Kultura matematyczna

= świadomość środków, świadomość ograniczeń

Adam KOLANY, Katowice

Wydaje mi się, że elementem kultury matematycznej jest także świadomość środków jakich się używa. Nie jest moim zdaniem dobrym obyczajem używanie „czego popadnie". Byleby tylko „wyszło", byleby uzyskać wynik. Nie jest przecież z punktu widzenia kultury obojętne, czy nos wyciera się chusteczką, czy rękawem, choć w obu wypadkach cel zostanie osiągnięty. Tak samo też nie jest, jak mi się wydaje, obojętne, z punktu widzenia kultury matematyka, czy dla dowodu np. hipotezy Fermata konieczne jest użycie metod poza arytmetycznych, czy nie. Mówiąc inaczej, nawet jeżeli dowód Wilesa wspomnianej hipotezy jest poprawny, to należy zastanowić się jednak, czy da się ona wykazać metodami arytmetycznymi. Może się bowiem okazać, że jest ona niezależna od powszechnie przyjętej aksjomatyki arytmetyki liczb naturalnych zwanej arytmetyką Peano. Wówczas zastanowić się trzeba będzie, jakie dodatkowe aksjomaty należy do aksjomatyki tej dodać, aby już z nich hipoteza ta była wyprowadzalna. Zawsze można dołożyć nią samą, ale nie o to przecież chodzi. Chodzi o zasadę prostszą, choć przecież logicznie silniejszą. Wówczas jednak zagadnienie hipotezy Fermata staje się bardziej zagadnieniem natury lingwistycznej, niż matematycznej.

1. Świadomość ograniczeń – aksjomatyzacja

Dowody w matematyce służą nam jako środek przekonywania innych (choć też i siebie) o prawdziwości swoich tez. Nie wszystkie metody są tu jednak dopuszczalne (nie akceptujemy choćby okładania się pięściami, albo wróżenia z fusów). Ograniczamy się do metod logicznych, gdzie prawdziwość przesłanek implikuje niezbicie i w sposób oczywisty prawdziwość wniosków. Proces ten zwie się wnioskowaniem. Aby jednak wnioskować, potrzeba przesłanek pierwotnych – aksjomatów.

2. Świadomość ograniczeń – niezupełność

By móc komunikować się, język, którego używamy, musi być zrozumiały dla innych. A zatem symbole, którymi się posługujemy, muszą być możliwe do rozpoznania. Własność tę zwiemy rozstrzygalnością języka. Podobnie, by móc wiarygodnie argumentować, rozpoznawalne muszą być aksjomaty, którymi się posługujemy. Mówimy wówczas o rekurencyjnej aksjomatyzowalności teorii. Jak się okazało za sprawą A. Churcha [2], Rossera [11], a później Mostowskiego i Tarskiego [9], jeśli tylko przyjmiemy prawdziwość kilku (tak – kilku – a dokładniej siedmiu) faktów arytmetycznych, to okaże się, że pewne rozstrzygnięcia pozostaną poza możliwościami naszego poznania. Okaże się wówczas, że dla pewnych zdań nie będziemy w stanie stwierdzić, czy one są prawdziwe, czy fałszywe. Mówimy wówczas o niezupełności systemu.

3. Świadomość środków – twierdzenia Goodsteina i Parisa

Zgodnie z zasadą: „krytyka tak, ale konstruktywna", czas podać jakieś przykłady twierdzeń niedowodliwych w pewnej teorii, choć z nią niesprzecznych. Oczywiście istnienie takich zdań gwarantują nam twierdzenia Gödla o niezupełności (p. [5]). Chciałoby się jednak zobaczyć przykłady „konkretnych" zdań tego rodzaju. W teorii mnogości takimi zdaniami są, jak wiadomo, tzw. hipoteza continuum (każdy nieprzeliczalny zbiór liczb rzeczywistych jest mocy continuum) albo pewnik wyboru (produkt rodziny zbiorów niepustych jest niepusty). Do mniej chyba znanych zaliczyć należy zdanie stwierdzające istnienie tzw. prostej Suslina (nie izomorficznego z prostą rzeczywistą liniowego porządku gęstego, zupełnego w sensie Dedekinda, bez końca i początku, w którym nie ma nieprzeliczalnych parami rozłącznych rodzin przedziałów) i szereg innych (p. [6]). Trudniej już o przykłady „konkretnych" zdań arytmetycznych, których prawdziwości w PA dowieść niesposób. Pierwszym z nich jest tzw. twierdzenie Goodsteina (p. [1]). Niech $a_0 \stackrel{\mathrm{DF}}{=} a$ będzie dowolną liczbą naturalną i niech $a_0 = 2^{n_0} + 2^{n_1} + \ldots + 2^{n_k}$ będzie jej rozwinięciem dwójkowym. Następnie rozwińmy dwójkowo wykładniki tego rozwinięcia, następnie wykładniki rozwinięcia tych wykładników itd. Kiedyś to się musi skończyć. Wtedy zamieńmy we wszystkich tych rozwinięciach liczbę 2 na liczbę 3 i odejmijmy od powstałej w ten sposób z a_0 liczby jedynkę, a wynik nazwijmy a_1. Postąpmy z liczbą a_1 tak samo jak z a_0, tyle, że rozwijać ją będziemy przy podstawie 3, którą zastąpimy czwórką, dostając a_2. Kontynuując ten proces w nieskończoność, zwiększając w każdym kroku podstawę rozwinięcia o jeden dostajemy nieskończony ciąg liczb naturalnych a_n, dla $n = 0, 1, 2, \ldots$. Ciąg ten wydaje się szybko rosnąć. Fakt ten, zwany właśnie twierdzeniem Goodsteina, jest jednak w PA niedowodliwy. Wykazali to Kirby i Paris.

