Rozwiniącie odczytu z XXI Szkoły Matematyki Poglądowej, *Zdarzyło się w XX wieku*.

Red.

O algebrze homologicznej

Agnieszka BOJANOWSKA

Wstęp

Algebra homologiczna „wydarzyła się” w drugiej połowie XX wieku. Jej niezwykle burzliwy początkowy rozwój przypadł na lata drugiej wojny światowej i lata pięćdziesiąte. Samuel Eilenberg i Saunders MacLane w USA, Heinz Hopf w Szwajcarii, Jean Leray w niemieckim obozie jenieckim i Henri Cartan w Paryżu to główni sprawcy „homologicznej rewolucji”. Dziś nie sposób mówić o współczesnej topologii algebraicznej, geometrii algebraicznej czy też algebrze nie używając pojęć i aparatu algebry homologicznej. Metody homologiczne na dobre zadomowiły się także w teorii liczb, analizie globalnej, geometrii różniczkowej i metodach matematycznych fizyki. Temat jest tak rozległy, że nie sposób w niedługiej notatce przedstawić teorię, jej rozbudowany aparat obliczeniowy oraz najważniejsze zastosowania. Pierwszym i nadal aktualnym podręcznikiem przedmiotu jest monografia Henri Cartan, Samuel Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton University Press, 1956. Współczesne aspekty algebry homologicznej są przedstawione w książce: S. Gelfand, J. Manin, *Wstęp do teorii kohomologii i kategorie pochodne*, (po rosyjsku), Nauka, 1988. Szczegółowe omówienie historii algebry homologicznej można znaleźć w artykule C. Weibel, *History of homological algebra* w *History of Topology*, I.M. James ed., Elsevier, 1998. Książka S. Gelfanda i J. Manina oraz artykuł C. Weibela zawierają obszerne spisy literatury przedmiotu. Podręcznikiem w języku polskim jest książka S. Balcerzyka, *Wstęp do algebry homologicznej*, PWN, 1970.

W tym artykule postaram się w możliwie elementarny sposób przedstawić jedynie genezę powstania przedmiotu i najważniejsze pojęcia w nim występujące.

Od wielościanów do kompleksów łańcuchowych grup abelowych

Doskonały i uniwersalny język algebry homologicznej powstał, by opisać własności obiektów geometrycznych i przestrzeni topologicznych. Zaczniemy więc od bardzo prostego przykładu geometrycznego, równolegle wprowadzając podstawowe dla algebry homologicznej definicje.

Niech X będzie dowolnym wielościanem. Dla każdego całkowitego $n \geq 0$ niech $C_n(X, \mathbb{Z}_2)$ oznacza przestrzeń liniową nad dwuelementowym ciałem $\mathbb{Z}_2$, której bazą są sympleksy n-wymiarowe wielościanu X (wybór ciała $\mathbb{Z}_2$ upraszcza sytuację pozwalając uniknąć rozważań dotyczących orientacji sympleksów). Zauważmy, że przyporządkowując sympleksowi sumę jego ścian definiujemy przekształcenie liniowe $\partial_n : C_n(X, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow C_{n-1}(X, \mathbb{Z}_2)$, nazywane homomorfizmem brzegu. Przyjmiemy, że $C_{-1} = 0$ i $\partial_0 = 0$.

Dostajemy ciąg zwany kompleksem łańcuchowym wielościanu X:

$$\ldots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \ldots C_1(X, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow 0.$$

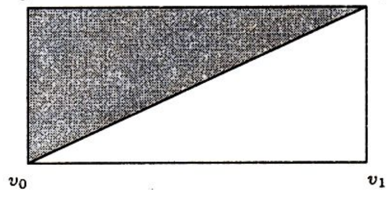
Zauważmy, że dla każdego $n \geq 0$ zachodzi

$$\partial_n \partial_{n+1} = 0,$$

zatem $\operatorname{im} \partial_{n+1} \subseteq \ker \partial_n$ i możemy rozpatrzeć grupy ilorazowe

$$H_n(X, \mathbb{Z}_2) = \ker \partial_{n+1} / \operatorname{im} \partial_{n+1},$$

które nazywamy grupami homologii wielościanu X o współczynnikach w $\mathbb{Z}_2$.



Przykład 1. Wprowadzane pojęcia będziemy ilustrować na przykładzie wielościanu Y pokazanego na rysunku obok.

