszcze większe kłopoty napotkamy przy malowaniu wielościennego klocka, który można obracać na wiele sposobów.

3. Co w tej sytuacji zrobić?

Odpowiedź jest prosta: należy odłożyć pędzle na bok i... pomyśleć. Wkrótce ogarnia nas silna pokusa, by rozważyć sprawy chorągiewek, klocków itp. z osobna. Łatwo jej ulec, bo każda z nich obfituje w konkretne detale (np. patyczek suwający się w chorągiewce), które pozornie ułatwiają znalezienie rozwiązania.

Zawodowy matematyk takim pokusom nie ulega. Stara się zapomieć o detalach i wyłuskać z całej rodziny problemów to, co jest dla nich wspólne. Rozwiązanie tak „okrojonego" zadania jest nadzwyczaj opłacalne ponieważ zawiera w sobie rozwiązania wszystkich przypadków szczególnych.

4. Odrzucamy zbędne szczegóły

Postarajmy się opowiedzieć o naszych zadaniach tak, by mówić o wszystkich na raz.

Mamy zatem pomalować za pomocą q kolorów pewien obiekt (flagę, planszę, klocek, itp.), zbudowany z, powiedzmy, n pól (paski flagi, pola planszy, ścianki klocka, itp.). Ponieważ każde pole możemy pomalować na jeden z q kolorów, to potencjalnie mamy q^n możliwości pomalowania naszego obiektu.

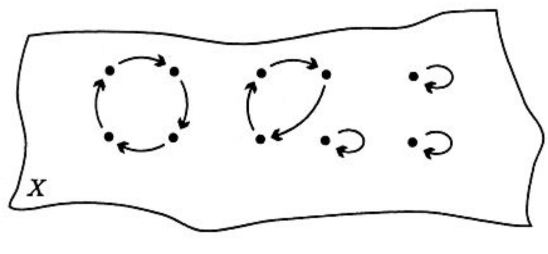
Tak pomalowany obiekt możemy obracać. Przy tej okazji jego pola zamieniają się między sobą. Przeważnie będzie tak, że po obróceniu naszego obiektu ujrzymy inny pomalowany obiekt. Z każdej takiej pary obiektów chcielibyśmy pozostawić dokładnie jeden. Pytanie brzmi: ile obiektów zostanie po eliminacji wszystkich par tak samo pomalowanych?

5. O mieszaniu

Zajmiemy się teraz doprecyzowaniem użytych pojęć. Kluczową sprawą jest tu mieszanie pól naszego obiektu, wywołane jego obracaniem.

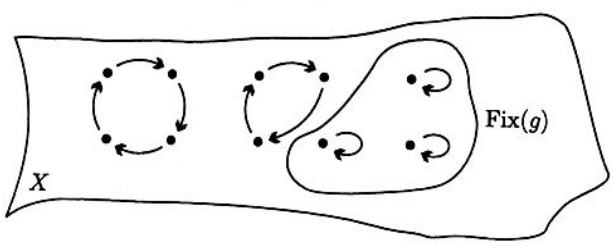
Oznaczmy pola najprościej jak można, czyli kropeczkami. Niech, dla przykładu, będzie ich 10. (Tak przy dzisiejszej okazji wypada, bo $\mathbf{2} \cdot \mathbf{5} = 10$ oraz $2 \cdot \mathbf{5} = \mathbf{10}$.) Mieszanie kropeczek polega na tym, że każda z nich próbuje przemieścić się na miejsce innej, wypychając ją stamtąd, jak w grze *komórki do wynajęcia*.

Możemy to zilustrować rysunkiem:

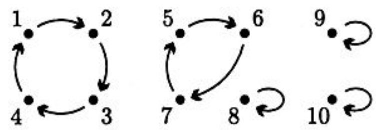


Jeśli X oznacza zbiór kropek, to rysunek ten opisuje pewne wzajemnie jednoznaczne przekształcenie $g: X \to X$. Gołym okiem widać, że to przekształcenie „rozpada się" na pewną liczbę rozłącznych *cykli*.

Najkrótsze z tych cykli składają się z pojedynczych kropek. Są to tak zwane *punkty stałe*. Zbiór wszystkich punktów stałych przekształcenia g oznaczymy symbolem $Fix(g)$.



