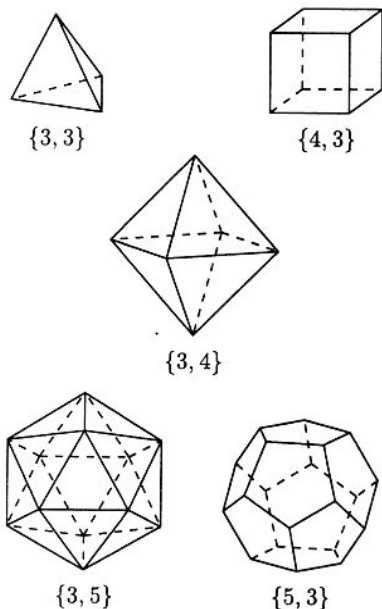
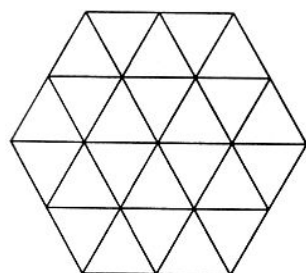


O bryłach i parkietach platońskich

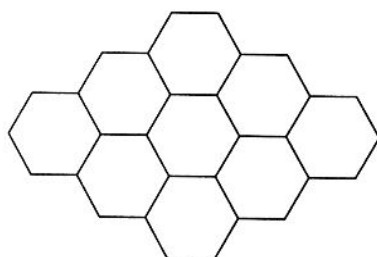
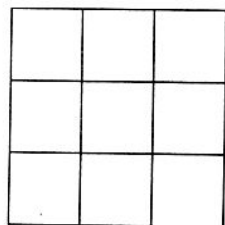
Jacek ŚWIĄTKOWSKI, Wrocław



Rys. 1. Bryły platońskie i ich symbole Schläfliego.



Rys. 2. Parkiet trójkątny {3,6}.



Rys. 3. Parkietaże {4,4} i {6,3}.

W artykule tym zapraszam Czytelników do wędrówki przez rozmaite krajobrazy geometryczne. Wycieczka ta będzie rodzajem penetracji idei platońskości i jej nieoczekiwanych realizacji. Szlak zaprowadzi nas z jednej strony do geometrii nieeuklidesowych – sferycznej i hiperbolicznej, z drugiej zaś do przestrzeni o liczbie wymiarów większej niż 3. Geometryczne światy euklidesowy, sferyczny i hiperboliczny odkryją przed nami liczne wiążące je współzależności. Nie zawahamy się też przed pójściem ścieżkami wiodącymi od niższych wymiarów do wyższych, gdzie bliskie pokrewieństwo pojęć bryły i parkietażu będzie nam drogowskazem. A zatem, w drogę.

Naszym punktem wyjścia są klasyczne bryły platońskie – powszechnie znane i lubiane ze względu na ich naturalne piękno wynikające z posiadania wielu symetrii. Rysunek 1 przedstawia komplet wszystkich pięciu takich brył. Każda z tych brył, oprócz nazwy wiadomego pochodzenia, posiada również liczbowy kod postaci $\{k_1, k_2\}$, zwany *symbolem Schläfliego*. Znaczenie liczb składających się na ten symbol jest następujące. Pierwsza oznacza, że wszystkie ściany w bryle są k_1 -kątami foremnymi, druga zaś informuje nas, że liczba ścian spotykających się wokół każdego wierzchołka bryły wynosi k_2 .

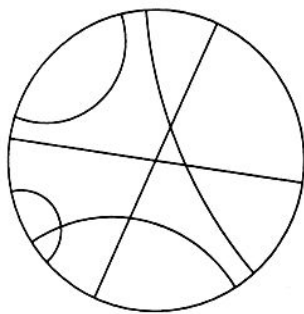
Postawmy sobie pytanie: czy są możliwe jakieś odpowiedniki brył platońskich dla symboli Schläfliego innych niż te, które opisują bryły z rysunku 1? Czym na przykład mógłby być obiekt platoński o symbolu $\{3, 6\}$? Zgodnie ze znaczeniem liczb w symbolu, obiekt ten powinien mieć trójkątne ściany równoboczne oraz sześć takich ścian wokół każdego wierzchołka. Taka sztuka nie może się jednak udać w bryle, czyli w wielościanie wypukłym, gdyż suma kątów płaskich wokół każdego wierzchołka bryły musi być mniejsza od kąta pełnego.