Innym przykładem zdania niedowodliwego w PA, choć prawdziwego w modelu standardowym jest następująca modyfikacja twierdzenia Ramseya: Dla dowolnych naturalnych e, k, r istnieje taka liczba naturalna M, że dla dowolnego rozbicia r–elementowego P rodziny wszystkich e–elementowych podzbiorów zbioru $\{1, \ldots, M\}$ istnieje co najmniej k–elementowy zbiór $H \subseteq \{1, \ldots, M\}$, którego wszystkie e–elementowe podzbiory są w jednym elemencie rozbicia P i ponadto $\mathrm{card}(H) \geq \min(H)$. Nietrudno posługując się tzw. lematem Königa wykazać, że zdanie to jest prawdziwe w modelu standardowym. Jak wykazał jednak Paris (p. [10]), zdanie to implikuje niesprzeczność arytmetyki Peano, co w myśl drugiegogo twierdzenia Gödla o niezupełności, oznacza, że nie może ono być dowodliwe w PA, chyba, że ta ostatnia jest sprzeczna. Być może hipoteza Fermata też jest jednym z takich zdań?

4. Świadomość ograniczeń (a może sukcesu) – nierozstrzygalność

Może właśnie sukcesem należy nazwać fakt, że wyniki Gödla o niezupełności można wzmocnić: teoria Peano oraz każde jej rekurencyjne rozszerzenie jest nierozstrzygalne. Jest to w istocie wzmocnienie poprzedniego wyniku, gdyż teorie zupełne i rekurencyjnie przeliczalne są rozstrzygalne. Niekoniecznie zaś rekurencyjnie przeliczalne rozstrzygalne teorie są zupełne (weźmy choćby teorię liniowego porządku – rozstrzygalna (Ehrenfeucht [3] i Läuchli & Leonard [7]), choć ma nietrywialne rozszerzenia). Tak też nierozstrzygalna jest teoria pierścieni (Mostowski & Tarski [9]), czy nawet teoria grup (Tarski [9]). Chociaż teoria grup przemiennych już rozstrzygalna jest (W. Szmielew [13]). Oczywiście, nierozstrzygalna jest teoria mnogości Zermeto–Fraenkla (Tarski [15]). Geometria w standardowych jej odmianach: absolutna, euklidesowa, Bolyai–Łobaczewskiego, jest rozstrzygalna (patrz Schwabhauser, Tarski & Szmielew [12]). Wynika to łatwo z twierdzenia Tarskiego o rozstrzygalności elementarnej arytmetyki liczb rzeczywistych ([15]) poprzez sprowadzenie zagadnień geometrycznych do zadań natury algebraicznej. Geometria rzutowa rozstrzygalną nie jest (patrz Murawski [8]).

Dlaczego nierozstrzygalność co ważniejszych teorii można uznać za sukces? Ano dlatego, iż oznacza ona, że roboty naszej nie da się zautomatyzować. Nasza praca jest istotnie twórcza. W tym miejscu ważna uwaga: praca matematyka nie polega na wypisywaniu prawdziwych twierdzeń z ich dowodami – praca matematyka, to rozstrzyganie, czy twierdzenia są prawdziwe. Pierwsza z tych czynności jest bowiem automatyzowalna, druga – właśnie widać – nie! Świadomość tego to też element kultury matematycznej.

5. Świadomość środków – elementarność

Zwrócić trzeba uwagę, że elementarność (w sensie logicznym) rozważanych powyżej teorii ma tu wiele do powiedzenia. Gdy z niej zrezygnować, czyli dopuścić możliwość kwantyfikacji zbiorów, większość ze wspomnianych teorii rozstrzygalnych staje się nierozstrzygalna. W przypadku geometrii można by to sformułować następująco: o ile własności punktów i prostych są możliwe do rozstrzygnięcia, to własności zbiorów z tych obiektów utworzonych rozstrzygać się nie da.

