Imperium niepewności

Jarosław GÓRNICKI, Rzeszów

I. Intuicyjne kłopoty

Chęć wzbogacenia się możliwie małym kosztem to od niepamiętnych czasów siła sprawcza wielu ludzkich poczynań. Pomijając mroczne strony tej działalności zatrzymamy się nad pozornie niewinnymi igraszkami – grami.

Mimo, że gry są nieodłącznym elementem każdej cywilizacji (wzbudzając ogromne namiętności), to dopiero w siedemnastowiecznej Francji spojrzano na nie przez pryzmat matematyki.

Wcześniejsze rezultaty dotyczą raczej obliczeń możliwych wyników przy wywodzącej się ze Starożytności grze w kości. Któż nie zna słynnego zawołania Juliusza Cezara – *Iacta alea est!* (kości zostały rzucone), które jest dobitnym potwierdzeniem popularności tego rodzaju gier. Również w średniowiecznej Europie modna była *gra w trzy kości*: gracz wygrywał, jeśli przy rzucie trzema kostkami suma wyrzuconych oczek przekraczała 10. Jakie są szanse zawodników w tej grze? Po chwili zastanowienia zapewne potrafisz Czytelniku wykazać, że ... są one równe!

Już w 1477 roku wenecki wydawca *Boskiej Komedii* Dantego (napisanej w latach 1310–1314) w komentarzu do części *Czyściec* usiłuje prowadzić analizę tej gry. W XVI wieku pojawiają się pierwsze systematyczne rachunki dotyczące szans wygrania prowadzone przez G. Cardano (1501–1576), N. Fontanę (zwanego Tartaglia) (1500–1557), a Galileusz (1564–1642) napisał nawet traktat *Rozważania nad grą w kości* (wydany dopiero w 1718 roku).

Znacznie trudniejszym zagadnieniem był następujący problem *sprawiedliwego podziału* znany już w XIII wieku:

> Dwaj gracze, stawiając taką samą stawkę, grają według następujących zasad: zgromadzony kapitał weźmie ten z graczy, który pierwszy wygra określoną liczbę partii. Grę przerwano, gdy pierwszemu graczowi brakowało do wygrania m zwycięstw, a drugiemu n zwycięstw. Jak sprawiedliwie podzielić zgromadzony kapitał pomiędzy graczy, jeśli w każdej rozgrywce szanse obu graczy są równe?

Czy powinien decydować o tym tylko dotychczasowy przebieg gry? Czy należy wziąć pod uwagę inne czynniki (jakie?)? Trzeba było kilkuset lat zanim znaleziono zadowalające rozwiązanie. Podejmij Czytelniku wyzwanie i zastanów się, jak Ty podszedłbyś do tego problemu.

Pytania dotyczące gier hazardowych prowadziły do zadań, które nie mieściły się w ramach istniejących wówczas modeli matematycznych. W XVII wieku problemy te szczęśliwie zbiegły się z rozwojem we Francji ubezpieczeń (handlu, podróży, pożyczek), prowadzeniem analizy stawek w celu trafnego określenia wysokości składek ubezpieczeniowych. Znacznie podniosło to „walor użytkowy" stawianych problemów.

Zagadnienia te miały oczywiście charakter utylitarny (!) – oczekiwano wymiernych korzyści (najczęściej finansowych), jakie miało przynieść poznanie zasad rządzących „przypadkiem" i świadome ich wykorzystywanie, często przy równoczesnym stwarzaniu pozorów równych szans dla obu stron. Działalność ubezpieczeniowa to nie filantropia.

Problemy te pobudziły wyobraźnię wielkich matematyków XVII wieku, m.in. B. Pascala (1623–1662), P. Fermata (1601–1665), Ch. Huygensa (1629–1695), którzy z powodzeniem je rozstrzygali, tworząc w ten sposób zręby nowego fragmentu matematyki – rachunku prawdopodobieństwa. Praca Huygensa *De ratiociniis in ludo aleae* (*O rachubach w grze w kości*) z 1657 jest chyba pierwszym dojrzałym dziełem ukazującym specyficzne pojęcia i metody nowej gałęzi wiedzy.

Pascal i Fermat dyskutowali problem sprawiedliwego podziału korespondencyjnie w 1654 roku. Doszli do wniosku, że właściwym rozwiązaniem jest podział kapitału proporcjonalnie do prawdopodobieństw wygrania całej kwoty przez pierwszego i drugiego gracza. Z obliczeniem stosownych prawdopodobieństw były pewne kłopoty... Dzisiaj nie przedstawia to większych trudności: pierwszy gracz wygra w następujących n przypadkach:

1. spośród m partii nie przegra ani jednej,
2. spośród m partii przegra jedną, a $(m+1)$-szą partię wygra,
3. spośród $(m+1)$ partii przegra dwie, a $(m+2)$-gą partię wygra,

....,

n. spośród $(m+n-2)$ partii przegrywa $(n-1)$, a $(m+n-1)$-szą partię wygrywa.

Zatem prawdopodobieństwo wygrania całego kapitału przez pierwszego i drugiego gracza wynosi, odpowiednio:

$$p_m = \frac{1}{2^m}\left(1+\frac{1}{2}\binom{m}{1}+\frac{1}{2^2}\binom{m+1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\binom{m+n-2}{n-1}\right),$$

$$p_n = \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{2}\binom{n}{1}+\frac{1}{2^2}\binom{n+1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{m-1}}\binom{m+n-2}{m-1}\right).$$

Czy taka była Twoja, Czytelniku, propozycja rozwiązania tego problemu? Jeśli na przykład graczowi A do wygrania brakuje $m = 2$ zwycięstw, a graczowi B brakuje $n = 3$ zwycięstw, to nagrodę należy podzielić między graczy A i B w stosunku 11:5 (bo $p_2 = \frac{11}{16}$, $p_3 = \frac{5}{16}$).

Ogólne rozwiązanie tego problemu jest następujące: jeśli gracze A i B prowadzili grę, w której ich szanse na wygranie w poszczególnych rozgrywkach wynoszą odpowiednio p i $q = 1-p$, gracz A potrzebuje jeszcze r, zaś B – s wygranych, to należy rozważyć $n = r + s - 1$ rozgrywek (jest to największa liczba potrzebnych gier, aby móc podjąć decyzję), i nagrodę podzielić w stosunku

$$\sum_{k=r}^{n}\binom{n}{k}p^k q^{n-k} : \sum_{k=0}^{r-1}\binom{n}{k}p^k q^{n-k}.$$

Szczególnie wymowna jest sytuacja, gdy graczowi A brakuje dokładnie jednej wygranej, wtedy stosunek w jakim należy podzielić nagrodę wynosi $1 - q^s : q^s$.

