Jest to skorygowany przez Autora przedruk z periodyku *Analecta*, wydawanego przez Komitet Historii i Filozofii Nauki PAN.

O przekonaniach leżących u źródeł matematyki

Jerzy MIODUSZEWSKI, Katowice

Matematyka nie wydaje się mieć wspólnej podstawy. U jej źródeł leżą przekonania. Kierują one rozwojem matematyki od czasów najdawniejszych. W naturze przekonań jest to, że nie mają postaci dokładnych stwierdzeń. Co więcej, otoczone są licznymi wątpliwościami, właściwymi wszelkim zasadom metafizycznym. Długi jest proces ich dojrzewania, zanim przejdą w ściśle wypowiedziany postulat matematyczny. Oparcie w przekonaniach natury metafizycznej daje matematyce poczucie wagi jej stwierdzeń.

Zacznijmy wszakże od problemów, na których ukształtowały się te przekonania.

1. Problem ruchu

Żyjący w V wieku p.n.e. Zenon z Elei, rozważając problem ruchu, natknął się na trudność – aporię – którą anegdotycznie przedstawił w ten mniej więcej sposób.

Lecąca strzała. W każdej chwili – kiedy ją obserwujemy – strzała spoczywa. Czas składa się z chwil. Jak więc się porusza? Kiedy jest w jakimś miejscu, nie zauważamy ruchu. Jej droga składa się z miejsc. I znowu to samo pytanie.

Logika formalna, która wtedy powstawała, podpowiadała, że za sprzeczność odpowiedzialne są założenia. Tymi założeniami były tu przekonania, że czas składa się z chwil, a przestrzeń z miejsc, które nazywane są też punktami. Zatem, przekonanie o budowie punktowej przestrzeni i czasu prowadzi do trudności. Ponieważ ten sposób widzenia przestrzeni i czasu wydaje się jedynym możliwym, przy próbach logicznego opisu ruchu jako procesu, więc należy zeń w ścisłych rozumowaniach matematycznych zrezygnować.

Byli myśliciele – a przypisuje się tę myśl i Zenonowi – którzy mieli wyciągać stąd wniosek o nieistnieniu ruchu. Podpierałoby to ideę Parmenidesa o nieruchomym bycie uniwersalnym *logosie* – podłożu wszelkich zjawisk. Ale była to nie więcej niż retoryka. Jeśli nawet odnoszono ją do bytu uniwersalnego, to nie odnoszono tego wniosku do zjawisk, których istotą jest – a głosił to nie tylko Heraklit – ustawiczna przemiana.

Arystoteles – mimo że nie miał uznania dla wywodów Zenona – potraktował trudność poważnie. W traktatach poświęconych problemowi ruchu – przede wszystkim w *Fizyce* – przedyskutował problem budowy punktowej przestrzeni i czasu, reprezentujących abstrakcyjne pojęcie *continuum*. Tę nazwę nadał obiektowi myślowemu, który tak jak przestrzeń i czas ma własność podzielności w nieskończoność. Doszedł do wniosku, że w budowie punktowej continuum tkwi logiczna sprzeczność, którą uzyskiwał niezależnie od argumentacji Zenona. Zapytywał: w jaki sposób punkty – a więc nicości – mogą składać się na wielkość? W jaki sposób mogłyby być koło siebie położone?

Konkludował: continuum jest podzielne w nieskończoność, ale podział zakończony podziałem na punkty **nie urzeczywistnia się**.

Ma się wrażenie, że sam Arystoteles nie uważał swojej argumentacji za wystarczającą. Ale konkluzja odpowiadała oczekiwaniom i jego argumentacja była zaakceptowana. Miało to zasadnicze konsekwencje dla rozwoju matematyki i fizyki na przeszło dwa tysiąclecia.

Trudność Zenona sprawiła, że pojęcie continuum punktowego znalazło się poza obrębem matematyki. Poza obrębem matematyki znalazł się ruch i – ogólniej – **zmienność**. Geometria Greków jest – według ich lapidarnych sformułowań – nauką o bytach nieruchomych. U Euklidesa punkt po prostej nie biegnie. Nieobecny jest czas. Nieobecny jest ruch jako proces przebiegający punkt po punkcie i chwila po chwili. Ale jednorazowa czynność bezczasowa, polegająca na zmianie miejsca jest obecna. Continuum pojawia się w geometrii, na przykład jako odcinek, który można jeszcze raz podzielić, a więc w rezultacie podzielić na skończenie wiele części.

2. Problem nieskończoności

Matematyka Greków – uwolniona od czasu i ruchu – nie stawała się jeszcze przez to wolna od niejasności związanych z nieskończonością.

Wśród aporii Zenona znajdowała się również następująca. O jej treści wnioskujemy pośrednio, znając na nią odpowiedzi, jakie pozostawili nam matematycy Starożytności.

Aporia wędrowca. Idziemy równymi krokami ku upatrzonemu celowi. Czy po pewnej liczbie kroków cel będzie przekroczony?

Pomyślmy, że idziemy równymi krokami w kierunku zachodzącego słońca. Na wątpliwości wędrowca Archimedes, a jeszcze przedtem Euklides i o pokolenie starszy Eudoksos, odpowiadali: **tak!**, cel będzie przekroczony, przestrzeń nie ma miejsc **nieosiągalnych**. Odpowiedź ta przybrała w *Elementach* Euklidesa formę postulatu, nazywanego obecnie **postulatem Archimedesa**. Postulat ten głosi, że odkładając na prostej odcinek, po pewnej liczbie odłożeń zapełnimy z góry dany odcinek – jakkolwiek byłby duży. Odcinki prostej są więc **wielkościami** o tej własności, że biorąc jakiekolwiek dwie spośród nich, nazwijmy je a i b (przyjmijmy, że $b < a$, bo jedynie wtedy powstaje problem), znajdziemy zawsze taką liczbę naturalną n, że $nb > a$.