Dla wielościanu Y otrzymujemy następujący kompleks łańcuchowy:

$$\ldots \xrightarrow{\partial_5} 0 \xrightarrow{\partial_4} 0 \xrightarrow{\partial_3} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\partial_2} (\mathbb{Z}_2)^5 \xrightarrow{\partial_1} (\mathbb{Z}_2)^4 \longrightarrow 0.$$

Jego grupami homologii są:

$$H_n(Y,\mathbb{Z}_2) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{dla } n = 0; \\ \mathbb{Z}_2 & \text{dla } n = 1; \\ 0 & \text{dla } n \geq 2. \end{cases}$$

□

Grupy homologii zawierają informacje o geometrycznych własnościach wielościanu. Można z nich odczytać pewne znane proste niezmienniki wielościanu, takie jak liczba jego spójnych składowych, która jest równa $\dim_{\mathbb{Z}_2} H_0(X,\mathbb{Z}_2)$. Łatwo też udowodnić, że dla wielościanu skończonego jego charakterystyka Eulera jest równa $\sum(-1)^i \dim_{\mathbb{Z}_2} H_i(X,\mathbb{Z}_2)$.

Rozpatrzmy dwa wielościany X i X' oraz ich przekształcenie $f\colon X \longrightarrow X'$ wyznaczone przez odwzorowanie zbioru wierzchołków X w zbiór wierzchołków X' i przekształcające każdy sympleks wielościanu X w sympleks, być może mniejszego wymiaru, wielościanu X'. Każde takie przekształcenie wielościanów definiuje dla każdego $n \geq 0$, przekształcenie liniowe $f_n\colon C_n(X,\mathbb{Z}_2) \longrightarrow C_n(X',\mathbb{Z}_2)$, przy czym $f_n\partial_{n+1} = \partial_{n+1}f_{n+1}$. Dostajemy przemienny diagram:

$$\begin{array}{ccccccc} \ldots & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n(X) & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1}(X) & \xrightarrow{\partial}_{n-1} & \ldots \\ & & \downarrow{\scriptstyle f_n} & & \downarrow{\scriptstyle f_{n-1}} & & \\ \ldots & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n(X') & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1}(X') & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & \ldots \end{array}$$

Przemienność z homomorfizmami brzegu sprawia, że przekształcenia f_n wyznaczają przekształcenia liniowe grup homologii $(f_n)_*\colon H_n(X,\mathbb{Z}_2) \longrightarrow$ $\longrightarrow H_n(X',\mathbb{Z}_2)$ dla każdego $n \geq 0$. Mówimy, że homomorfizmy $(f_n)_*$ grup homologii są indukowane przez przekształcenie f.

W tej prostej konstrukcji związanej z geometrią wielościanów występują podstawowe dla algebry homologicznej pojęcia kompleksu łańcuchowego, przekształcenia łańcuchowego i grup homologii.

Definicja 2. Niech R będzie pierścieniem przemiennym z 1. Kompleksem łańcuchowym R-modułów $\mathcal{C} = (C_*,\partial_*)$, nazywamy ciąg $(C_n,\partial_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, taki że:
(a) $\partial_n\colon C_n \longrightarrow C_{n-1}$ jest homomorfizmem R-modułów, zwanym homomorfizmem brzegu,
(b) $\partial_n\partial_{n+1} = 0$.

Odnotujmy, że jeśli $R = \mathbb{Z}$, to $\mathbb{Z}$-modułami są grupy abelowe, a jeżeli $R = K$ jest ciałem, to przestrzenie liniowe nad K. Ponadto, tak jak poprzednio, dla każdego $n \in \mathbb{Z}$, $\operatorname{im}\partial_{n+1} \subseteq \ker\partial_n$. Podmoduł $\ker\partial_n$ nazywamy podmodułem *n-wymiarowych cykli*, podmoduł zaś $\operatorname{im}\partial_{n+1}$ – podmodułem *n-wymiarowych brzegów.* Wprowadzamy definicję:

Definicja 3. Grupami homologii kompleksu łańcuchowego $\mathcal{C} = (C_*,\partial_*)$ nazywamy grupy ilorazowe

$$H_n(\mathcal{C}) = \ker\partial_n/\operatorname{im}\partial_{n+1} \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Jeżeli $C_i = 0$ dla $i \leq i_0$, to mówimy, że kompleks jest ograniczony z góry, analogicznie mówimy o kompleksach ograniczonych z dołu. Możemy tak przenumerować indeksy, by homomorfizmy brzegu podwyższały indeks o jeden. Mówimy wówczas o kompleksie kołańcuchowym, kocyklach i kobrzegach oraz grupach kohomologii. Wszystkie pojęcia wprowadzane dla kompleksów łańcuchowych mają swoje oczywiste odpowiedniki dla kompleksów kołańcuchowych.

Definicja 4. Przekształceniem łańcuchowym kompleksu łańcuchowego $\mathcal{C}$ w kompleks łańcuchowy $\mathcal{C}'$, $f_*\colon (C_*,\partial_*) \longrightarrow (C'_*,\partial_*)$, nazywamy ciąg homomorfizmów R-modułów, $f_n\colon C_n \longrightarrow C'_n$, dla którego poniższy diagram jest przemienny:

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f_n} & & \downarrow{\scriptstyle f_{n-1}} & & \\
\cdots & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C'_n & \xrightarrow{\partial_n} & C'_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & \cdots
\end{array}$$

Podobnie jak w przypadku topologicznym zauważmy, że przekształcenie łańcuchowe kompleksów łańcuchowych indukuje ciąg homomorfizmów ich grup homologii

$$(f_n)_*\colon H_n(\mathcal{C}) \longrightarrow H_n(\mathcal{C}').$$

Wróćmy do geometrii, na której teoria kompleksów łańcuchowych jest modelowana. Aby zorientować się, jakie własności wielościanu są opisywane przez jego grupy homologii rozpatrzmy raz jeszcze przykład wielościanu Y.