Mamy jednak inną możliwość. Zrezygnujmy z budowania bryły, a w zamian zapełnijmy trójkątami całą płaszczyznę tak, jak to przedstawia rysunek 2. Otrzymaliśmy bardzo regularny parkiet płaszczyzny, który przy odrobinie dobrej woli można by zaklasyfikować jako ∞ -ścian platoński. Zgubiły się gdzieś, co prawda, wypukłość i ograniczoność, ale pozostały liczne symetrie oraz ilościowe atrybuty pozwalające nam nazwać ten obiekt *parkietem platońskim* o symbolu $\{3, 6\}$.

Na płaszczyźnie da się jeszcze zbudować dwa inne parkietaże podobnego rodzaju. Są to parkietaże $\{4, 4\}$ i $\{3, 6\}$ przedstawione na rysunku 3. Nietrudny rachunek dotyczący kątów w wielokątach foremnym pokazuje, że inne takie parkietaże na płaszczyźnie nie są już możliwe. Listę pięciu brył platońskich uzupełniamy więc o trzy platońskie parkietaże.

Czy można osiągnąć coś więcej? Zastanówmy się np. nad symbolem Schläfliego $\{4, 5\}$. Pięć kwadratów możnaby zestawić wokół pewnego wierzchołka w przestrzeni, lecz stanowiłyby one widok dość pokraczny i trudno byłoby sobie wyobrazić zachowanie jakiejkolwiek regularności przy kontynuowaniu tej procedury wokół kolejnych wierzchołków. A nam zależy wszak na platońskiej estetyce.

Z pomocą w tej patowej sytuacji może nam przyjść geometria nieeuklidesowa, ponieważ występujące w niej kwadraty mają kąty różne od kąta prostego! Jednocześnie zaś estetyka platońska ma pełne prawo wstępu na nieeuklidesowe pałace, o czym przekonamy się już za chwilę. Najpierw jednak dokonam skrótowej prezentacji płaszczyzny, na której „ma miejsce” geometria nieeuklidesowa, zwanej *płaszczyzną hiperboliczną*. Płaszczyznę tę oznacza się zwykle symbolem H^2 by odróżnić ją od euklidesowej partnerki oznaczanej przez E^2 .



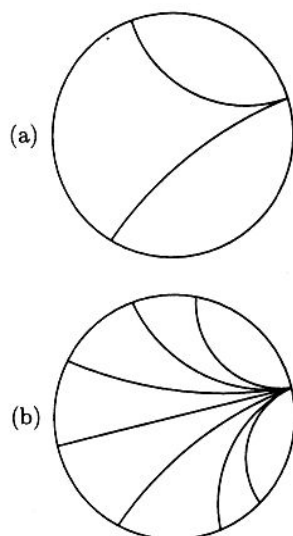
Rys. 4. Proste z H^2 w modelu.

Jednym ze sposobów dowiedzenia się czegoś o płaszczyźnie H^2 jest zapoznanie się z jej modelem wykonanym z części euklidesowych. Model taki nie jest tylko jakimś uproszczonym wizerunkiem tej płaszczyzny, lecz raczej bardzo precyzyjnym opisem zawierającym w matematycznie zakodowanej formie pełną informację o H^2 . Część z tej informacji jest łatwo dostępna już na poziomie wizualnym, i ta część powinna nam w zupełności wystarczyć.