O wszystkich rozpatrywanych przez siebie rodzajach wielkości, a więc o kątach, długościach, polach, objętościach, Grecy zakładali – jak teraz mówimy – ich *archimedesowskość.* W ten sposób – zgodnie z ich zasadniczym przekonaniem – nieskończoność pojawiała się w ich rozumowaniach jedynie **potencjalnie**. Jak pisał Arystoteles, matematycy nic na tym nie tracą, bo przecież rozpatrywane przez nich wielkości mogą być **dowolnie duże**.

Można również dotrzeć do wielkości **dowolnie małych**, bo postulat Archimedesa pozwala na otrzymanie wniosku, według którego, jeśli z danej wielkości (archimedesowskiej) usuniemy jej połowę, potem połowę pozostałości, to kontynuując to postępowanie, po pewnej liczbie kroków otrzymamy pozostałość mniejszą już niż ustalona z góry wielkość, jakkolwiek byłaby mała. Jest to słynne twierdzenie o **wyczerpywaniu**, które Archimedes przypisywał Eudoksosowi, opierając na nim swoją imponującą teorię rachunków nieskończonościowych.

Ważny jest w tym twierdzeniu wynik ilościowy: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = 1$. Ale ważne jest również to, że **metoda wyczerpywania**, oparta na tym twierdzeniu, nadawała ścisły sens stwierdzeniu, że jakaś wielkość – przeważnie niedostępna bezpośredniej ocenie – jest granicą ciągu nieskończonego wielkości – bardziej elementarnych – otrzymywanych na drodze określonej procedury. Przykładem jest opisana przez Archimedesa kwadratura paraboli, polegająca na wyczerpaniu odcinka paraboli ciągiem figur wielokątnych dopełniona dowodem, że ten sam ciąg figur wyczerpuje $\frac{4}{3}$ trójkąta wpisanego centralnie w ten odcinek. Metoda wyczerpywania ma udział w ustaleniu związku między polem koła i jego obwodem, między objętością kuli a objętością opisanego na niej walca, związku między średnicą koła a jego obwodem, czego rezultatem częściowym były otrzymane przez Archimedesa nierówności $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$, jeśli wyrazić je współczesnymi nam symbolami.

Aporia wędrowca – tak tu nazwana i sformułowana – leżąca u podstaw matematyki Archimedesa – była przez Zenona wypowiedziana w formie anegdoty o Achillesie goniącym żółwia. Anegdota ta ma wiele wariantów, przeważnie zniekształcających problem, dlatego znane z literatury jej wersje nie były przytoczone.

Odpowiednikiem arytmetycznym postulatu Archimedesa jest *zasada indukcji*, która orzeka, że dodając kolejno jedynki, tj. tworząc sumy 1, $1 + 1$,

$1 + 1 + 1, \ldots, \; 1 + \ldots + 1, \ldots$, dostaniemy – po pewnej liczbie dodawań – z góry upatrzoną liczbę naturalną. Grecy jednak nie uważali za konieczne formułowania tego, jako postulatu. Arytmetyki nie budowali, była im dana. Dopiero z końcem ubiegłego wieku zaczęliśmy zastanawiać się nad przekonaniami leżacymi u podstaw arytmetyki.

W geometrii Greków można było pomyśleć obiekt nieskończony, na przykład prostą. Ale postulat Archimedesa pozwalał każde rozumowanie dotyczące prostej sprowadzić do rozumowania dotyczącego pewnego jej odcinka. To samo dotyczyło płaszczyzny i przestrzeni. Każde rozumowanie dotyczące figur i punktów można było sprowadzić do rozważań w obrębie jednej figury. Figury tej jednak postulat Archimedesa nie wyznaczał. Nie wiemy, jak wielka jest liczba n potrzebna do zwielokrotnienia odcinka b, by otrzymać odcinek nb większy niż dany z góry odcinek a. Nie wiemy, jak wielka jest liczba n w sytuacji twierdzenia Eudoksosa o wyczerpywaniu.

Używając języka nam współczesnego powiedzielibyśmy, że metoda Archimedesa jest **niefektywna**.

Ale ta nieefektywna metoda zespalała twierdzenia geometrii w bardziej powiązaną ze sobą całość. Już matematykom arabskim było wiadomo o obustronnym związku **postulatu Euklidesa** o równoległych z sumą kątów trójkąta, otrzymanym dzięki postulatowi Archimedesa. Posługując się postulatem Archimedesa można dowieść (chociaż zrobiono to w całej ogólności dopiero w XIX wieku), że metoda porównywania pól figur płaskich przez rozkład na części odpowiednio do siebie przystające, jest równoważna metodzie – na pozór bardziej liberalnej – przez dopełnianie przystającymi do porównywalnych przez rozkład. Wreszcie, dzięki postulatowi Archimedesa można było oderwać się od wielkości mianowanych, przechodząc do obliczeń na wielkościach abstrakcyjnych, tj. do **proporcji** wielkości mianowanych. Archimedes wiedział, że proporcja, w jakiej są pole koła i pole kwadratu o boku równym jego promieniowi, jest tym samym, co proporcja, w jakiej są obwód koła i jego średnica. Tą wspólną proporcją jest wielkość π, mająca we współczesnej matematyce status liczby.

3. Demokryt – próba ominięcia trudności Zenona o strzale

Mimo że metody nieskończonościowe Archimedesa były znane i ulepszane zarówno przez matematyków doby hellenistycznej, jak i przez matematyków arabskich, to dalszy zasadniczy postęp nastąpił nie za ich sprawą. Rozwój, który nastąpił po stuleciach, dokonał się za sprawą innych metod – znanych – ale dotąd lekceważonych i wykluczanych poza oficjalną matematykę.