Redaktorzy czasopism, nawet matematycznych, nie lubią takich obrazków. Matematycy, ludzie z natury łagodni, wymyślili zatem sposób zapisywania takiego obrazka w jednej linii druku. Sposób ten polega na ponumerowaniu kropek, a następnie rozerwaniu każdego cyklu. Rozerwane kółeczko wygląda jak dwa łuki, co można wydrukować jako parę nawiasów ( ). Między tymi nawiasami umieszczamy zaś numery kropek w takiej kolejności, w jakiej krążyły w cyklu. (Zapis ten nie jest jednoznaczny, bo można zacząć wypisywanie od dowolnego miejsca cyklu, ale z tym musimy się pogodzić.) Poddajmy takiej obróbce nasz ostatni rysunek:



$$g = (1234)(567)(8)(9)(10)$$

6. Jeszcze większe zamieszanie

Mamy już model matematyczny dla jednego obrotu naszym obiektem. Do rozwiązania zadania z chorągiewkami to całkowicie wystaczy, ale np. klocek zwykle możemy obracać na wiele sposobów.

Rozważmy zatem sytuację, gdy mamy całą serię przekształceń

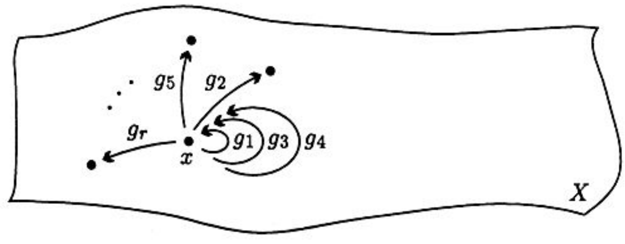
$$g_1, g_2, \ldots, g_r$$

zbioru X na siebie. Oczywiście w naszym modelu powinniśmy uwzględniać to, że każdy obrót możemy cofnąć (czyli wykonać przekształcenie odwrotne g_i^{-1}), oraz że każde dwa obroty możemy wykonać jeden po drugim (czyli złożyć przekształcenia $g_i \circ g_j$). Powinniśmy zatem wymagać od zbioru $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_r\}$, by dwie opisane wyżej operacje nas z niego nie wyprowadzały. Zauważmy, że przyjęte założenia wymuszają występowanie w zbiorze G przekształcenia identycznościowego, które każdą kropkę zostawia tam, gdzie była. (Niematematycy nie są skłonni w ogóle uznawać tego za przekształcenie.) Ten szczególny element oznaczymy symbolem 1 i umieścimy go na początku listy: $g_1 = 1$.

W języku algebry wyrażamy powyższe własności mówiąc, że G jest grupą przekształceń zbioru X, lub grupą *działającą* na zbiorze X.

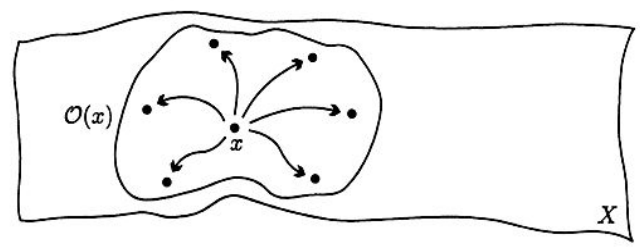
7. Kropka i jej orbita

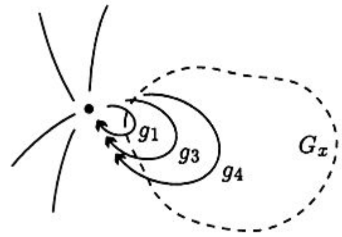
Ustalmy jedną kropkę $x \in X$. Przekształcenia $g_i \in G$ wysyłają ją w różne miejsca $g_i(x)$ zbioru X.



Rysunek ten przypomina planetę (kropka x), z której wysyłamy na orbitę kolejne satelity. Oczywiście zdarzają się „niewypały"; np. zawsze mamy $g_1(x) = x$, ale może to się przytrafić i innym elementom grupy G.

Dlatego zaznaczony na rysunku zbiór kropek, w których kończą się strzałki wychodzące z x, nazywamy *orbitą* punktu x i oznaczamy $\mathcal{O}(x)$.