W modelu, który przedstawiam, płaszczyznę H^2 reprezentuje wnętrze pewnego koła, powiedzmy koła D^2 . Na płaszczyźnie H^2 występują proste, które w modelu są reprezentowane przez dwa rodzaje linii:

- (1) przez średnice koła D^2 , bez punktów końcowych;
- (2) przez części łuków okręgów prostopadłych do brzegu koła D^2 zawarte we wnętrzu tego koła.

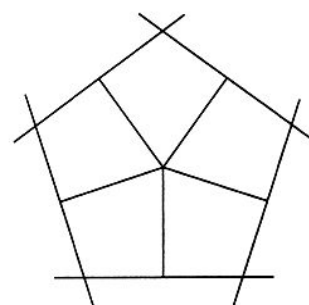
Wyjaśnijmy, że przez kąt pomiędzy przecinającymi się łukami okręgów rozumiemy kąt pomiędzy stycznymi do tych łuków w punkcie ich przecięcia. W tym sensie rozumiana jest prostopadłość łuku do brzegu koła D^2 . Przykłady rozmaitych linii reprezentujących w modelu proste z płaszczyzny H^2 pokazane są na rysunku 4.



Rys. 5. (a) Proste asymptotyczne. (b) Pęk prostych asymptotycznych.

W modelu, który opisuję, bardzo dogodna jest interpretacja miary kąta pomiędzy prostymi. Jest to po prostu miara kąta „widocznego” w modelu, rozumiana w sensie kąta pomiędzy stycznymi. Znacznie trudniej natomiast opisać w modelu odległość między punktami, gdyż nie jest ona zgodna z tym, co widać. Np. proste reprezentowane w modelu ograniczonymi łukami są w rzeczywistości na płaszczyźnie H^2 w obie strony nieograniczone. W naszych rozważaniach spróbujemy poradzić sobie bez dokładniejszych informacji o odległościach.

W geometrii hiperbolicznej nie ma sensu mówić o równoległości prostych. Występuje tam natomiast ciekawe zjawisko prostych *asymptotycznych*, czyli takich, które z pewnej strony coraz bardziej się do siebie zbliżają, ale pozostają rozłączne. W modelu łuki reprezentujące takie proste mają wspólny punkt na brzegu koła D^2 , tak jak jest to pokazane na rysunku 5a. Co więcej, można nawet mówić o całym *pęku prostych asymptotycznych*, podobnie jak na płaszczyźnie euklidesowej mówi się o pęku prostych przechodzących przez ustalony punkt. Pęk taki zilustrowany jest na rysunku 5b. Wspólny punkt prostych z tego pęku widoczny w modelu nie jest wszakże punktem płaszczyzny H^2 , gdyż leży na brzegu koła, a nie w jego wnętrzu. O punkcie tym trzeba raczej myśleć jak o abstrakcyjnym tworze leżącym już poza płaszczyznę hiperboliczną, dającym się jednak precyzyjnie zdefiniować. Tego rodzaju punkty nazywane są *punktami idealnymi*.

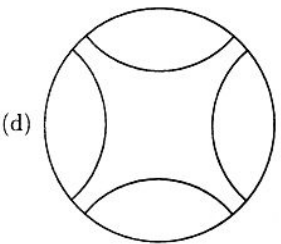
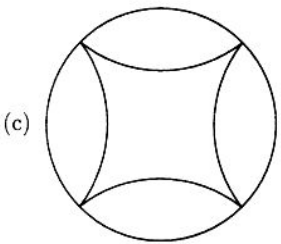
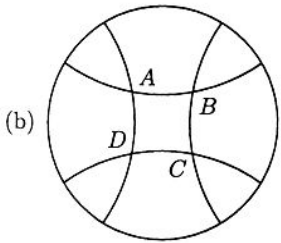
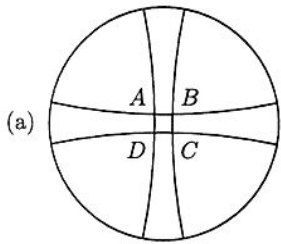


Rys. 6. Konstrukcja 5-kąta foremnego.