Może zabrzmi to paradoksalnie, ale tak wtedy jak i dzisiaj, jedną z przeszkód jaką musimy pokonać poznając ten niezwykły fragment wiedzy jest – nasza intuicja! Zwodzi ona nas wielokrotnie, co spróbujemy pokazać na kilku przykładach.

W 1837 roku S.P. Poisson (1781-1840) pisał: *Problem dotyczący gier hazardowych postawiony surowemu janseniście* [był nim B. Pascal] *przez człowieka światowego* [był nim Chevalier de Méré] *zapoczątkował rachunek prawdopodobieństwa.*

Jakiż to problem intrygował pana de Méré (właściwie nazywał się on Antoine Gombauld)? Grywał on w grę składającą się z 24 rzutów parą uczciwych kostek, w której obstawiano wypadnięcie co najmniej raz „pary szóstek" albo brak takiego zdarzenia. Pan de Méré, przekonany, że pojawienie się „pary szóstek" w tej grze jest pewniejsze niż wystąpienie zdarzenia przeciwnego, nie mógł zrozumieć, dlaczego obstawiając „parę szóstek" częściej przegrywał.

Intuicyjnie akceptował, że skoro w jednym rzucie dwoma kostkami szansa pojawienia się „pary szóstek" wynosi $\frac{1}{36}$, więc gdy wykona 24 takie rzuty, to szanse te wzrosną i będą wynosić $24 \cdot \frac{1}{36} = \frac{2}{3}$.

Z takim rozumowaniem zgadza się całkiem spora grupa ludzi poznających dopiero te zagadnienia. Intuicyjnie oczywiste jest, że im częściej będę wykonywał rzut dwoma kostkami, tym szanse, że pojawi się „para szóstek" rosną! Gdzie zatem tkwi istota problemu? Oczywiście w sposobie obliczenia jak duże są te szanse. Sposób zaprezentowany powyżej szybko prowadzi do absurdalnych wyników – gdybym rzucił 72 razy, to moje szanse na pojawienie się „pary szóstek" wynoszą ... – nonsens! W rzeczywistości szanse na pojawienie się „pary

Jansenizm to ruch religijno-społeczny rozpowszechniony w Europie Zachodniej, głównie we Francji, w XVII–XVIII wieku. Jego podstawą była praca flamandzkiego teologa, biskupa Ypres, Corneliusa Ottona Jansena (1585–1638) nawiązująca do teorii św. Augustyna. Koncepcja życia religijnego głoszona przez jansenistów (by społeczeństwo chrześcijańskie żyło według zaleceń św. Augustyna) została potępiona bullami papieskimi Innocentego X (1653 r.) i Klemensa XI (1713 r.). Spory jansenistów (mających zwolenników wśród wyższych sfer) z jezuitami, a w konsekwencji prześladowania jansenistów, miały spory wpływ na atmosferę intelektualną ówczesnej Francji. Głównym ośrodkiem jansenistów był Port-Royal koło Paryża.

Blaise Pascal (1623–1662) był wybitnie uzdolniony. Pracował twórczo w zakresie matematyki, hydrostatyki i filozofii. Miał również osiągnięcia literackie. To z jego nazwiskiem związane są twierdzenia o sześcioboku wpisanym w stożkową, o współczynnikach rozwinięcia dwumianu, podstawowe prawo hydrostatyki. Jest wynalazcą prostej maszyny liczącej (arytmometru), taczki, strzykawki, prasy hydraulicznej. Był pierwszym, który poprawnie sformułował i stosował zasadę indukcji matematycznej. Wspólnie z P.Fermatem stworzył część podstaw rachunku prawdopodobieństwa. Od 1654 roku w jego życiu dominują aspekty religijne. Związany z jansenistami wiedzie życie ascety i mistyka. Poglądy religijno-filozoficzne Pascala (wyrosłe z kartezjanizmu) zostały potępione przez Kościół, a jego dzieła *Prowincjałki*, *Myśli* (podobnie jak prace Kartezjusza) umieszczone na indeksie ksiąg zakazanych.

szóstek", gdy n razy rzucamy parą kostek wynoszą

$$p_n = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

($p_{24} = 0{,}491$). Odkrycie tego wzoru wymaga zrozumienia istoty problemu, a nie uleganie *naiwnej intuicji*. (Gra byłaby korzystna dla pana de Méré, gdyby obowiązywało 25 rzutów parą kostek.)

Przypatrzmy się innej prostej grze – w „orła i reszkę", której reguły są następujące:

> Jeden z graczy rzuca symetryczną monetą co ustaloną jednostkę czasu. Za wyrzucenie „orła" płaci przeciwnikowi $1, za „reszkę" otrzymuje od przeciwnika $1. Rozliczają się po wykonaniu parzystej, stosunkowo dużej liczby rzutów, powiedzmy 200. Czy podczas gry obaj gracze przez taki sam czas będą zajmowali pozycję zwycięzcy?

Stan konta gracza rzucającego monetą możemy opisać wzorem

$$s_k = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_k,$$

gdzie $\varepsilon_k = 1$ jeśli wypadła „reszka" oraz $\varepsilon_k = -1$ jeśli wypadł „orzeł", $k = 1, 2, \ldots$ Intuicja podpowiada nam, że w tej grze każdy z partnerów będzie wygrywał przez mniej więcej połowę długości całej gry, gdyż w każdym pojedynczym rzucie monetą szanse wyrzucenia „orła" są takie same jak wyrzucenia „reszki". Ponadto raz wygrywającym w grze będzie jeden z graczy, a po kilku następnych rzutach liderem będzie przeciwnik, i tak na zmianę.

Jeśli zgadzasz się z tymi stwierdzeniami Czytelniku, to Twoja intuicja Cię zwodzi!

Aby to zrozumieć poznaj *prawo arcusa sinusa*! (*Delta* 10/1984). Odkrył je w 1939 roku Paul Lévy. Wynika z tego prawa, że sytuacja $s_k = 0$ („remis" w tej grze) pojawia się bardzo rzadko – liczba remisów wzrasta mniej więcej jak $\sqrt{k}$. Oznacza to, że w stosunku do długości gry liczba „remisów" maleje ($\sqrt{k}/k \to 0$, gdy $k \to +\infty$), a wzrasta „długość fali", czyli okresów, w których jeden z graczy jest wygrywającym w grze. Ignorant obserwujący tę grę mógłby nawet pomyśleć, że jeden z graczy oszukuje posługując się fałszywą monetą.

Poznajmy jeszcze jedną, może trudniejszą grę.