Zbiór $\{g_1, g_3, g_4, \ldots\}$ tych przekształceń, które „powodują niewypał" nazywamy *grupą izotropii* punktu x i oznaczamy G_x. (Nazywanie tego podzbioru grupą jest uzasadnione bo, jak łatwo się przekonać, jest on, sam w sobie, także zamknięty na składanie i odwracanie przekształceń.)

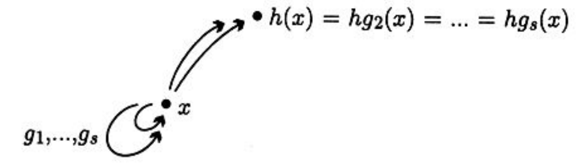
8. Moc orbity i niewypały

Jeżeli z planety x wystrzelimy $r = |G|$ satelitów, to im więcej jest niewypałów, tym mniej satelitów znajdzie się na orbicie. W szczególnie pechowej sytuacji będą same niewypały ($G_x = G$) i wtedy $\mathcal{O}(x) = \{x\}$.

Chwila zastanowienia pozwala mało precyzyjne stwierdzenie: „duże G_x to małe $\mathcal{O}(x)$" wyrazić prostym wzorem. Przenumerujmy bowiem elementy grupy G tak, by na początku listy znalazły się wszystkie elementy podgrupy G_x:

$$G = \{\underbrace{g_1, \ldots, g_s}, \ldots, g_r\}.$$

Wtedy element $h = g_{s+1}$ nie powoduje niewypału, podobnie jak wszystkie złożenia $h \circ g_i$, dla $1 \leq i \leq s$, które wysyłają punkt x dokładnie tam, gdzie przekształcenie h:



Umieśćmy tę paczkę przekształceń na liście zaraz za podgrupą G_x:

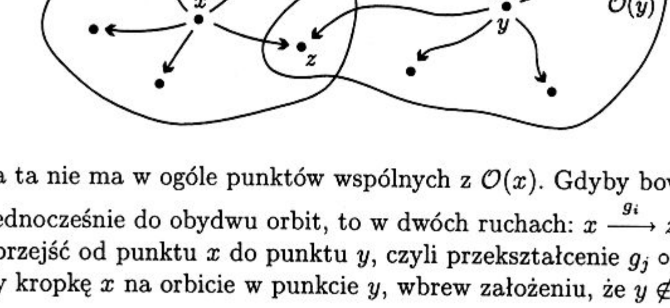
$$G = \{\underbrace{g_1, \ldots, g_s}, \underbrace{hg_1, \ldots, hg_s} \ldots, g_r\}.$$

Postępując dalej w ten sam sposób, aż do wyczerpania elementów G, podzielimy zbiór G na równoliczne podzbiory, po $s = |G_x|$ elementów w każdym. Przekształcenia należące do tego samego podzbioru wysyłają punkt x w to samo miejsce orbity. Zatem moc orbity jest równa liczbie tych podzbiorów, tj. otrzymujemy wzór

$$|G| = |G_x| \cdot |\mathcal{O}(x)|.$$

9. Inne orbity

Zwykle jedna orbita nie wyczepuje całego zbioru X. Rozważmy punkt y nie należący do orbity $\mathcal{O}(x)$ punktu x. Oczywiście ma on swoją własną orbitę $\mathcal{O}(y)$.



Otóż orbita ta nie ma w ogóle punktów wspólnych z $\mathcal{O}(x)$. Gdyby bowiem punkt z należał jednocześnie do obydwu orbit, to w dwóch ruchach: $x \xrightarrow{g_i} z \xrightarrow{g_j} y$ można by przejść od punktu x do punktu y, czyli przekształcenie $g_j \circ g_i$ umieściłoby kropkę x na orbicie w punkcie y, wbrew założeniu, że $y \notin \mathcal{O}(x)$.

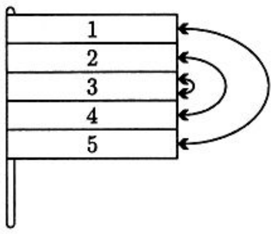
Jeśli zaś punkt y leży na orbicie punktu x, to mamy $\mathcal{O}(y) = \mathcal{O}(x)$. Istotnie, wiemy już, że żadna strzałka wychodząca z y nie może trafić na zewnątrz $\mathcal{O}(x)$. Łatwo też zauważyć, że wychodząc z y potrafimy dojść do dowolnego punktu orbity $\mathcal{O}(x)$ (przesiadając się, w razie potrzeby, w punkcie x).