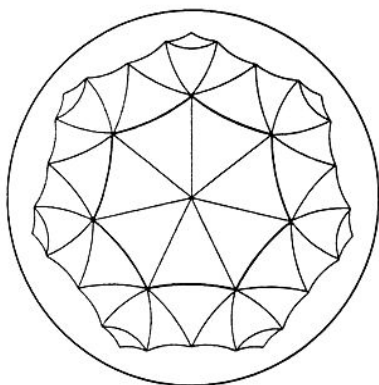
Mając już nieco informacji o płaszczyźnie hiperbolicznej postaramy się teraz zbudować na niej wielokąty foremne. Posłużymy się przy tym następującym sposobem dobrze wypróbowanym na płaszczyźnie euklidesowej. Z ustalonego punktu O wystawmy k_1 odcinków jednakowej długości d tak, by każde kolejne dwa tworzyły w punkcie O kąt $2\pi/k_1$. Przez drugi koniec każdego z odcinków poprowadźmy prostą doń prostopadłą. Obszar zawierający punkt O , wycięty przez te proste, jest k_1 -kątem foremnym, co ilustruje rysunek 6 dla $k_1 = 5$. Konstrukcję tę możemy bez żadnych zmian przeprowadzić na płaszczyźnie H^2 – jej możliwe rezultaty dla $k_1 = 4$ pokazują rysunki 7a-d.

Zatrzymajmy się na chwilę przy tych rysunkach, gdyż dostarczą nam one całego szeregu pożytecznych spostrzeżeń. Zaczniemy od uwagi, że na rysunkach tych za reprezentanta punktu O przyjmujemy środek koła D^2 . Odcinki wystawiane z tego punktu są zatem reprezentowane w modelu przez odcinki, zaś ich jednakowa długość również w modelu będzie jednakowa ze względu na radialną symetrię modelu.

Rysunki 7a i 7b niewątpliwie przedstawiają czworokąty foremne, czyli kwadraty. Mają one wszystkie kąty oraz wszystkie boki równe. Kwadrat z rysunku 7a jest nieco mniejszy, lecz nie jest to jedyna cecha różniąca go od towarzysza



Rys. 7. Kwadraty hiperboliczne.



Rys. 8. Parkietaż hiperboliczny $\{3, 7\}$.

z rysunku 7b. Przyglądając się uważnie możemy spostrzec, że kąty w tych dwóch kwadratach nie są takie same. Jest to w miarę sensoryjne odkrycie, oznacza bowiem że kwadraty na płaszczyźnie hiperbolicznej mają rozmaite kształty! Jeszcze uważniejsza kontemplacja rysunków pokazuje, że kąt w kwadracie hiperbolicznym jest tym większy, im mniejszy jest parametr d , użyty przy konstrukcji. W granicy, gdy $d \rightarrow 0$, miara tego kąta zbliża się do miary kąta w kwadracie euklidesowym.

Z innym zjawiskiem mamy do czynienia przy zwiększaniu parametru d . Rysunek 7c pokazuje, że przy pewnej krytycznej wartości d_0 utworzony kwadrat nie jest już właściwie wielokątem, gdyż wogóle nie ma wierzchołków. Taką figurę nazywa się *kwadratem idealnym*, gdyż za jego wierzchołki można przyjąć umownie odpowiednie punkty idealne. Zwiększając parametr d jeszcze bardziej, ponad krytyczną wartość d_0 , otrzymujemy figury jeszcze mniej przypominające wielokąty, jak na to wskazuje rysunek 7d. Takimi figurami na razie nie będziemy się zajmować.