> Gracze A i B uwielbiają zakłady. Losowo wybierają salę, np. kawiarnię, szkolną klasę, kino. Jeżeli w sali znajduje się para osób o wspólnym dniu urodzin (dzień i miesiąc), to wygrywa A, w przeciwnym wypadku zwycięzcą jest B. Czy w każdej sytuacji szanse obu graczy są takie same? Jeśli nie, to jakie powinny być stawki ich zakładów, aby zakłady te były możliwie uczciwe? (Zakład uznajemy za uczciwy, jeśli wartość oczekiwanej wygranej dla każdego gracza jest taka sama.)

Jeśli w sali jest 367 osób, to korzystając z *zasady szufladkowej Dirichleta* stwierdzamy istnienie pary osób o wspólnym dniu urodzin. Sytuacja gracza B jest beznadziejna. Jeśli w sali są tylko dwie osoby, to szansa, że mają wspólny dzień urodzin jest bardzo mała (wynosi około 0,0027) – w niekorzystnej sytuacji jest gracz A. Widzimy więc, że szanse obu graczy zmieniają się w zależności od liczby osób na sali. Spróbujmy określić ile osób powinno być na sali, aby szanse graczy były niemal identyczne (wtedy nie musimy interesować się stawkami zakładów). Który z szacunków wydaje się najodpowiedniejszy (zakreśl wybrany kwadracik):

a. wystarczy by w sali było mniej niż 50 osób (□),
b. w sali powinno być więcej niż 50 ale mniej niż 100 osób (□),
c. w sali powinno być więcej niż 100 ale mniej niż 200 osób (□),
d. w sali powinno być więcej niż 200 ale mniej niż 250 osób (□).

Trafność dokonanego wyboru możemy sprawdzić „prostymi" rachunkami. Przyjmijmy, że rok ma 365 dni, w sali zaś znajduje się n osób ($1 < n < 365$). Jeśli przez q_n oznaczymy prawdopodobieństwo, że każda z n osób urodziła się

Pomijając we wzorze na q_n iloczyny zawierające po kilka czynników ułamkowych otrzymamy przybliżenie

$$q_n \approx 1 - \frac{1+2+\ldots+(n-1)}{365} = $$
$$= 1 - \frac{n(n-1)}{730},$$

które jeszcze możemy poprawić korzystając z logarytmów (dla $0 < x < 1$, $\ln(1-x) \approx -x$)

$$\ln q_n \approx -\frac{n(n-1)}{730},$$

a w konsekwencji

$$p_n \approx 1 - e^{-\frac{n(n-1)}{730}}.$$

innego dnia, to

$$q_n = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{365-(n-1)}{365}.$$

Wówczas prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego (w grupie n osób istnieje para o wspólnym dniu urodzin) wynosi

$$p_n = 1 - q_n = 1 - \frac{365!}{n! \cdot 365^n}.$$

Dla wielu ludzi numeryczne konsekwencje tego wzoru są zaskakujące. Wynika bowiem z niego, że szanse obu graczy są niemal identyczne, gdy na sali są 23 osoby ($p_{23} \approx 0{,}507$).

Dysponując już wartościami p_n możemy określić warunki uczciwego zakładu w zależności od liczby osób znajdujących się na sali korzystając z proporcji $\frac{p_n}{q_n}$ – patrz tabela.

Liczba osób w sali (n)	Prawdopodobieństwo istnienia pary urodzonej tego samego dnia (p_n)	Przybliżone warunki uczciwego zakładu
10	0,117	13:100
20	0,411	70:100
23	**0,507**	**103:100**
30	0,538	116:100
40	0,912	10:1
50	0,970	33:1
60	0,994	166:1

Przykładowo, jeśli w sali jest 50 osób, to zakład jest uczciwy, gdy gracz A stawia \$1 przeciwko \$33 gracza B. W tym przypadku, jeśli znajduje się tam para o wspólnym dniu urodzin (prawdopodobieństwo tego jest duże), to gracz A płaci \$1 graczowi B, gdy zaś takiej pary nie ma (prawdopodobieństwo tego jest małe), to gracz B płaci \$33 graczowi A.

Może powyższe przykłady przekonały Cię Czytelniku, że nawet w „niewinnych" grach kryją się niebanalne, inspirujące pytania. Odpowiadając na nie warto pamiętać, by wiedzę wspomagać intuicją, a intuicję popierać wiedzą!

Literatura

A.P. Juszkiewicz (red.), *Historia matematyki*, t. II, *Matematyka XVII stulecia*, PWN, Warszawa 1976.
W. Feller, *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, t. I, PWN, Warszawa 1977.
J. Neyman, *Zasady rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej*, PWN, Warszawa 1969.
W. Tatarkiewicz, *Historia filozofii*, t. II, PWN, Warszawa 1978.

II. Kreatywne błądzenie

Takich słów jak *chaos*, *błądzenie* używamy do opisu zjawisk skomplikowanych, nieprzewidywalnych, gwałtownie zmieniających się w czasie, których często *ad hoc* nie potrafimy wyjaśnić. Dają one wyraz naszej irytacji, niepewności, gdy mamy do czynienia ze zjawiskami, których nie potrafimy okiełznać, nad którymi nie potrafimy zapanować (podobny wydźwięk ma słowo *żywioł*). Fascynuje nas jednak dostrzegalna „prawidłowość" – często z chaotycznych, bezładnych, żywiołowych działań wyłania się jakaś regularność. To wystarczający argument, by bliżej przyjrzeć się pewnym zjawiskom, w których dużą rolę odgrywa przypadek. Naturalnym sprzymierzeńcem w opisie takich sytuacji jest rachunek prawdopodobieństwa.

Wszyscy spotykamy się z *błądzeniem* i to od najmłodszych lat (choć nie zdajemy sobie z tego sprawy). Nie chodzi tu jednak o analogię do przypadku Jasia i Małgosi z bajki braci Grimmów, czy też łacińskiej sentencji *errare humanum est* (błądzić jest rzeczą ludzką). O jakim więc błądzeniu chcemy mówić? Wyjaśnimy to wskazując kilka przykładów.

Ruch pionka podczas gry planszowej, w której pionek przesuwamy zgodnie z regułami gry w zależności od liczby oczek wyrzuconych na kostce, jest prostym przykładem *błądzenia przypadkowego*. Wędrówka pionka zależy od przypadku, a nie od umiejętności gracza! Właśnie takim zjawiskom spróbujemy się przyjrzeć.