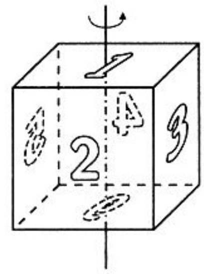
Wynika stąd, że w punkcie y nastąpiło tyle samo „niewypałów", co w punkcie x: równość $|G_y| = |G_x|$ wynika bowiem natychmiast ze wzoru wyprowadzonego w punkcie 8.

Wykazaliśmy w ten sposób, że każde dwie orbity są albo rozłączne, albo się pokrywają. Pod działaniem przekształceń g_i kropki „tłuką się" zatem po swoich orbitach, jak muchy zamknięte w słoiku. Liczba słoików, to liczba orbit działania G na X.

10. Z jakimi działaniem grupy mamy tu do czynienia?

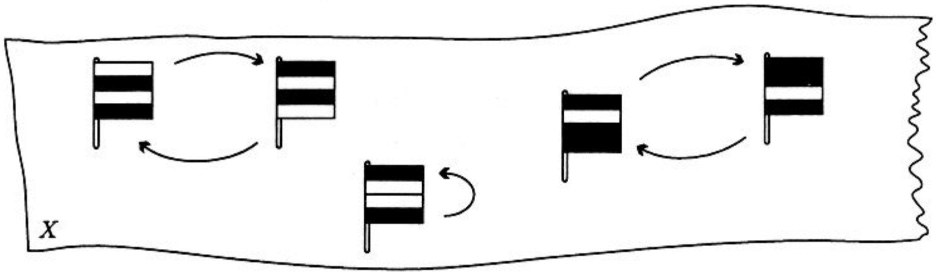
Zastanówmy się teraz, jak zbudowaną wyżej teorię zastosować do rozwiązania naszych zadań. Nietrudno zauważyć, że grupa G obrotów obiektu działa na dwóch zbiorach. Po pierwsze, każdy taki obrót miesza pola obiektu, tzn. mamy do czynienia z działaniem grupy G na zbiorze $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ jego pól.





Na przykład, obrócenie chorągiewki z pięcioma pasami „do góry nogami" odpowiada przekształceniu $h = (15)(24)(3)$, zaś okręcenie sześciennego klocka o 90^o wokół pionowej osi to przekształcenie $h = (1)(2345)(6)$. Zauważmy mimochodem, że liczba cykli (tj. par nawiasów) pokrywa się z liczbą orbit działania h na P.

Ta sama grupa G działa także na innym zbiorze. Niech X oznacza zbiór obiektów pomalowanych na wszystkie możliwe sposoby. Zatem $|X| = q^n$. Każdy obrót pomalowanym obiektem zamienia go na (z reguły) inny pomalowany obiekt.



Dwa obiekty leżą na tej samej orbicie dokładnie wtedy, gdy są tak samo pomalowane, a różnią się tylko położeniem. Przy oszczędnym kolorowaniu chcielibyśmy otrzymać po jednym reprezentancie każdej orbity. A zatem

liczba istotnie różnych kolorowych obiektów to
liczba orbit działania grupy G na zbiorze X.

11. Jak obliczyć liczbę orbit?

Na powyższe pytanie najłatwiej odpowiedzieć w zupełnie abstrakcyjnym kontekście punktu 9. Mamy bowiem następujące

Twierdzenie. *Jeżeli skończona grupa G działa na zbiorze X, to liczba N orbit tego działania wyraża się wzorem*

$$N = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|Fix(g)|.$$

Nosi ono nazwę Twierdzenia Burnside'a, gdyż zostało opublikowane przez niego w roku 1897, w historycznie pierwszej książce poświęconej teorii grup. Tamże znajdujemy jednak informację, że autorem tego twierdzenia jest Frobenius, który miał je udowodnić już w roku 1887.