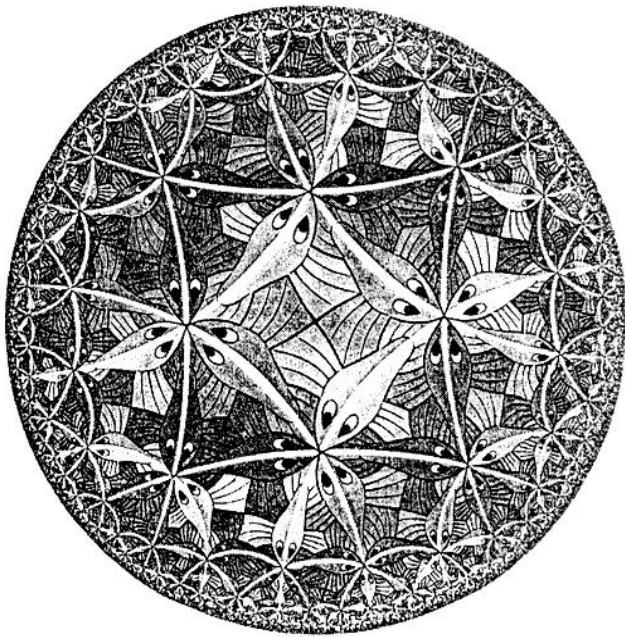
Kwadrat idealny jest dla nas przydatny o tyle, że wyznacza on jakby granicę przyzwoitości, której nie powinien przekraczać żaden uczciwy hiperboliczny kwadrat. Ułatwia on też obserwację, że przy $d \rightarrow d_0$ kąty w kwadracie hiperbolicznym maleją do zera. Po prostu w granicznym przypadku łuki spotykające się w punkcie idealnym są styczne, a więc przecinają się pod kątem zerowym. Kojarząc tę i poprzednie obserwacje dochodzimy do wniosku, że miara kąta w kwadracie hiperbolicznym może przyjąć dowolną wartość z przedziału $(0, \pi/2)$.

Spostrzeżenia poczynione dla hiperbolicznych kwadratów bez trudu można rozciągnąć na pozostałe wielokąty foremne. W ogólnym przypadku hiperbolicznego k_1 -kąta przedziałem możliwych do zrealizowania kątów jest $(0, \pi(k_1 - 2)/k_1)$. Górna granica tego przedziału to oczywiście kąt w k_1 -kącie foremnym euklidesowym.

Przypomnijmy w tym momencie pytanie, które zawiodło nas do rozważania kątów w hiperbolicznych wielokątach. Było to pytanie o platońskie parkietaże dla nieobsadzonych jeszcze symboli Schläffiego $\{k_1, k_2\}$. Ta sprawa wymaga pewnego dopowiedzenia. Otóż sensownie jest założyć, że k_1 -kąt jest przynajmniej trójkątem, zaś wierzchołek jest otoczony przynajmniej trzema wielokątami. Zauważ to zakres potencjalnie sensoryjnych symboli do tych, w których $k_1 \geq 3$ i $k_2 \geq 3$.

Możemy już udzielić kompletnej odpowiedzi na powyżej sprecyzowane pytanie. Aby to uczynić, rozważmy hiperboliczny k_1 -kąt foremny o kątach $2\pi/k_2$. Wielokąt taki istnieje o ile kąt $2\pi/k_2$ należy do przedziału $(0, \pi(k_1 - 2)/k_1)$. Tak dzieje się dla bardzo wielu par liczb k_1, k_2 , a w istocie dla wszystkich sensoryjnych par z wyjątkiem tych ośmiu, które występują w symbolach Schläffiego uprzednio opisanych obiektów platońskich. Po ustaleniu takiej pary i odpowiadającego jej wielokąta, pokrywamy płaszczyznę H^2 takimi właśnie wielokątami, przykładając je kolejno do siebie wzdłuż całych boków. Przy każdym kolejnym wierzchołku płaszczyzna pokrywa się naokoło wielokątami, bez zachodzenia i bez szczelin. Zawdzięczamy to dobrze dobranej mierze kątów w wielokątach. Procedura daje się kontynuować, aż do pokrycia całej płaszczyzny H^2 . Jej efektem jest posiadająca wielką regularność posadzka, którą mianujemy platońskim parkietażem o symbolu $\{k_1, k_2\}$. Tym samym każdy sensoryjny symbol Schläffiego uzyskuje odpowiadającą mu bądź bryłę bądź parkietaż platoński.