Zatrzymajmy się przez chwilę nad przykładem dla „starszych dzieci". Umówmy się, że błądzenie nazwiemy *symetrycznym*, jeśli obserwowany obiekt w dowolnym momencie będzie miał równe szanse poruszania się w każdym z wyróżnionych kierunków przestrzeni. Obserwujemy na przykład spacer chłopaka z dziewczyną po parku, w którym plan alejek przypomina pokratkowaną kartkę papieru. Gdy dochodzą do skrzyżowania każde z nich (chcąc mieć wpływ na kierunek dalszego spaceru) rzuca symetryczną monetą. W zależności od czterech możliwych wyników: OO, OR, RO, RR, idą odpowiednio: $\leftarrow$, $\uparrow$, $\rightarrow$, $\downarrow$. Gdy dojdą na kraniec parku zawracają. Możemy również przyjąć, że spacer odbywa się w nieograniczonym parku. Czy w takim spacerze (symetrycznym błądzeniu przypadkowym) można zobaczyć jakąś regularność? O co w ogóle sensownie można się pytać? To trudne, ale... możliwe. Zacznijmy od pytań. Jeśli przyjmiemy, że spacer trwa nieskończenie długo (w praktyce dostatecznie długo), to nasze pytania mogą być następujące:

1. Jakie są szanse, że nasi znajomi kiedykolwiek dojdą do punktu, z którego wyszli?
2. Jakie są szanse, że nasi znajomi kiedykolwiek dojdą do wskazanego wcześniej skrzyżowania?
3. Jakie są szanse, że po wykonaniu określonej liczby kroków (po upływie określonego czasu) nasi znajomi znajdą się w uprzednio wyznaczonym miejscu?
4. Ile kroków (jakiego czasu) podczas takiego spaceru będą potrzebowali, aby znaleźć się w określonym punkcie?
5. Gdzie mogą się znajdować po wykonaniu określonej liczby kroków (po określonym czasie)?

Nie trudno wyobrazić sobie, że umiejętność wskazania metod pozwalających na udzielanie odpowiedzi na powyższe pytania może mieć (i ma) duże zastosowania w naukach przyrodniczych i technicznych.

Nieoczekiwaną własność takiego błądzenia (przypadkowego i symetrycznego), będącą jednocześnie odpowiedzią na pierwsze dwa pytania daje twierdzenie odkryte przez Georga Polyę (1887–1985) w 1921 roku.

> W przypadku błądzenia symetrycznego w przestrzeni jedno- i dwuwymiarowej prawdopodobieństwo tego, że błądzący obiekt wróci do położenia początkowego (znajdzie się w jakimkolwiek dopuszczalnym punkcie) równa się jedności. W przestrzenia trójwymiarowej prawdopodobieństwo to wynosi około 0,35.

Zatem naprawdę zabłądzić możemy dopiero w trzech i więcej wymiarach! (*Delta* 4/1987). Tę zaskakującą anomalię wymiarową można też wyrazić w następujący sposób:

- w przestrzeni jedno- i dwuwymiarowej prawdopodobieństwo, że błądzący obiekt przejdzie nieskończenie wiele razy przez dowolne, z góry dane położenie, równa się jedności, a w trzech wymiarach nie jest to prawdą;
- w przestrzeni jedno- i dwuwymiarowej dwa błądzące obiekty z prawdopodobieństwem równym jeden spotkają się nieskończenie wiele razy, podczas gdy w trzech wymiarach jest dodatnie prawdopodobieństwo, że nie spotkają się nigdy.

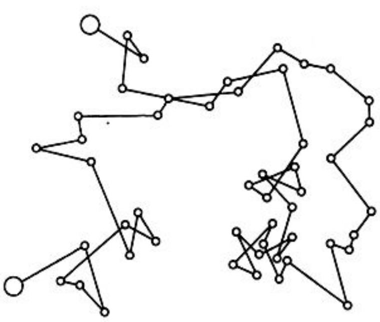
Problemy lokalizacyjne, których dotyczą pytania 3, 4, 5 są znacznie bardziej kłopotliwe. Dla przykładu zaprezentujemy jeden z rezultatów w tym kierunku dla dostatecznie dużych n:

> Jeżeli w trakcie jednego kroku obiekt może przemieścić się o $d = 1$, to z prawdopodobieństwem omyłki mniejszym niż ε ($\varepsilon > 0$) możemy twierdzić, że odchylenie obserwowanego obiektu od położenia początkowego po wykonaniu n kroków będzie mniejsze niż $r = \frac{2}{\sqrt[3]{\varepsilon}} \cdot \sqrt{n}$.

Wynika stąd, że w procesie błądzenia symetrycznego, z prawdopodobieństwem 0,95 możemy twierdzić, że po wykonaniu 1000 kroków (gdzie $d = 1$) błądzący obiekt będzie znajdował się w odległości $r \leq 172$ od położenia początkowego.

Zjawisko błądzenia przypadkowego nie jest tylko akademickim wymysłem – spotykamy je w naszym otoczeniu. Pierwszy zaobserwował je holenderski przyrodnik i konstruktor mikroskopów Antony van Leeuwenhoek (1632–1723) około 1677 roku, lecz nie podjął nad nimi badań.

Dzisiaj sztandarowym przykładem są tzw. *ruchy Browna* cząsteczki o mikroskopijnych rozmiarach zanurzonej w cieczy lub gazie. Szkocki botanik Robert Brown (1773–1858) w 1827 roku zapoczątkował badania nad dziwnymi, nieregularnymi ruchami drobnych pyłków kwiatowych rośliny *clarkia pulchella* w stojącej wodzie, których w żaden sposób nie potrafił wyeliminować (rys. 1). Niedługo potem odkryto, że ruch ten jest charakterystycznym zachowaniem się dowolnych dostatecznie małych cząsteczek. Intensywność tego ruchu zależy m.in. od temperatury, lepkości ośrodka i rozmiarów cząsteczek.



Rys. 1. Błądzenie cząstki gumiguty w odstępach co 30 sekund.

Ruchy Browna (oczywiście nie pojedynczej cząsteczki, ale dużej ich liczby) możemy zaobserwować w warunkach domowych, gdy kroplę atramentu „położymy" na powierzchni spokojnie stojącej wody w szklance. Po jakimś czasie (bez naszej ingerencji) atrament równomiernie „rozejdzie się" w wodzie.

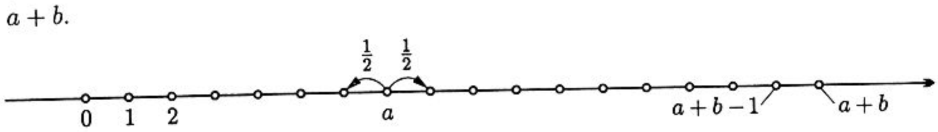
Zjawisko ruchu Browna w zadowalający sposób wyjaśniono dopiero dzięki pracom Alberta Einsteina (1879–1955) i Mariana Smoluchowskiego (1872–1917) z lat 1905–1906 (zobacz *Delta* 4/1983, 5/1983, 12/1997). Dalsze badania nad ruchami Browna prowadzone przez francuskiego fizyka J.B. Perrina (1870–1942) (otrzymał za nie Nagrodę Nobla w 1926 roku) doprowadziły m.in. do zakończenia sporów i uznania istnienia atomów i cząsteczek jako rzeczywistych jednostek fizycznych!