Źródeł tego innego sposobu myślenia można dopatrzeć się u Demokryta. Ale nie jest to pogląd ogólnie przyjęty. Sposób myślenia Demokryta nigdy nie był ujęty w obowiązujący kanon, pojawiał sią sporadycznie, a motywowany bywał nieraz z przeciwstawnych sobie pozycji. Niefortunni obrońcy przyczynili mu nie mniej szkody niż potępienie ze strony Platona.

Demokryt miał własną wersję aporii o strzale. Pytał o objętość stożka. Mogła być ona widziana jako suma przekrojów poziomych, narastająca w sposób ciągły z natężeniem proporcjonalnym do zmieniającej się wielkości tych pól. Mogła być też widziana inaczej, jako suma objętości skończonej ilości warstw poziomych, na które pocięty był stożek. Podpowiadało to rozwiązanie pozytywne, które w przekładzie na kinematykę głosiło: w nieskończenie małych – niepodzielnych – chwilach strzała przebywa drogi proporcjonalne do prędkości, jakie ma w tych chwilach i te drogi - sumując się – dają drogę całkowitą.

Nieistotne jest to, czy ten przekład był dokonany przez samego Demokryta. Nie znamy jego pism, ale wiadomo, że aporia o strzale miała wiele wersji, a ich wzajemne przekłady – chociaż zazwyczaj nieostre – nie sprawiały trudności.

Według Demokryta – w wersji ściślejszej – dwie figury miały mieć tę samą objętość, jeśli znajdując się między dwiema równoległymi płaszczyznami miały na równoległych do nich płaszczyznach przekroje o tych samych polach. To samo dotyczyło pól figur płaskich zawartych między dwiema prostymi równoległymi: dla równości ich pól wystarczyło wiedzieć, że ich przekroje prostymi równoległymi do tych prostych są te same, co do długości. Prawdziwość tego drugiego twierdzenia dawała się potwierdzić w systemie pojęć Euklidesa dla pewnych prostych figur, np. dla trójkątów. Euklides oparł na tym swój wyrafinowany dowód twierdzenia Pitagorasa. Zagadką pozostawała ogólna niewątpliwa prawdziwość twierdzenia.

Archimedes uważał stwierdzenie Demokryta za istotną wskazówkę dla hipotez, które potem potwierdzał ścisłymi metodami opartymi na metodzie wyczerpywania, dającej się wbudować w system Euklidesa.

Sytuacja powinna była niepokoić sumienie matematyków, bo oto jakaś ważna prawda ich dyscypliny znalazła się poza zasięgiem oficjalnego systemu. Ale reakcja była odwrotna – wyłączmy Archimedesa – właściwa purystom – i polegała na oburzeniu wobec stosowania nieprawomocnych metod.

Reakcja na zasadę Demokryta może być w dużym stopniu wytłumaczona niefortunną jej obroną. Używając argumentacji za pomocą warstw, chciano rozciągnąć na matematykę **atomistyczny** pogląd Demokryta dotyczący budowy materii. O warstwach, na jakie cięto figurę, mówiono, że są nieskończenie cienkie, że się nie dają już rozciąć na cieńsze, ale którym można jednak przypisać objętość. Te nieskończenie cienkie warstwy nazywano **niepodzielnymi**, stąd nazwa **metody niepodzielnych** dla opartej na tym poglądzie teorii.

Widzimy oczywistą nielogiczność argumentacji za niepodzielnymi. Zwracał na to uwagę Arystoteles w traktacie *O odcinkach niepodzielnych*. Krytyka Arystotelesa – z jednej strony – i możliwość włączenia do oficjalnego systemu matematyki pewnych ważnych szczególnych przypadków zasady Demokryta – z drugiej – sprawiły, że Starożytni nie upierali się przy rozwijaniu metody niepodzielnych. Również kinematyczna wersja zasady Demokryta nie budziła zainteresowania Starożytnych. Stała się obiektem rozważań filozofów na dobre dopiero w Średniowieczu.

4. Rzut oka na fizykę Starożytnych

Arystoteles nie negował roli matematyki, ale też nie uważał za konieczne podporządkowywanie jej wszelkich zjawisk. W jego **fizyce** – w skład której wchodziła **nauka o ruchu** – matematyka odgrywała niewielką rolę. Mimo to, mechanika stworzona przez Arystotelesa – obejmująca zarówno kinematykę, jak dynamikę – była teorią imponującą, dającą w zakresie obserwowanych w jego czasach zjawisk zadowalające wyjaśnienia i otwartą na dopływ nowych idei.

Podstawowym założeniem mechaniki Arystotelesa było to, że ruch fizyczny nie mógł być pomyślany bez udziału środowiska. Doskonale to rozumiemy mając na myśli wioślarza. Ale ruch pocisku wyrzuconego w górę Arystoteles tłumaczył również udziałem środowiska. Pocisk miał przepychać się przez gęstwę cząsteczek powietrza, jak przechodzień w tłumie. Środowisko jest teraz rzadkie i rozumienie tego tłumaczenia jest trudne. Ale Arystoteles nie chciał dopuścić tłumaczenia poprzez zachowywanie się impetu nadanemu pociskowi przy wyrzucie, uważając, że obiekt poruszany powinien być stale w kontakcie ze sprawcą.