Czy właśnie dlatego ograniczamy się do teorii elementarnych? Nie, ale to już zupełnie inna historia.

6. Świadomość ograniczeń – złożoność obliczeniowa

Nawet jednak w odniesieniu do teorii rozstrzygalnych nie musimy się martwić swoją bezużytecznością. „Światełkiem w tunelu" okazuje się tutaj złożoność procedur rozstrzygających. Nawet w przypadku stosunkowo prostych teorii czas oczekiwania na rozstrzygnięcie dowodliwości wcale niedługiego zdania może wielokrotnie przekroczyć czas istnienia wszechświata. Tak np. arytmetyka Presburgera, czyli teoria samego dodawania liczb naturalnych ma złożoność co najmniej 2^{cn}, dla pewnej stałej $c > 0$, a teoria samego mnożenia liczb naturalnych ma złożoność co najmniej $2^{2^{cn}}$, dla pewnego $c > 0$ (patrz Fisher & Rabin [4]). Teoria zbiorów uporządkowanych liniowo ma złożoność $F(n, [dn])$, dla pewnego $d > 0$, gdzie F zdefiniowana jest następującymi wzorami rekurencyjnymi: $F(n, 1) = 2^n, F(n, m + 1) = 2^{F(n,m)}$, dla $n, m \in \omega$. Pytanie, czy istnieją rozstrzygalne teorie o „sensownej" złożoności obliczeniowej jest do dziś nierozstrzygnięte i łączy się ze słynnym zagadnieniem $P = NP$ (patrz Murawski [8]).

* * *

∞. Świadomość ograniczeń – niedefiniowalność prawdy

No dobrze, ale jak to jest „naprawdę". Co to jednak znaczy „naprawdę"? Klasyczna definicja prawdy Sokratesa: „sąd „S" jest prawdziwy, jeżeli jest S.", wymaga, aby istniała jakaś rzeczywistość, do której nasz język się odnosi. A jeśli nie ma takiej rzeczywistości? Jeżeli cała matematyka to jedynie wytwór naszej wyobraźni? To co wówczas oznacza „prawdziwy"? Jak twierdzi Tarski [14] żadna sensowna próba odpowiedzi na to pytanie nie jest możliwa. Wszelkie formalizacje terminu „prawdziwy" prowadzą bowiem, według niego, prędzej czy później, do sprzeczności, czego niejakim potwierdzeniem są wyniki Gödla [5].

Literatura

[1] Adamowicz Z., Zbierski P., *Logika matematyczna*, PWN, Warszawa 1989,

[2] Church A., *An unsolvable problems of elementary number theory*, Am. J. Math, 58(1936), 234–233,

[3] Ehrenfeucht A., *Decidability of the theory of linear ordering*, Notices Am. Math. Soc., 6(1959), 268–269,

[4] Fisher M. J., Rabin M. O., *Super Exponential Complexity of Presburger's Arithmetic*, SIAM - AMS Proc., 7(1974), 27–41,

[5] Gödel K., *Über formal unentscheintbare Sätze der 'Principia Mathematica' und verwandter Systeme, I.*, Monatshefte für Mathematik und Physic, 38(1931), 173–198,

[6] Kunen K., *Set theory: an introduction to independence proofs*, North Holland Publishing Company, Amsterdam - New York - Oxford, 1980,

[7] Läuchli H., Leonard J., *On the elementary theory of linear order*, Fund. Math., 59(1966), 109–116,

[8] Murawski R., *Funkcje rekurencyjne i elementy metamatematyki*, UAM, Poznań, 1990,

[9] Mostowski A., Robinson R. M., Tarski A., *Undecidability and essential undecidability in arithmetic*, w Undecidable Theories, Tarski A., Mostowski A., Robinson R. M., Amsterdam, 1953, 37–74,

[10] Paris J., Harrington L., *A mathematical incompleteness in Peano arithmetics*, w Handbook of Mathematical Logic, Barwise J., (red.), Amsterdam 1979, 1133–1142,

[11] Rosser J. B., *Extensions of some theorems of Gödel and Church*, Journal of Symb. Logic, 1(1936), 87–91,

[12] Schwabhäuser W., Szmielew W., Tarski A., *Metamathematische Methoden in der Geometrie*, Springer Varlag, Berlin - Heidelberg - New York - Tokyo, 1983,

[13] Szmielew W., *Elementary properties of Abelian groups*, Fund. Math., 41(1954), 203–271,

[14] Tarski A., *Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen*, Studia Philosophica, 1(1935), 261–405,

[15] Tarski A., *A decision Method for Elementary Algebra and Geometry*, Berkeley and Los Angeles, 1951,