Badanie zjawiska przebiegającego przypadkowo legło u podstaw wyjaśnienia wielu zagadnień o podstawowym znaczeniu. Obecnie wiemy, że zjawisko ruchów Browna jest niemal wszechobecne, od rozchodzenia się zapachów w powietrzu (dyfuzja) po szumy fluktuacyjne będące zmorą elektroników. Bardzo spektakularna jest informacja o błądzeniu przypadkowym fotonów – aż dwa miliony lat (!) zajmuje energii generowanej w jądrze Słońca zanim wydostanie się na powierzchnię, skąd jest emitowana w postaci światła i ciepła, docierając do Ziemi zaledwie po 8 minutach.

Pokażemy teraz, jak dzięki analizie prostego błądzenia przypadkowego pionka po skończonym przedziale można uzyskać cenne informacje o oczekiwanym sukcesie bądź porażce w pewnych grach hazardowych. Rozważymy następujący problem:

> W pomieszczeniu stoją dwie jednakowe urny. Lewa ma a kul, prawa b kul. Kolejni ludzie wchodzący do pokoju z wybranej na chybił trafił urny wyjmują kulę i przekładają ją do urny sąsiedniej. Procedurę przerywamy, gdy jedna urna jest pusta.
> 1. Jakie jest prawdopodobieństwo opróżnienia każdej urny?
> 2. Jakie jest prawdopodobieństwo, że doświadczenie nigdy się nie skończy?

Aby rozwiązać to zagadnienie zbudujemy jego model matematyczny (to standardowy sposób, w jaki matematyk podchodzi do problemu). Na osi liczbowej zaznaczamy punkt 0 i liczby naturalne $1, 2, \ldots, a+b$. W punkcie a umieszczamy pionek, który co jednostkę czasu z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ przesuwamy o jedną jednostkę długości w prawo (gdy przełożono kulę z urny prawej do lewej) lub o jednostkę długości w lewo (gdy kulę przełożono z urny lewej do prawej) – rys. 2. Aktualna pozycja pionka określa liczbę kul w lewej urnie. Doświadczenie przerywamy, gdy pionek znajdzie się w punkcie 0 albo $a+b$.



Rys. 2

Oznaczmy przez p_k prawdopodobieństwo przejścia pionka z punktu k $(0 < k < a+b)$ do punktu 0. Oczywiście $p_0 = 1$, $p_{a+b} = 0$. Rozważmy dwa zdarzenia:

zdarzenie A – „pionek w jednym ruchu przeszedł z punktu k do punktu $k+1$",

zdarzenie B – „pionek w jednym ruchu przeszedł z punktu k do punktu $k-1$".

Zgodnie z przyjętymi założeniami $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$. Ponadto zrozumiałe jest, że

$$p_k = \frac{1}{2} \cdot p_{k-1} + \frac{1}{2} \cdot p_{k+1} \quad \text{dla } 0 < k < a+b$$

(korzystamy ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite). Jeżeli wzór ten zapiszemy w postaci

$$p_k - p_{k-1} = p_{k+1} - p_k$$

i tę stałą różnicę oznaczymy przez d, to mamy równości:

$$\begin{aligned} p_k - p_{k-1} &= d, \\ p_{k-1} - p_{k-2} &= d, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ p_1 - p_0 &= d. \end{aligned}$$

Sumując je stronami, otrzymujemy

$$p_k = 1 + k \cdot d.$$

Z równości $p_{a+b} = 0$ obliczamy $d = -\frac{1}{a+b}$, zatem

$$p_k = 1 - \frac{k}{a+b}.$$

Stąd mamy

$$p_a = \frac{b}{a+b}, \qquad p_b = \frac{a}{a+b},$$

i są to prawdopodobieństwa opróżnienia urny lewej oraz prawej. Ponadto $p_a + p_b = 1$, więc prawdopodobieństwo, że doświadczenie prowadzone będzie nieskończenie długo wynosi 0.

Uderzające w tym rozwiązaniu jest to, że do udzielenia odpowiedzi na postawione pytania nie była potrzebna zawansowana matematyka, wystarczyły „szkolne środki". Dodatkowo, znając odpowiedź na drugie pytanie możemy łatwiej zrozumieć dwa ważne sformułowania (często błędnie rozumiane):
gdy prawdopodobieństwo jakiegoś zdarzenia jest równe 0, to nie oznacza to, że zdarzenie to jest niemożliwe;
gdy prawdopodobieństwo jakiegoś zdarzenia jest równe 1, to nie oznacza to, że zdarzenie to jest pewne!

Rozwiązanie wyżej postawionego problemu znajduje zastosowanie w wielu sytuacjach. W rachunku prawdopodobieństwa znane jest zadanie, którego klasyczne sformułowanie jest następujące:

> ***Zadanie o ruinie gracza***
> Gracz A z kapitałem początkowym \$$a$ i gracz B z kapitałem \$$b$ $(a, b \in \mathbb{N})$ mają równe same szanse wygrania każdej partii. Wygrywający otrzymuje od przeciwnika \$1. Gra toczy się do momentu, gdy jeden z graczy zostanie bez pieniędzy. Jakie jest prawdopodobieństwo ruiny dla każdego gracza?

Odpowiedź już znamy, prawdopodobieństwo ruiny gracza A wynosi $p_a = \frac{b}{a+b}$, natomiast dla gracza B wynosi $p_b = \frac{a}{a+b}$. Oznacza to, że w tej grze większą szansę ruiny ma ten gracz, którego kapitał początkowy jest mniejszy.

Zadanie to prowokuje szereg pytań, m.in.:

1. Jakie jest prawdopodobieństwo ruiny dla każdego gracza, gdy ich szanse wygrania w każdej partii nie są równe?
2. Jakie jest prawdopodobieństwo wygrania zamierzonego kapitału, a nie ruiny przeciwnika?
3. Czy można określić długość gry (liczbę partii, jakie trzeba rozegrać), aby osiągnąć zamierzony cel?