Osiągnąwszy punkt najwyższy, pocisk rozpoczynał ruch następny nazywany **spadkiem swobodnym**. Ruch w górę nie miał chwili najpóźniejszej, ruch w dół najwcześniejszej. Co dzieje się w fazie przejściowej? Jak długie jest jej trwanie? Była to trudność myślowa związana z continuum czasowym. Pojęcie **prędkości chwilowej** było odrzucone przez Arystotelesa jako niesensowne. Prędkość była **stanem** ruchu utrzymującym się przez pewien przeciąg czasu. Zatem faza przejściowa nie może trwać jedną chwilę. Problem fazy przejściowej – echo aporii o strzale – był punktem newralgicznym dyskusji nad kinematyką Arystotelesa, którą przerwał dopiero Galileusz.

Dynamika Arystotelesa zakładała stały dopływ siły dla utrzymania prędkości. Modelem był wioślarz i lot ptaka.

Osobliwością mechaniki Arystotelesa było również i to, że idealny ruch nieba był wyłączony poza fizykę. Był problemem geometrii i jako taki był włączony do matematyki. Ten ruch był wieczny i nie wymagał udziału środowiska. Na wpół ateistyczny światopogląd Greków tolerował ten podział praw, innych dla sfery podksiężycowej, innych dla sfer nieba.

Teologia chrześcijańska, a później islamu, domagała się jednolitej teorii dla ruchu nieba i ruchów ziemskich. Filozof aleksandryjski Filopon żyjący w VII wieku zaproponował rozwiązanie wspólne w postaci zaniechanej kiedyś przez Arystotelesa **teorii impetu**, według której ciało wprawione w ruch zachowuje swój **impet**, jeżeli nie napotka oporu środowiska. Dopuszcza się tym samym myślowo **próżnię**. Było to – jak się poźniej okazało – początkiem zasadniczych modyfikacji mechaniki Arystotelesa, mających swoją kulminację u Newtona.

* * *

Nie traktujmy okresu, jaki upłynął między Starożytnością klasyczną a Europą Nowożytną, jako przerwy w ciągu zdarzeń. Był to okres wypełniony zmianami na wielu polach. Przeobrażała się również matematyka, wypełniając w okresach aleksandryjskim i arabskim luki w swoim dotychczasowym rozwoju, w arytmetyce, w powstałej na jej gruncie algebrze i w metodach matematycznych astronomii. Można sądzić, że ten rozwój skutkował tym, iż kiedy w Europie Średniowiecza wrócono do problemów ruchu i budowy continuum, dyskusje zaczynały się już w innym punkcie i mogły być dojrzalsze.

5. Kinematyka i dynamika Scholastyków

Scholastycy XIV wieku zetknąwszy się z problemem ruchu, a w rezultacie z problemem *continuum*, nawiązywali do pewnej niekonsekwencji, na jaką natrafili u Arystotelesa. Otóż, Arystoteles – nie dopuszczając do rozważań prędkości chwilowej – w ogólnych rozważaniach nad zmiennością dopuszczał pojęcie, które Scholastycy nazywali **intensywnością zmiany**. Była to wielkość niedefiniowana i pomyślana jako niedefiniowalna. Mogła reprezentować w ich rozważaniach intensywność barwy i intensywność wiary, ale synkretycznie również intensywność ruchu, a więc prędkość, a w rezultacie impet. Mimo niedefiniowalności, rozumienie intensywności było na tyle określone, że narzucało dostatecznie jasne reguły przy posługiwaniu się tym pojęciem.

Teza filozofów scholastycznych z **Merton College** w Oksfordzie – ale znana również scholastykom z Paryża – głosiła, że intensywność zmiany, np. intensywność zmiany obserwowanej w czasie – determinuje wielkość dokonanej zmiany. Mikołaj Oresme z Paryża ilustrował tę tezę odkładając nad punktami reprezentującymi chwile – odcinki równe aktualnym dla tych chwil intensywnościom. Powstająca w ten sposób figura – nazywana **formą** – reprezentowała dokonywaną zmianę ilościowo. Filozofowie z Oksfordu nazywani Calculatorami zmieniającą się wielkość wyobrażali sobie jako strumień – **fluentę** – i z jego intesywności – **fluksji** – wnioskowali o sumie przepływu w strumieniu. Nie negując motywacji teologicznych, rozważania te torowały drogę do ważnych sformułowań w zakresie **filozofii przyrody**, jak wtedy nazywano **fizykę**.

Najbardziej znanym spośród filozofów tego kręgu jest Suisseth, a nazwani byli Calculatorami z przyczyny ich osobliwych obliczeń pól reprezentujących sumy nieskończone szeregów liczbowych.

Jean Buridan – poprzednik Mikołaja Oresme w Paryżu – w rozważaniach nad ruchem pocisku, w których szedł śladem Arystotelesa skłonił się ku **teorii impetu**, rozwijając tę teorię dalej niż to zrobił przed nim Filopon, przez co uważany jest za jej twórcę. Zastanawiając się nad przyczyną wzrastania impetu swobodnie spadającego ciała, twierdził, że jest ono skutkiem wtłaczania – ze stałym natężeniem – w to ciało siły, jaką w tym przypadku jest ciężar.

Mikołaj Oresme i Calculatorowie nie mieli więc wątpliwości – stosując swoją zasadę – że spadające swobodnie ciało ma ruch jednostajnie przyśpieszony, tj. taki, w którym prędkość – reprezentująca impet – wzrasta jednostajnie.

Na rozwój nauki europejskiej od dawna patrzymy inaczej niż to do tej pory przedstawiają nam dawne kanony historyczne. Z tekstów nieźródłowych można dla zapoznania się z tym innym poglądem wziąć książkę Herberta Butterfielda, *Rodowód współczesnej nauki 1300 – 1800*, 1958, tłum. polskie 1963, lub dwutomowe dzieło Allistaira Crombiego, *Matematyka średniowieczna i początki nauki nowożytnej*, Pax 1960. Ale są źródłowe badania Clagetta w Madison, Zubowa w *Istoriko-matiematiczeskich issledowanijach*, Truesdella u Springera. Jest wreszcie zbiór esejów autora pt. *Ciągłość*, Warszawa 1996, gdzie ten temat uzyskuje szersze omówienie niż tu.