Dowód: Obliczymy sumę $\sum_{g\in G}|Fix(g)|$. Ponieważ $Fix(g)\subset X$, to zliczamy po prostu elementy zbioru X. Oczywiście, niektóre z nich są liczone wielokrotnie, bo są punktami stałymi kilku przekształceń g. Dokładnie znamy te krotności: punkt x zbioru X jest liczony dokładnie tyle razy, ile jest przekształceń, które go nie poruszają, tj. $|G_x|$ razy. Zatem

$$\sum_{g\in G}|Fix(g)| = \sum_{x\in X}|G_x|.$$

Poprzestawiajmy teraz składniki sumy po prawej stronie tak, by najpierw szły punkty $x_1,\dots,x_k$ pierwszej orbity, następnie drugiej, aż do orbity numer N. Wówczas

$$\sum_{x\in X}|G_x| = (|G_{x_1}|+\cdots+|G_{x_k}|)+\cdots$$

Wcześniej zauważyliśmy, że dla wszystkich punktów jednej orbity grupa izotropii ma tyle samo elementów. Wobec tego składnik w nawiasach jest równy

$$|G_{x_1}|+\cdots+|G_{x_k}| = |G_{x_1}|\cdot|\mathcal{O}(x_1)| = |G|.$$

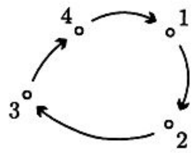
Cała suma składa się z N takich składników. Wobec tego

$$\sum_{g\in G}|Fix(g)| = N\cdot|G|$$

co należało udowodnić.

12. Jak obliczyć $|Fix(g)|$?

Żeby móc efektywnie stosować wzór Burnside'a musimy jeszcze nauczyć się szybko wyznaczać liczbę elementów każdego zbioru $Fix(g)$. W tym celu zastanówmy się, kiedy pomalowany obiekt będzie wyglądał tam samo przed i po wykonaniu ustalonego obrotu g.



Załóżmy na przykład, że pole numer 1 jest białe. Skoro jego miejsce ma zająć pole numer 4, a obiekt ma wyglądać tak samo, to to pole też musi być białe. Posuwając się w ten sposób wstecz orbity dochodzimy w końcu do wniosku, że wszystkie pola należące do niej musiały być pomalowane na ten sam kolor. Oczywiście to samo dotyczy każdej innej orbity.

A zatem kolorowy obiekt jest punktem stałym działania g na X dokładnie wtedy, gdy całe orbity działania g na jego polach są pomalowane tym samym kolorem. Jeśli liczba tych orbit wynosi t, to zbiór $Fix(g)$ ma q^t elementów. Samą liczbę t łatwo odczytać z zapisu g: jest to po prostu liczba cykli.

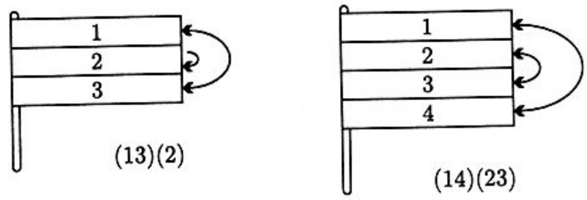
13. Liczymy chorągiewki

Czas na zastosowania. Ile jest istotnie różnych q–kolorowych chorągiewek, z których każda ma n pasków?

Grupa obrotów chorągiewką składa się z dwóch przekształceń: $G=\{1,h\}$, gdzie h zamienia paski dolne i górne parami. Ze wzoru Burnside'a otrzymujemy, że liczba chorągiewek wynosi

$$N = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|Fix(g)| = \frac{1}{2}(|Fix(1)| + |Fix(h)|).$$

Ponieważ 1 nie porusza żadnego punktu, to $|Fix(1)| = |X| = q^n$. Z drugiej strony, $|Fix(h)| = q^t$, gdzie t jest liczbą cykli w rozkładzie h.



W zależności od parzystości liczby pasków n, mamy

$$t = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{gdy } 2 \mid n \\ \frac{n-1}{2} + 1 & \text{gdy } 2 \nmid n \end{cases} = \left[\frac{n+1}{2}\right].$$

Odpowiedź: Liczba chorągiewek wynosi $\frac{1}{2}\left(q^n + q^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\right)$.