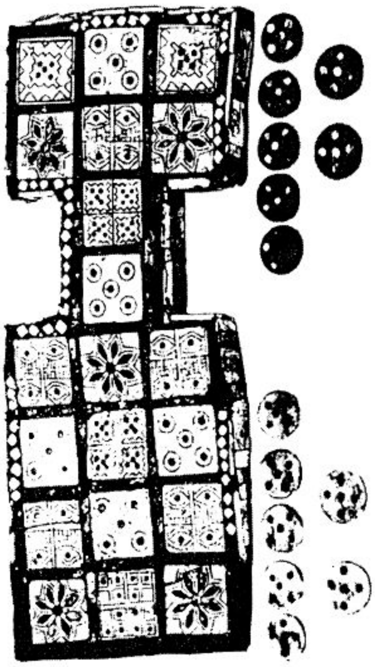
Spróbujemy coś na ten temat powiedzieć w następnej części, a tymczasem proponujemy aby Czytelnik sam zastanowił się nad tymi zagadnieniami.

Literatura

J. Dynkin, W. Uspienski, *Ciekawe zagadnienia matematyczne*, PZWS, Warszawa 1956.

A. Kołmogorow, A. Prochorow, I. Żubrienko, *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, WSiP, Warszawa 1993.

W jaskini hazardu



Tablica i żetony do sumeryjskiej gry. Wygląda na to, że podobnymi grami zabawiano się również w krajach położonych dalej na wschód – nawet na Sri Lance (Cejlonie) – a także bardziej na zachód, tam gdzie dzisiaj znajduje się Syria. Pokazany tu eksponat pochodzi z British Museum.

„Ryzyko" pobudza wyobraźnię (i nie tylko) ogromnej rzeszy ludzi. Szczególne emocje budzą gry, w których stawką są pieniądze lub inne dobra. Ludzie „od zawsze" wymyślali gry i nawet w tym względzie ulegali modom. Najstarsze „rekwizyty" w postaci rzeźbionych kamyków (tzw. *astragale*) wykorzystywane do gier oraz do wróżb, proroctw, a nawet podejmowania decyzji (opisy tych ostatnich znajdujemy w *Biblii*) pojawiają się już kilka tysięcy lat temu. W *British Museum* znajduje się tablica i żetony do sumeryjskiej gry (ok. 4000 r. p.n.e.), w starożytnym Egipcie znana była gra *psy i szakal*. W starożytnej Grecji, szczególnie w okresie wojny trojańskiej rozpowszechniła się gra hazardowa w kości. Starożytni Grecy i Rzymianie to twórcy zakładów. Niejako na marginesie ówczesnych zawodów sportowych (podczas olimpiad, wyścigów rydwanów, walk gladiatorów) obstawiano zakłady, typując przyszłego zwycięzcę. Podkreślić należy, że uprawianie wszelkich gier, zakładów, w których stawką były jakieś dobra, nie wszędzie było mile widziane, a nawet już przez ówczesne prawo było zabronione. Nie było ono jednak respektowane. Namiętnymi graczami byli m. in. rzymscy cesarze: August (63 p.n.e.–14 n.e.), Kaligula (12–41), Klaudiusz (10 p.n.e.–54 n.e.). W średniowiecznej Europie gry hazardowe w kości były nie mniej powszechne niż w starożytności. Ze wszystkimi przejawami hazardu walczyło chrześcijaństwo. W 813 roku Sobór w Moguncji nałożył ekskomunikę na wszystkich katolików oddających się temu nałogowi. W XIII wieku za sprawą wyprawy Marco Polo (1254–1324), z Chin docierają do Europy karty do gry, które z biegiem czasu wypierają grę w kości. Prawdopodobnie z Chin pochodzi też idea gry w *ruletkę*. Jednak w Europie jej „ojcem" jest Blaise Pascal (1623–1662), który skonstruował przyrząd z wirującym cylindrem i numerkami służący do gry. Za rządów Ludwika XVI (1754–1793) ruletkę umieszczono w paryskim klubie „Palais Frascati" (żona króla – Maria Antonina (1755–1793) słynęła z zamiłowania do gier hazardowych). Pół wieku później pojawiły się zmodyfikowane, ogólnodostępne stoły z ruletką w ekskluzywnych lokalach Paryża. Ludwik Filip I (1773–1850) zakazując tej gry, mimowolnie przyczynił się do tego, że ruletka stała się symbolem hazardu, a jego europejską stolicą zostało Monte Carlo (od 1863 roku). Za oceanem stolicą hazardu jest Las Vegas (stan Nevada), które od 1940 roku przejęło światową palmę pierwszeństwa. Obecność na naszych terenach astragali i kości do gry w dawnych czasach potwierdzają wykopaliska. Statuty Wiślickie z 1347 roku (zbiór praw dla Małopolski) próbują walczyć z grą na pieniądze. W czasach saskich gry hazardowe zyskują tak dużą popularność, że w roku 1768 Sejm Rzeczypospolitej zezwolił Kompanii Genueńskiej na prowadzenie pierwszej loterii pieniężnej. Pierwsze wzmianki o kasynach na ziemiach polskich pochodzą z 1889 roku, kiedy to w Tarnowie założono Stowarzyszenie Kasynowe. W okresie międzywojennym najbardziej znane było kasyno w sopockim „Grand Hotelu". Od 1989 roku w wybranych miastach Polski legalnie działają kasyna z takimi grami hazardowymi, jak ruletka, poker, black jack (garść ciekawych informacji dotyczących dwóch ostatnich gier zawiera artykuł Rényi'ego). Hazard ma wiele innych twarzy, od automatów w rodzaju „jednorękich bandytów", przez bakarata, bingo, lotto, zakłady bookmachreskie, po zakłady na wyścigach konnych.

Gry w kasynach istotnie różnią się od gier dotychczas prezentowanych w części I i II. Różnica polega między innymi na tym, że w takich grach naszym przeciwnikiem jest kasyno – partner zawsze chętny do gry o nieograniczonym kapitale. Ponadto żadne kasyno nie oferuje gry, w której gracz miałby takie same szanse wygrania jak i porażki, choć jak już wiemy (z części I) te dysproporcje mogą być niwelowane wysokością zakładów.

Zacznijmy od rozważenia następującej modyfikacji zadania o ruinie gracza:

> Gracz A z kapitałem początkowym $\$a$, z prawdopodobieństwem $0 < p \neq \frac{1}{2}$ wygrywa w każdej partii z graczem B posiadającym kapitał $\$b$ $(a, b \in \mathbb{N})$. Wygrywający otrzymuje od przeciwnika $1. Gra toczy się do momentu, gdy jeden z graczy zostanie bez pieniędzy. Jakie jest prawdopodobieństwo ruiny dla każdego gracza?