Przykładem może być Kopernik, który ignorował – jako nie mające większej wartości – hipotezy filozofów przyrody dotyczące ruchu Ziemi.

Z kolei, prędkość można było traktować jako intensywność narastania w czasie drogi, którą reprezentowano jako figurę pod wykresem prędkości. Było już prostym spostrzeżeniem, że w ruchu, w którym prędkość wzrasta – od zera – jednostajnie – jej wykres jest linią prostą – przyrosty drogi w kolejnych równych odstępach czasu mają się do siebie jak $1 : 3 : 5 : 7 : \ldots$. Oczywiście, spadek swobodny odbywał się w próżni, której obecność myślowa była wbudowana w teorię. Czymś innym było istnienie próżni fizyczne. Wypisany ciąg kolejnych liczb nieparzystych spotykamy przeszło dwa stulecia później u Galileusza, który sumując kolejne jego wyrazy dostawał ciąg $1, 4, 9, 16, \ldots$ kolejnych kwadratów liczb naturalnych reprezentujących przebyte przez spadające ciało drogi po upływie narastających równo odstępów czasu.

Idee Buridana, Oresme'a i Calculatorów były obecne w nauce średniowiecznej Europy, ale imponująca teoria narastała powoli. Burzyła od środka system fizyki Arystotelesa. Zakładała – i w rezultacie budowała – jednolity pogląd na zjawiska ziemskie i w sferze nieba. Był to prawdziwy przewrót w poglądzie na budowę świata. Nie powinno nas zmylić lekceważenie z jakim odnoszono się w okresie Odrodzenia i Reformacji do subtelnych dysput scholastycznych. Patrząc z oczywistą niechęcią na bezpośrednich poprzedników, szukano patronów w niekonfliktowej Starożytności.

* * *

6. Galileusz

Znając dorobek Scholastyków, inaczej trzeba patrzeć na późniejsze dokonania Galileusza. Nie patrzmy na oryginalność, lecz na wielkość jego dzieła. W jednym z dialogów wypowiada Galileusz ustami Simplicia zdanie: „A jeśli zabraknie Arystotelesa, któż zajmie jego miejsce?" Otóż, Galileusz przez całe życie widział się w roli Arystotelesa swoich czasów, zarówno wtedy, kiedy wgłębiał się w scholastyczny sposób myślenia, który w końcu stał się jego własnym, jak i wtedy, kiedy dochodził do sprzecznych z nim konkluzji. W jego dialogach najskrytsze jego myśli wypowiadał właśnie Simplicio – obrońca dawnych zasad. Prawo spadku swobodnego uzasadniał tym samym rysunkiem, co Oresme. Nie cytował Oresme'a – nie było wtedy zwyczaju powoływania się na poprzedników – chyba że Starożytnych. Nie musiał sprawdzać doświadczalnie tego prawa. Upewniony w tym prawie był żyjący sto lat przed Galileuszem uczony z Salamanki Domingo de Soto. Jeśli Galileusz robił doświadczenia, to raczej ulegając presji wtedy panującej. Poświęcił lata na prześledzenie – jak gdzieś się wypowiedział – całego labiryntu myśli wokół continuum i problemów ruchu. Z jego pism widzimy, że między *Dialogiem* i *Rozmowami* przeszedł ewolucję poglądów, dochodząc do wniosku, że trzeba odrzucić dawną myśl Arystotelesa – potwierdzaną później przez Oresme'a – według której każdy stan prędkości ma pewne trwanie, wypowiadając słynną frazę, że pocisk rzucony w górę przechodzi wszystkie stopnie prędkości **na żadnym się nie zatrzymując**. W ten sposób i faza przejściowa trwa tylko jedną chwilę. Ten pogląd zgadzał się z opisem ilościowym ruchu, który wcześniej był znalazł, a który wyrażamy wzorem $s = \frac{1}{2}gt^2$. Prędkość chwilowa obecna synkretycznie w rozważaniach scholastycznych, teraz – mimo że nadal niedefiniowana – pojawiła się w arytmetycznym – ilościowym – opisie ruchu.

Galileusz był tym, który zauważył, że możemy wiedzieć **jak** coś się dzieje, nie wiedząc **dlaczego**. Od czasów Galileusza od filozofii oddziela się jej część nazywana *nauką*. Postęp nauki oddzielonej od filozofii może się teraz dokonywać szybciej, skoro odrzucone są pewne pytania. Nie mamy przesłanek, aby twierdzić, że Galileusz świadomie dokonał tego oddzielenia. Można powiedzieć nawet, że ten podział kłócił się z jego postawą uczonego. Dorobek swoich poprzedników scholastytycznych początkowo pogłębiał w ich konwencji. Nastąpił jednak moment, w którym powiedział, że nawet Arystoteles – jeśliby znał nowe fakty – przychyliłby się do jego konkluzji.

Trudność Zenona – jeśli patrzeć na wzór matematyczny – nie pojawia się. Ale trudność w zrozumieniu ruchu jako zjawiska fizycznego nie znika. Opis matematyczny niczego nie wyjaśnia. Trudność przesuwa się w nowe miejsce, jakim staje się **stosowalność** matematyki.

W nastawionym na rezulaty ilościowe przyrodoznawstwie, rola matematyki się zmienia. Arystoteles przeznaczał jej rolę bierną. Teraz, będąc dostarczycielką rezultatów ilościowych, matematyka – a także eksperyment – przejmują rolę czynną. Nauki przyrodnicze, uwolnione od obowiązku wyjaśniania zjawisk, zaczynają rozwijać się w tempie dotąd nieznanym. Galileusz twierdził, że prawa przyrody zapisane są językiem matematyki. Zatem i matematyka może je odkrywać. Dwieście lat przed nim głosił tę ideę Mikołaj z Kuzy – również scholastyk, ale nie z tego kręgu, o którym była mowa.