14. Liczymy plansze

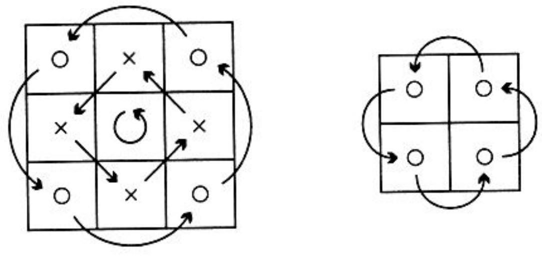
Ile jest istotnie różnych q–kolorowych szachownic o rozmiarach $n \times n$?

Grupa obrotów planszy ma cztery elementy: identyczność, oraz obroty o 90^o, 180^o i 270^o. Jeśli g oznacza obrót o 90^o, to $G = \{1, g, g^2, g^3\}$. Zatem liczba plansz wynosi

$$N = \frac{1}{4}\left(|Fix(1)| + |Fix(g)| + |Fix(g^2)| + |Fix(g^3)|\right).$$

Oczywiście, $|Fix(1)| = q^{n^2}$.

Aby wyznaczyć $|Fix(g)|$ zauważmy, że przekształcenie $g : P \to P$ ma jeden punkt stały (środek planszy) dokładnie wtedy, gdy n jest liczbą nieparzystą. Pozostałe pola łączą się w cykle długości 4.



Zatem liczba t cykli w zapisie przekształcenia g wynosi

$$t = \begin{cases} \frac{n^2}{4} & \text{gdy } 2 \mid n \\ \frac{n^2-1}{4} + 1 & \text{gdy } 2 \nmid n \end{cases} = \left[\frac{n^2+3}{4}\right],$$

a stąd $|Fix(g)| = q^{\left[\frac{n^2+3}{4}\right]}$.

Ponieważ $g^3 = g^{-1}$, to $Fix(g^3) = Fix(g^{-1}) = Fix(g)$, więc także $|Fix(g^3)| = q^{\left[\frac{n^2+3}{4}\right]}$.

W końcu, g^2 jest symetrią środkową. Wszystkie cykle są długości dwa, z wyjątkiem punktu stałego, który występuje dla nieparzystych n. Rachując podobnie, jak poprzednio, otrzymujemy

$$t = \begin{cases} \frac{n^2}{2} & \text{gdy } 2 \mid n \\ \frac{n^2-1}{2} + 1 & \text{gdy } 2 \nmid n \end{cases} = \left[\frac{n^2+1}{2}\right],$$

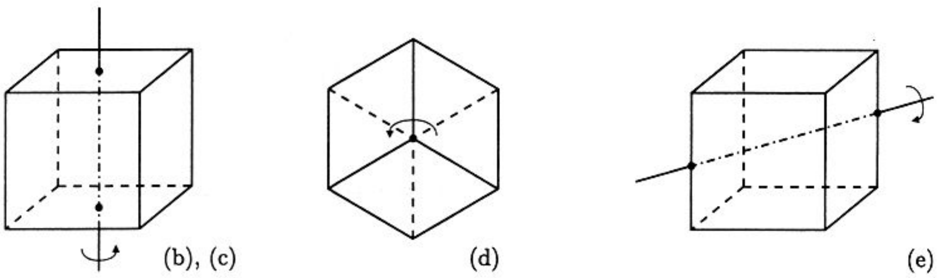
a stąd $|Fix(g^2)| = q^{\left[\frac{n^2+1}{2}\right]}$.

Odpowiedź: Liczba plansz wynosi $\frac{1}{4}\left(q^{n^2} + 2q^{\left[\frac{n^2+3}{4}\right]} + q^{\left[\frac{n^2+1}{2}\right]}\right)$.

15. Liczymy kolorowe kostki do gry

Ile jest różnych sześcianów, których ściany pomalowano za pomocą q kolorów?

Działająca grupa G to grupa obrotów sześcianu. Składają się na nią 24 elementy:



a) identyczność;
b) obrót o 90^o lub 270^o wokół osi przechodzącej przez środki pary przeciwległych ścian; razem 6 przekształceń postaci $(*)(****)(*)$;
c) obrót o 180^o wokół tych samych osi; razem 3 przekształcenia postaci $(*)(**)(**)(*)$;
d) obrót wokół przekątnej o 120^o lub 240^o; razem 8 przekształceń postaci $(***)(***)$;
e) obrót wokół osi przechodzącej przez środki pary przeciwległych krawędzi o 180^o; razem 6 przekształceń postaci $(**)(**)(**)$.