Przypatrzmy się grze z punktu widzenia gracza A. Niech $\lambda = \frac{q}{p}$, gdzie $q = 1 - p$. Oznaczmy przez p_k prawdopodobieństwo, że pionek z punktu k przejdzie do punktu 0 (analogia do modelu błądzenia z części II). Jeśli pionek z prawdopodobieństwem p przechodzi z punktu k do punktu $k+1$ i z prawdopodobieństwem q przechodzi z punktu k do punktu $k-1$, to

$$p_k = p \cdot p_{k+1} + q \cdot p_{k-1}.$$

Pamiętając, że $p + q = 1$, ostatnią równość możemy zapisać w postaci:

$$q \cdot (p_k - p_{k-1}) = p \cdot (p_{k+1} - p_k),$$

skąd

$$p_{k+1} - p_k = \lambda \cdot (p_k - p_{k-1}) = \lambda^k \cdot (p_1 - p_0).$$

Zatem

$$p_a - p_1 = \sum_{k=1}^{a-1} (p_{k+1} - p_k) = (p_1 - p_0) \cdot \sum_{k=1}^{a-1} \lambda^k = (p_1 - p_0) \cdot \frac{\lambda \cdot (1 - \lambda^{a-1})}{1 - \lambda}.$$

Korzystając z zależności: $p_0 = 1$, $p_{a+b} = 0$ wyliczamy najpierw $p_1 = \frac{\lambda - \lambda^{a+b}}{1 - \lambda^{a+b}}$, a następnie prawdopodobieństwo ruiny gracza A:

$$p_a = \frac{\lambda^a - \lambda^{a+b}}{1 - \lambda^{a+b}}.$$

W tej sytuacji prawdopodobieństwo ruiny gracza B wynosi:

$$p_b = \frac{1 - \lambda^a}{1 - \lambda^{a+b}}.$$

Oznacza to, że w przypadku, gdy gracz B dysponuje nieograniczonym kapitałem i $p < q$, to los gracza A jest przesądzony, prawdopodobieństwo jego ruiny wynosi:

$$p_a = \frac{\lambda^{a+b} - \lambda^a}{\lambda^{a+b} - 1} \approx \frac{\lambda^{a+b} - \lambda^a}{\lambda^{a+b}} = 1 - \lambda^{-b} \overset{b \to \infty}{\longrightarrow} 1.$$

Zastanówmy się teraz nad następującym problemem:

> Jakie jest prawdopodobieństwo nie ruiny gracza A, lecz tego, że jego kapitał wzrośnie do wysokości $\$N > \$a$, gdy jego przeciwnik B dysponuje nieograniczonym kapitałem?

W przypadku, gdy w pojedynczej grze prawdopodobieństwo sukcesu i porażki dla gracza A jest takie samo, to:

$$p_k(N) = \frac{1}{2} \cdot p_{k-1}(N) + \frac{1}{2} \cdot p_{k+1}(N),$$

gdzie $p_k(N)$ oznacza prawdopodobieństwo, że gracz A z kapitałem początkowym $\$k$ zdoła powiększyć go do wielkości $\$N$. Powtarzając obliczenia z części II, otrzymujemy

$$p_a(N) = \frac{a}{N}.$$

W przypadku, gdy w pojedynczej grze prawdopodobieństwo sukcesu gracza A wynosi $0 < p \neq \frac{1}{2}$, to naśladując rozumowanie przeprowadzone dla zmodyfikowanego zadania o ruinie gracza, otrzymamy

$$(*) \qquad p_a(N) = \frac{\lambda^a - 1}{\lambda^N - 1} \approx \lambda^{a-N}.$$

Istotne (dla właścicieli kasyna) jest również określenie średniej liczby gier zanim dojdzie do ruiny jednego z graczy. W przypadku, gdy prawdopodobieństwo sukcesu i porażki są takie same, to liczba ta jest równa $a \cdot b$. Gdy $p \neq q$, to liczba ta wynosi

$$\frac{a}{q-p} - \frac{a+b}{q-p} \cdot \frac{1-\lambda^a}{1-\lambda^{a+b}}.$$

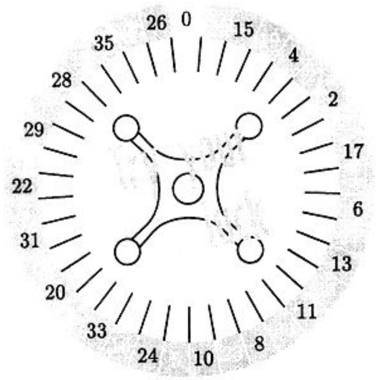
Zatem im większa jest różnica między p i q, tym liczba gier potrzebnych do ruiny jednego z graczy staje się coraz mniejsza.

W przypadku, gdy gracz z kapitałem $\$a$ chce osiągnąć kapitał $\$N$ w grze z $0 < p \neq \frac{1}{2}$, to średnia liczba gier od osiągnięcia tego celu ewentualnie ruiny gracza A wynosi

$$\frac{N \cdot p_k(N) - a}{2p-1}.$$

Gdy $0 < p < \frac{1}{2}$ oraz $N \gg k$, to dobrym przybliżeniem tej liczby jest $\frac{a}{1-2p}$. Oznacza to, że przy grze w ruletkę (za chwilę powiemy o niej więcej) średnia liczba gier potrzebna do osiągnięcia zamierzonego sukcesu lub ruiny gracza z kapitałem początkowym $\$a$, wynosi $37 \cdot a$.

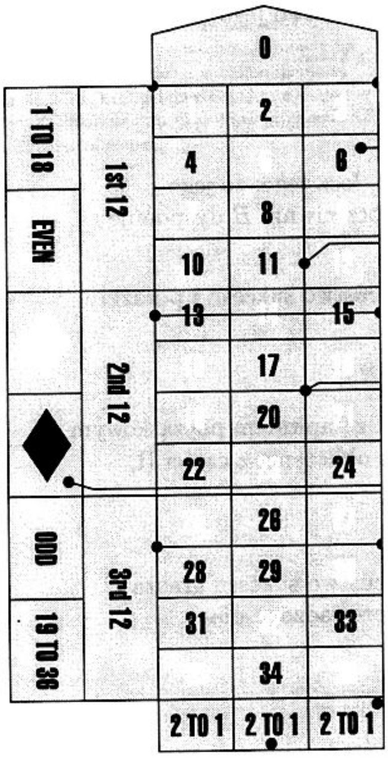
Zobaczmy teraz jak to wygląda w pewnych przypadkach gry w klasyczną ruletkę (amerykańską).