⋆ ⋆ ⋆

Trudno być pewnym – przeglądając oryginalne pisma współczesnych Galileuszowi – czy już wtedy zdawano sobie z tego sprawę, że kluczem do rozwiązania trudności powstałych w nauce o ruchu i problemie continuum jest teza z Merton College. Cavalieri – uczeń Galileusza – nie wspominając nic o jej scholastycznych autorach – usiłował dowieść tej tezy motywując ją na dwa sposoby, metodą niepodzielnych i metodą płynięcia. Koncentrował się na przypadku najbardziej ważnym dla geometrii – strumienia pola (objętości), które narastało z intensywnością proporcjonalną do wielkości przekrojów strumienia. Problem stawał się palący, bo obliczeń metodą niepodzielnych – a tak raczej patrzono na tę metodę obliczeń – przybywało za sprawą samego Cavalieriego, ale także Torricellego i Robervala, a przede wszystkim Keplera. Włączenie tych niewątpliwie poprawnych obliczeń w obręb oficjalnie uznanej matematyki – metodą Archimedesa – przerastało możliwości odkrywców.

Sposób włączenia tezy z Merton College do matematyki został rozstrzygnięty przez Newtona.

7. Matematyka i fizyka Newtona

W nazwie najczęściej obecnie używanej jest słowo *rachunek* z dodatkiem *różniczkowy i całkowy*. W angielskim wystarczy powiedzieć *rachunek*, tj. *calculus*. W analizie pomyślanej przez Newtona w istocie nie ma rachunków. Można się domyślać, że nazwa jest echem tradycji Calculatorów.

Analiza matematyczna – tak później nazwana – miała w latach swego powstawania wiele szczegółowych inspiracji, których logiczne następstwo nie było jednoznacznie widziane przez współczesnych. Odtwórzmy prawdopodobny logiczny przebieg początkowego rozwoju nowej dyscypliny.

Za punkt wyjścia w tej rekonstrukcji przyjmijmy określenie przez Newtona niedefiniowanej dotąd – i jedynie intuicyjnie rozumianej – intensywności, jako obecnie dobrze nam znanej **pochodnej**, którą Newton nazywał **fluksją**. Nie sprawiało żadnej trudności obliczyć – ale należy to uważać za punkt zwrotny w rozwoju przyszłej analizy – że pochodna wielkości zmieniającej się według prawa liczbowego x^n jest równa nx^{n-1}. Już Barrow – którego Newton był uczniem – wiedział, że tempo wzrostu strumienia – **fluenty** – pola pod wykresem funkcji jest równe zmieniającej się wartości funkcji, a Newton podał wkrótce dowód mieszczący się w ramach nowo tworzonej teorii. Pola pod wykresem funkcji nie określał przez aproksymacje – jak to było u Archimedesa, a później u Cauchy'ego, lecz postulował pewne jego własności, które wykorzystywał we wspomnianym dowodzie. Według twierdzenia, które dzielił z Barrowem, pochodna strumienia pola pod wykresem funkcji x^n jest równa x^n. Ale to samo tempo wzrostu – tę samą pochodną – ma funkcja liczbowa $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ na mocy wspomnianego wyżej obliczenia. Przyjmując prawo z Merton College jako postulat swej teorii, otrzymywał wzór $\frac{a^{n+1}}{n+1}$ dający pole pod wykresem funkcji x^n liczone od 0 do a.

Sformułowany explicite w rękopisie z r. 1671; zamieszczony w *Chrestomatii* A.P. Juszkiewicza *Matiematiczeskij analiz*, Moskwa 1977.

W ten sposób można było obliczać pola i objętości wszelkich figur – oraz inne wielkości – jeśli tylko intensywność ich zmiany dawała się porównać z intensywnością zmiany – pochodną – jakiejś znanej funkcji liczbowej.

Żaden z kroków prowadzących do tej konkluzji nie był na miarę Newtona, a być może jedynie pojęcie pochodnej i jej obliczenie dla funkcji x^n było jego oryginalnym odkryciem.

W tym samym czasie Leibniz zaproponował procedurę liczbową dla odtwarzania funkcji z jej tempa wzrostu, która polegała na sumowaniu nieskończenie małych jej przyrostów, a która później przybrała formę całki Cauchy'ego. Konstruował to, co Newton postulował.

Newton i Leibniz są równorzędnymi odkrywcami nowego rachunku, jeśli patrzeć na to od strony samej matematyki. Odkrycie Newtona widzimy jednak szerzej. Do Izaaka Barrowa – nauczyciela Newtona – należy fraza skrzydlata: „the flux nature of all things everywhere – (wszędzie wokół fluksje)". To przeszło na Newtona. Dostrzegł on – wyraźniej niż inni przed nim – że przyroda daje nam przed oczy bezpośrednio nie zmieniającą się wielkość, lecz intensywność jej zmiany.

Widział, że intensywność zmiany – w czasie – impetu mierzy się siłą, i że to siła, a nie impet, podlega naszej obserwacji. Nie doceniamy często roli zdarzeń, które mogły zaistnieć lub nie. Wspomniane prawo – wypowiedziane przez Buridana trzy stulecia wcześniej – pozostawało bez echa. Teraz nabierało nowej wagi. Hipotezy co do wielkości i kierunku siły grawitacji były w czasach Newtona dokładnie sprecyzowane. Newton mógł teraz dzięki nim i ogólnym zasadom swojej analizy odtworzyć prawa rządzące ruchem planet. Mechanika nieba poddawała się opisowi ilościowemu. Czy można było się dalej wahać – a miał takie wahania żyjący kilka dziesiątków lat wcześniej Cavalieri – z włączeniem zasady z Merton College – jako podstawy analizy – do matematyki?