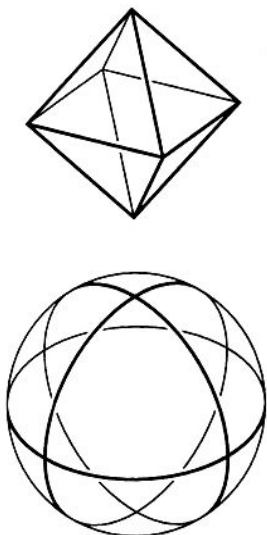
Dla lepszego oswojenia się z platońskimi parkietażami płaszczyzny H^2 posłużmy się ilustracjami. Rysunek 8 przedstawia w modelu początkową fazę budowy parkietażu $\{3, 7\}$. Równoboczne trójkąty zastosowane przy tej budowie mają jednakowe kąty o mierze $2\pi/7$, czyli około $51^\circ 26'$. Estetyczną regularność hiperbolicznych parkietaży dostrzegł holenderski grafik M.C. Escher. Jego drzeworyt oparty na tym motywie przedstawiony jest na rysunku 9. Drzeworyt Eschera daje dobre pojęcie o sposobie reprezentowania odległości w modelu płaszczyzny H^2 . Wykorzystany jako kanwa parkietaż nie jest wprawdzie



Rys. 9. M.C. Escher, *Okrąg graniczny*.

platoński, lecz jest on blisko związany z platońskimi parkietażami $\{8, 3\}$ i $\{3, 8\}$. Wytropienie tego związku pozostawiam Czytelnikom jako pouczające ćwiczenie.

Klasa zbadanych przez nas do tego momentu obiektów platońskich wykazuje pewną niejednorodność. W części składa się ona z brył, w części zaś z parkietaży. Ten obraz można i warto ujednoczyć, interpretując bryły platońskie jako parkietaż sfery. Rysunek 10 pokazuje jak wygląda parkietaż sfery odpowiadający ośmiościanowi. Ogólnie, aby otrzymać parkietaż odpowiadający dowolnej bryle platońskiej, zrzućmy wierzchołki i krawędzie tej bryły na powierzchnię sfery w nią wpisanej. Chodzi tutaj o rzutowanie po promieniach biegnących w kierunku środka sfery. Utworzona na powierzchni sfery siatka rozбивa ją na jednakowe sferyczne obszary i to one tworzą interesujący nas parkietaż. Obszary te są sferycznymi odpowiednikami wielokątów foremnych. Cały parkietaż spełnia nakładane przez nas dotychczas warunki na platońskość i, co więcej, dziedziczy od bryły, z której powstał, jej symbol Schläffiego.



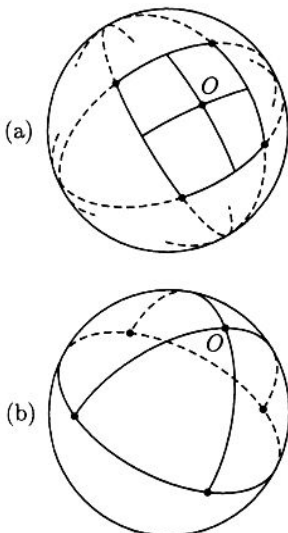
Rys. 10. Parkietaż sfery odpowiadający ośmiościanowi.