Rys. 1

Jak wiadomo do gry w ruletkę potrzebna jest mała kulka i okrągła tarcza podzielona na 37 równych ponumerowanych pól (od 1 do 36, pola na przemian czerwone i czarne, oraz 0 na polu białym), której można nadawać szybkie obroty. Liczby na kole nie są umieszczone kolejno (rys. 1). W ogólnym zarysie gra polega na trafnym typowaniu liczby, układu liczb lub koloru pola, na którym zatrzyma się kulka puszczona w ruch przez krupiera na wirującej tarczy (kulka powinna być puszczona w ruch znad numeru, który ostatnio wypadł). Na przykład, na planszy (rys. 2) można obstawiać:

- pojedynczy numer (od 0 do 36) – wypłata 35 do 1,
- grupę dwóch sąsiadujących na planszy liczb – wypłata 17 do 1,
- grupę trzech sąsiadujących na planszy liczb – wypłata 11 do 1,
- grupę czterech sąsiadujących na planszy liczb – wypłata 8 do 1,
- grupę czterech pierwszych liczb – wypłata 8 do 1,
- grupę sześciu sąsiadujących na planszy liczb – wypłata 5 do 1,
- grupę dwunastu zaznaczonych na planszy liczb – wypłata 2 do 1,
- pole czerwone lub czarne,
  liczby parzyste (bez zera) lub nieparzyste,
  liczby 1–18 lub 19–36 – wypłata 1 do 1.



Rys. 2

Niech kapitał początkowy gracza A wynosi \$900, a jego celem będzie osiągnięcie \$1000. W przypadku, gdy gracz ten zdecyduje się na grę w ruletkę obstawiając jedynie kolory przy stałej stawce \$1 (gdy wygrywa, to otrzymuje podwojoną stawkę, gdy przegrywa traci stawkę), to jego szansa na sukces zgodnie ze wzorem (*) wynosi: $p_{900}(1000) \approx 0{,}004486$ (w tym przypadku $p = \frac{18}{37}$). Gdy kapitał początkowy gracza jest mniejszy i wynosi tylko \$100, to jego szansa na sukces w tej grze dramatycznie maleje do poziomu: $p_{100}(1000) \approx 7{,}3626 \cdot 10^{-22}$.

Naturalne jest więc rozważenie następującego problemu: *czy można tak określić strategię gry w ruletkę, gdy obstawiamy tylko kolor (!), aby zwiększyć prawdopodobieństwo wygranej?*

Z obserwacji zachowań graczy wiadomo, że część z nich stara się powiększyć swoje szanse na wygraną grając tylko wtedy, gdy układ wygranych i przegranych w poprzednich grach tworzy pomyślne prognozy dla dalszych gier. Na przykład, przystępują do n-tej gry tylko wtedy, gdy wcześniej częściej wygrywali, albo tylko wtedy, gdy wcześniej częściej przegrywali sądząc, że najwyższy już czas na to, by w końcu pojawiła się wygrana. Z matematycznego punktu widzenia takie systemy nie przynoszą korzyści (są bezwartościowe)!

Inaczej rzecz się ma, gdy nasza strategia w grze polega na manipulowaniu stawkami w pojedynczej rozgrywce. Gdy w pojedynczej rozgrywce nasza szansa na wygranie jest mniejsza niż szansa porażki, to najlepsza jest tzw. *strategia odważnej gry*. W przypadku gry w ruletkę, gdy obstawiamy kolory, strategia ta jest następująca: gracz dysponujący kapitałem $\$a$, który chce powiększyć go do wysokości $\$N$ powinien w każdym etapie stawiać cały swój kapitał, gdy wygrana jest mniejsza niż $\$N$, bądź tyle, by w wyniku wygranej osiągnąć dokładnie cel (całkowity kapitał gracza po zainkasowaniu wygranej powinien wynosić $\$N$).

Jeśli przyjmiemy, że kapitał początkowy gracza wynosi x i spełnia warunek $0 \leq x \leq 1$, a jego celem jest osiągnięcie kapitału w wysokości 1 (normujemy problem), to funkcja prawdopodobieństwa sukcesu w odważnej grze dana jest następującą zależnością funkcyjną:

$$f(x) = \begin{cases} p \cdot f(2x), & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ p + q \cdot f(2x-1), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Zastosowanie tej strategii do omawianych wcześniej przykładów gry w ruletkę (obstawiamy tylko kolor) daje następujące wyniki: dla gracza dysponującego kapitałem początkowym \$900 szansa, że osiągnie on kapitał \$1000, wzrasta do poziomu $f(0{,}9) \approx 0{,}9426$, natomiast dla gracza z kapitałem początkowym \$100 szansa ta wynosi $f(0{,}1) \approx 0{,}0904$. Porównanie z wcześniejszymi wynikami pokazuje znaczny wzrost szans na sukces. Kasyna dążąc do ograniczenia nieuniknionych wahań dochodów i strat często zabezpieczają się przed takim postępowaniem graczy wprowadzając minimalne i maksymalne stawki na poszczególnych stołach. Ograniczenia te są oczywiście bardziej korzystne dla właściciela kasyna niż dla gracza.

Wśród graczy pewna popularnością cieszą się systemy polegające na stosowaniu stawek progresywnych i określaniu zasad stosowania progresji. Oto dwie wzajemnie przeciwne strategie:

- stawkę podwajamy po każdej przegranej, zaś po każdej wygranej wracamy do stawki minimalnej,
- stawkę podwajamy po każdej wygranej i powracamy do stawki minimalnej po każdej przegranej.

Systemy te oparte są na niczym nie uzasadnionej nadziei „dojrzewania szansy". Stosowanie ich stwarza jednak sporą szansę małej wygranej i stosunkowo niewielkie niebezpieczeństwo dużej straty.

Zdecydowanie niekorzystna dla gracza jest tzw. *ostrożna gra* (przeciwieństwo gry odważnej), której strategia polega na stawianiu zawsze możliwie najniższej stawki. Zgodnie z mocnym prawem wielkich liczb prowadzi ona do ruiny gracza.

Zapoczątkowane w XVII wiecznej Francji matematyczne rozważanie „ludzkich słabości" otworzyło nowe możliwości postrzegania otaczającego nas świata w postaci racjonalnego przewidywania zachowania się pewnych zjawisk (zobaczmy co się będzie działo, to wyprawa w przyszłość!). Wypracowane z biegiem lat teorie i metody znalazły rozliczne zastosowania ukazując jednocześnie niebywałą skuteczność matematyki. Kasyna i loterie są stabilnymi (dochodowymi) przedsiębiorstwami zbudowanymi na przestrzeniach probabilistycznych, może więc warto poznać rachunek prawdopodobieństwa jako matematyczny model *przypadku*.

Literatura

D. Bobrowski, P. Bobrowski, *Astragale*, Matematyka 1/1998.
P. Billingsley, *Prawdopodobieństwo i miara*, PWN, Warszawa 1987.
A. Rényi, *Gry hazardowe a rachunek prawdopodobieństwa*, w: *Mozaika Matematyczna*, E. Hódi (Red.), WP, Warszawa 1987, str. 196–218.
P. Strzelecki, *Metoda drzew w rachunku prawdopodobieństwa*, Matematyka-Społeczeństwo-Nauczanie 11 (1993).