We wstępie do *Principiów* Newton odwołuje się do Euklidesa, jako do twórcy geometrii opartej o spostrzeżenia fizyczne, do której on teraz dołącza czas i ruch, formułując co do nich odpowiednie postulaty oparte o przekonania natury fizycznej. Przypomnijmy, że i postulat Euklidesa o równoległych miał w jego systemie motywację fizyczną. W ten sposób traktował jeszcze ten postulat Gauss, nie decydując się na rozwinięcie nowej geometrii nie mając po temu argumentów pomiarowych. W istocie, nie były to postulaty fizyczne sensu stricte, lecz prawdy przyjęte bez dowodu, oparte na przekonaniach wyrosłych w wyniku naszego kontaktu ze zjawiskami. Tego rodzaju przekonania nazwijmy prawdami przyjmowanymi *a priori*. Kant twierdził, że również matematyka ma tego rodzaju prawdy. Jest tego rodzaju prawdą zasada z Merton College.

Negacja postulatu Euklidesa implikuje istnienie trójkątów o sumie kątów mniejszej niż 180°, a na takie trójkąty Gaussowi nie udało się natknąć w swoich pomiarach geodezyjnych.

Symbioza matematyki i fizyki trwała po Newtonie pełne dwieście lat. Mając źródła w postulatach natury metafizycznej, swą matematyczność zawdzięczała ścisłości metody, która miała z kolei źródła arytmetyczne i logiczne, mające również głębokie oparcie w przekonaniach metafizycznych. Czy można się było dziwić, że konkluzje nowej teorii znajdowały potwierdzenia doświadczalne i obserwacyjne?

Matematyka Newtona była matematyką **otwartą**. Postulaty nie opisywały jej **kategorycznie**, pozostawiając możliwość wielości jej realizacji, a więc i możliwość dalszej ewolucji. W matematyce Newtona niedookreślenie tkwi w pojęciu **liczby ciągłej**. Nie wiemy wiele o podstawowej **fluencie** jaką jest zmienna bieżąca x w symbolu $f(x)$. Zmienna bieżąca x przebiega wszystkie liczby naturalne i ułamki liczb naturalnych, tj. liczby wymierne. Za wartość zmiennej x można uznać liczbę niewymierną, np. $\sqrt{2}$, jeśli się dysponuje jej przybliżeniami wymiernymi. Gauss, mając ciąg ograniczony liczb już akceptowanych, dołączał jako nową liczbę jego najmniejsze ograniczenie górne, którego istnienie postulował i posługiwanie się którym było oczywiste na mocy wspomnianego określenia. W podobny sposób – **potencjalny** – rozumiał swoje proporcje Eudoksos. Każda z rozważanych liczb wchodziła w rozszerzony zakres, jeśli miała umotywowanie fizyczne lub geometryczne. W naszym wieku utrzymać ten stan usiłował Brouwer.

Postulat z Merton College, przyjęty przez Newtona, był rzeczywiście postulatem. O jego dowodzie nie myślano. Jeszcze Hoene-Wroński uważał, że analiza powinna się ograniczyć do własnych uzasadnień metafizycznych.

Interesującą dyskusję na temat metafizycznych źródeł rachunku różniczkowego i całkowego zawiera rozprawa Ignacego Domeyki, pisana w czasie (1822), kiedy dyskusje na ten temat były bardzo ożywione.

Postulatywny sposób myślenia Newtona nie był jednak ogólnie respektowany. Przy rozwiązywaniu konkretnych zadań posługiwano się dodatkowymi argumentami metodą niepodzielnych, co mnożyło jedynie quasi-dowody. Ten kierunek stawał się w końcu przeważający, co czyniło pilnym znalezienie ścisłości dla metod opartych na idei Leibniza. Podjął się tego na początku XIX wieku Augustine Cauchy.

8. Zamknięcie się matematyki w obrębie arytmetyki i pojęć mnogościowych

Od czasu Galileusza – a od Newtona już w sposób rzeczywisty – trwa synkretyczne posługiwanie się continuum złożonym z liczb z jednoczesnym przekonaniem, że prawdziwe continuum fizyczne ma naturę fluenty, po której zmienna **płynie**. Ten stan sprzecznych poglądów nie mógł długo się utrzymać. Pierwszą z prób określenia konstrukcyjnego **continuum punktowego**, po której miała **biec punkt po punkcie** zmienna x, była nieudana próba Cauchy'ego. Próbę – logicznie poprawnie pomyślaną – przeprowadził Bolzano, motywując ją filozoficznie przez manifestacyjne odrzucenie tezy Arystotelesa o niesensowności continuum zbudowanego z punktów. Całkowicie poprawną konstrukcję – w duchu teorii proporcji Eudoksosa – przeprowadził Dedekind, a wkrótce – przeważnie niezależnie i inaczej – inni matematycy. Wszystkie prowadziły do jednego i tego samego obiektu, który miał odtąd – na mocy pozamatematycznej umowy – zastąpić geometryczną prostą. Prowadziło to do urzeczywistnienia się dawnego zamysłu Kartezjusza, by przestrzeń euklidesową **zredukować do przestrzeni liczbowej**.

Według Meschkowskiego, zasługę tę należy przypisać H.A. Schwarzowi, który (1870) przesłał dowód w liście Cantorowi.

System pojęć analizy stawał się zamknięty. W tym systemie postulat Newtona o determinowaniu fluenty przez fluksję stawał się stwierdzeniem wymagającym dowodu, który znaleziono.