Przypomnijmy, że liczba punktów stałych przekształcenia wynosi q^t, gdzie t jest liczbą cykli w jego zapisie.

Na mocy twierdzenia Burnside'a liczba różnych q-kolorowych kostek wynosi

$$N = \frac{1}{24}(q^6 + 6q^3 + 3q^4 + 8q^2 + 6q^3) = \frac{1}{24}(q^6 + 3q^4 + 12q^3 + 8q^2).$$

16. Czy możemy wiedzieć więcej?

Powiedzmy, że malujemy chorągiewki uszyte z 7 pasów za pomocą dwóch kolorów: białego i czarnego. Już wiemy, jak policzyć ile jest takich chorągiewek. Zapytajmy zatem teraz, ile jest takich chorągiewek, które mają 3 pasy białe i 4 czarne?

Ogólniej: załóżmy, że malujemy kolorami $c_1, \ldots, c_q$ obiekt, który ma n pól. Ile jest takich obiektów, które mają dokładnie k_i pól pomalowanych kolorem c_i, dla $i = 1, \ldots, q$?

Odpowiedź na powyższe pytanie możemy uzyskać jak następuje. Z każdym obrotem g naszym obiektem skojarzymy jednomian od n zmiennych $\mathrm{ind}(g) = x_1^{t_1} x_2^{t_2} \ldots x_n^{t_n}$, gdzie t_l oznacza liczbę cykli długości l w zapisie przekształcenia g. Na przykład, dla $g = (1234)(567)(8)(9)(10)$ mamy $\mathrm{ind}(g) = x_1^3 x_2^0 x_3^1 x_4^1 x_5^0 \ldots x_{10}^0 = x_1^3 x_3 x_4$.

Z jednomianów tych możemy zbudować wielomian

$$P_G(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{ind}(g).$$

Ponadto, zbudujmy z nazw kolorów wielomiany

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= c_1 + c_2 + \cdots + c_q, \\ \sigma_2 &= c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_q^2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sigma_n &= c_1^n + c_2^n + \cdots + c_q^n. \end{aligned}$$

Użyjemy twierdzenia, które udowodnił Polyá w 1937 roku:

Twierdzenie: *Liczba q-kolorowych obiektów z n polami, pomalowanych w taki sposób, by kolor c_1 wystąpił dokładnie k_1 razy, kolor c_2 - k_2 razy,..., kolor c_q - k_q razy, jest równa współczynnikowi przy jednomianie $c_1^{k_1} c_2^{k_2} \dots c_q^{k_q}$ w wielomianie $P_G(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$.*

Zastosujmy to twierdzenie, by odpowiedzieć na pytanie o chorągiewki, zadane na początku tego punktu.

Mamy tu $G = \{1, g\}$, gdzie $g = (17)(26)(35)(4)$. Zgodnie z definicją, $\mathrm{ind}(1) = x_1^7$ i $\mathrm{ind}(g) = x_1 x_2^3$. Zatem

$$P_G(x_1, \dots, x_7) = \frac{1}{2}(x_1^7 + x_1 x_2^3).$$

Z drugiej strony, niech kolory nazywają się b (biały) i c (czarny). Wówczas $\sigma_1 = b + c$, $\sigma_2 = b^2 + c^2$. Zatem

$$P_G(\sigma_1, \dots, \sigma_7) = \frac{1}{2}(\sigma_1^7 + \sigma_1 \sigma_2^3) = \frac{1}{2}\big((b+c)^7 + (b+c)(b^2+c^2)^3\big).$$

Interesuje nas liczba flag, które mają 3 pasy białe i 4 czarne. Zgodnie z powyższym twierdzeniem powinniśmy wyznaczyć współczynnik przy b^3c^4 w powyższym wielomianie. Po łatwych rachunkach otrzymujemy liczbę $\frac{1}{2}\left(\binom{7}{3} + 3\right) = 19$.

Czytelnicy z pewnością znajdą sami wiele innych zastosowań.