Na platońskie parkietaży sfery warto spojrzeć jeszcze z innej strony. Sferę można z powodzeniem potraktować jako płaszczyznę w pewnej nowej geometrii – *geometrii sferycznej*. Rolę prostych pełnią w tej geometrii *okręgi wielkie*, czyli okręgi wyglądające jak równik na powierzchni kuli ziemskiej. Okręgi takie powstają w przekroju sfery dowolną płaszczyzną przechodzącą przez jej środek. Bez trudu można określić pojęcie miary kąta pomiędzy przecinającymi się łukami okręgów wielkich. Jest to kąt, jaki tworzą w przestrzeni proste styczne do tych łuków w punkcie ich przecięcia. Z kolei odległość punktów na sferze określa się jako długość (krótszego) łuku okręgu wielkiego łączącego te punkty. Określenia te czynią ze sfery przestrzeń geometryczną konkurencyjną w stosunku do płaszczyzn E^2 i H^2 . Przez analogię do tych płaszczyzn zastosujemy do sfery oznaczenie S^2 .

Na S^2 można bez zmian powtórzyć stosowaną przez nas konstrukcję wielokątów foremnych. Rysunek 11a przedstawia uzyskany tą drogą kwadrat sferyczny. Kwadrat ten, w przeciwieństwie do swoich nieco wychudzonych hiperbolicznych kuzynów, wydaje się być raczej pulchny. Precyzyjnym tego przejawem jest miara kąta w dowolnym jego wierzchołku. Jest ona większa od miary kąta w kwadracie euklidesowym, czyli od $\pi/2$. Kąt ten w istocie jest tym większy, im większą wartość przyjmuje parametr d użyty w konstrukcji. W skrajnym przypadku przedstawionym na rysunku 11b kwadrat sferyczny degeneruje się do półsfery, gdyż jego kąty osiągną miarę π .

Odrzucając przykład z rysunku 11b jako patologiczny, nie pogardzajmy jednak płynącą z niego nauką. Przykład ten pokazuje, że górnym ograniczeniem na miarę kąta w sferycznym kwadracie jest π . Z drugiej strony, ponieważ małe kwadraty sferyczne są bardzo mało spuchnięte, ograniczeniem dolnym jest $\pi/2$, czyli miara kąta w kwadracie euklidesowym. Podobne rozumowanie stosuje się zresztą do dowolnego wielokąta sferycznego foremnego. Wszystkie kąty pomiędzy wartościami granicznymi mogą być faktycznie zrealizowane przez odpowiedni wielokąt.

Pozostajemy przy sferycznym kwadracie, dobierając tak parametr d w konstrukcji, by kąty kwadratu miały miarę $2\pi/3$. Z jednakowych kwadratów tej wielkości i kształtu można zbudować parkietaż sfery, począwszy od trzech kwadratów zestawionych bez zachodzenia i bez szczelin wokół dowolnego punktu. Parkietaż zbudowany w ten sposób jest taki sam jak parkietaż otrzymany z sześcianu przez rzutowanie promieniste. Sześcian, jako bryłę trójwymiarową, możemy odtworzyć z tego parkietażu prowadząc płaszczyznę



Rys. 11. Kwadraty sferyczne.

styczną do sfery przez środek każdego kwadratu. Komplet tych płaszczyzn wyznacza wielościan opisany na sferze, a jest nim właśnie sześcian. Podobny związek zachodzi między pozostałymi platońskimi parkietażami sfery a odpowiadającymi im bryłami. Z tego powodu platońskie bryły i parkietaże sfery możemy uważać za obiekty całkowicie równoważne.

Dotychczasowy pierwszy etap wyprawy przez krainę obiektów platońskich możemy podsumować takim oto zwięzłym stwierdzeniem:

Niech $k_1 \geq 3$ i $k_2 \geq 3$ będą liczbami naturalnymi. Wówczas $\{k_1, k_2\}$ jest symbolem Schläfliego platońskiego parkietażu:

- (a) sfery S^2 , gdy $1/k_1 + 1/k_2 > 1/2$;*
- (b) płaszczyzny euklidesowej E^2 , gdy $1/k_1 + 1/k_2 = 1/2$;*
- (c) płaszczyzny hiperbolicznej H^2 , gdy $1/k_1 + 1/k_2 < 1/2$.*

Wśród tych parkietaży jest 5 sferycznych, 3 euklidesowe i nieskończenie wiele hiperbolicznych.