Bardziej zadawalającą metodę dała późniejsza **teoria Lebesgue'a**.

Fluenta dawała się teraz **odtworzyć** przez fluksję – jeśli ta była ciągła – za pomocą **całki Cauchy'ego** sankcjonującej algorytm Leibniza. Spełniony został zamysł Oresme'a, aby ilość emanacji przedstawiana była przez pole pod wykresem jej intensywności. Matematyka została zarytmetyzowana.

Zgoda na arytmetyzację znaczyła zgodę na **ograniczenie** motywacji metafizycznych dla matematyki do tych, które motywowały arytmetykę, z dodaniem tych, które prowadziły do konstrukcji continuum. Te drugie motywacje pochodziły – jak się wyraził Dedekind – ze **świata naszych myśli**. Do matematyki weszły **zbiory**, które reprezentowały nowe punkty continuum. Do tej pory uważano, że pojawianie się zbiorów w matematyce jest sprawą sposobu mówienia. Teraz weszły jako obiekty rozważań, ale z jakąś nieokreślonością, która miała swój wyraz w archaicznej nazwie **teorii mnogości**. Nasze metafizyczne przekonania, co do niektórych własności posługiwania się zbiorami, są tak ściśle wbudowane w nasz sposób myślenia, że trudno je już nazwać przekonaniami, a co do innych stwierdzamy wprost brak przekonań. Zbiory są bowiem niczym innym niż wspólnymi cechami przedmiotów do nich należących. Konkretny zbiór określany jest jako zakres przedmiotów mających daną cechę. To określenie wydaje się być zależne od sposobów, jakimi dysponujemy dla rozpoznawania tej cechy.

Arytmetyzacja matematyki skłoniła matematyków do dyskusji nad motywacjami metafizycznymi samej arytmetyki. Arytmetyka od czasu Platona była przedmiotem kultu, bywała i przedmiotem magii. Teraz miała dźwigać matematykę. Nietrywialne zasady metafizyczne arytmetyki kumulują się w jednej zasadzie: **indukcji matematycznej** i pojęciu **następstwa**. Według Poincarégo, zasada indukcji pozwala nam pokonać w jednym kroku nieskończenie wiele sylogizmów. Dlatego nie czujemy się pewnie zdając się na samą indukcję. Ale tak naprawdę indukcję stosujemy dopiero wtedy, gdy mamy dla dowodzonego przez indukcję twierdzenia niezależne od niej uzasadnienie w postaci hipotezy.

Szczupłość uzasadnień metafizycznych sprawia, że zarytmetyzowana matematyka – chociaż jest narzędziem ostrym – to jednak niepewnym. Stosowalność wychodzi na czoło jej problemów metafizycznych.

Mimo to w tę stosowalność się wierzy i wracamy do dawnej wiary platońskiej, podporządkowującej zjawiska matematyce. Wywodzi się ona jeszcze od Pitagorejczyków. To ona kierowała Keplerem. Ale kierowała również Kartezjuszem. Ulegają tej wierze bardziej przyrodnicy – a już na pewno fizycy – niż matematycy.

Dla matematyków bogate w punkty i strukturę – odkrywaną językiem mnogościowym – continuum arytmetyczne dostarcza nowych problemów i nowych rozwiązań, które dają im satysfakcję. Wiedzą oni jednak, że - zgodnie ze źródłem, z którego się te nowe rozwiązania wywodzą – należą one raczej do świata naszych myśli niż do świata zewnętrznego. Utyskiwania na mały z nim związek są nieusprawiedliwione. Ten stan był z góry do przewidzenia.

Zasadnicze założenie arytmetyczno-mnogościowej matematyki polega na utożsamieniu prostej fizycznej z continuum arytmetycznym. Zbyt sztywna budowa tego continuum powinna być rozluźniona. To continuum powinno być jedynie narzędziem, a nie obiektem uniwersalnym powstałym na skutek unifikacyjnych tendencji w nauce i filozofii XIX wieku. Wydaje się, że powinniśmy dysponować co najmniej dwoma continuami, z których jedno służyłoby do opisu zjawisk globalnych – **continuum Dedekinda** wydaje się do tego celu przydatne – a drugie do równie ścisłego opisu zjawisk w mikroskali, gdzie niewykluczony byłby powrót do idei atomistycznych. Panujące obecnie tendencje unifikacyjne – przypomnijmy Greków, którzy nie byli nimi krępowani – nie sprzyjają takiemu rozwiązaniu.

Tendencje unifikacyjnie w naukach przyrodniczych mają swoje uzasadnienie. Przyroda jest obiektem zewnętrznym i sprowadzenie praw nią rządzących do minimum jest dążnością naturalną. Matematyka jest jednak metodą. Powinna być narzędziem stosowanym w rozmaitych sytuacjach przychodzących z zewnątrz. Śledziliśmy to na przykładzie rozwoju analizy. Wydaje się, że matematyka jest podobna do rośliny, której pnącza mogą się zakorzeniać w miejscach nie całkiem przewidzianych. Jest raczej lasem niż pojedynczym drzewem.

Wydaje się, że nastąpiła niewłaściwa identyfikacja dwu dążności: ścisłość nie musiała być uzyskana poprzez unifikację, która nie jest naturą matematyki. Konstrukcje myślowe, jakie tworzy matematyka, nie mają powinności być tworzywem dla światopoglądu. Tworzą pogląd filozoficzny dopiero z pozamatematycznym kontekstem.

Ale jest też kierunek filozoficzny, który upatruje dla matematyki rolę wyjątkową, widząc w jej idealnej architekturze – której poszukuje – wzorzec wszystkich rzeczy. W ciągu tych rozważań byliśmy jak najdalej od tego sposobu widzenia matematyki.