Przykład 1 c.d. Rozważmy przekształcenie $f\colon Y \longrightarrow Y$ wielościanu Y, wyznaczone przez następujące odwzorowanie wierzchołków: $f(\{v_3\}) = \{v_2\}$, $f(\{v_i\}) = \{v_i\}$ dla $i \neq 3$. Intuicja podpowiada nam, że przekształcenie f powinno indukować identyczność na grupach homologii, gdyż jedynie „zgniata" ono dwuwymiarowy sympleks, który nie ma na nie wpływu. Możemy sobie wyobrazić, że od identyczności do odwzorowania f przechodzimy w sposób ciągły „jadąc" z punktem $f(v_3)$ po krawędzi $\{v_3, v_2\}$ (można to zdefiniować ściśle – topologowie mówią, że f jest homotopijne z identycznością). W trakcie tego przejścia kolejne obrazy krawędzi $\{v_3, v_0\}$ wypełniają dwuwymiarowy sympleks $\{v_0, v_2, v_3\}$, zaś obrazy wierzchołka $\{v_3\}$ krawędź $\{v_2, v_3\}$. Mamy więc przekształcenia liniowe:

$$D_1\colon C_1(Y, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow C_2(Y, \mathbb{Z}_2)$$
$$D_0\colon C_0(Y, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow C_1(Y, \mathbb{Z}_2)$$

zadane przez $D_1\{v_0, v_3\} = \{v_0, v_2, v_3\}$, $D_1\{v_0, v_1\} = D_1\{v_0, v_2\} = D_1\{v_1, v_2\} = = D_1\{v_2, v_3\} = 0$ oraz $D_0\{v_3\} = \{v_2, v_3\}$, $D_0\{v_0\} = D_0\{v_1\} = D_0\{v_2\} = 0$. Przyjmując $D_i = 0$ dla $i \geq 2$ przez łatwy rachunek przekonujemy się, że dla każdego n zachodzi równość:

$$\partial_{n+1} D_n + D_{n-1}\partial_n = f_n - \mathrm{id}_n\,.$$

Zatem dla każdego cyklu $z \in C_n(Y)$, $f_n(z) - \mathrm{id}_n(z) = \partial_{n+1} D_n(z)$ – a zatem $(f_n)_* = (\mathrm{id}_n)_*$. □

Kontynuując program budowy algebraicznej teorii kompleksów łańcuchowych modelowanej na topologii wprowadzamy definicję, która jest algebraicznym odpowiednikiem pojęcia homotopii przekształceń ciągłych:

Definicja 5. Przekształcenia łańcuchowe $f_*, g_*\colon (C_*, \partial_*) \longrightarrow (C'_*, \partial_*)$ są łańcuchowo homotopijne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg homomorfizmów R-modułów $D_n\colon C_n \longrightarrow C'_{n+1}$, taki że dla każdego n

$$\partial_{n+1} D_n + D_{n-1}\partial_n = f_n - g_n.$$

Definicja 6. Przekształcenie łańcuchowe $f_*\colon (C_*, \partial_*) \longrightarrow (C'_*, \partial_*)$ jest łańcuchową homotopijną równoważnością wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje przekształcenie łańcuchowe $g_*\colon (C'_*, \partial_*) \longrightarrow (C_*, \partial_*)$, dla którego złożenia $g_* \circ f_*$ i $f_* \circ g_*$ są łańcuchowo homotopijne z identycznościami na kompleksach (C_*, ∂_*) i (C'_*, ∂_*) odpowiednio.

Łatwo udowodnić, że zachodzi następujące stwierdzenie:

Stwierdzenie 7. *Przekształcenia łańcuchowo homotopijne kompleksów łańcuchowych indukują ten sam homomorfizm ich grup homologii w każdym wymiarze.*

Wniosek 8. *Przekształcenie łańcuchowe będące łańcuchową równoważnością indukuje izomorfizm grup homologii.*

Dysponując abstrakcyjnym pojęciem kompleksu łańcuchowego i jego grup homologii na nasz przykład geometryczny można spojrzeć następująco: oto każdemu wielościanowi przypisaliśmy kompleks łańcuchowy przestrzeni liniowych nad $\mathbb{Z}_2$ w taki sposób, że przekształcenie wielościanów indukuje przekształcenie łańcuchowe odpowiednich kompleksów łańcuchowych. Każde takie przyporządkowanie prowadzi do homologii wielościanów. Na przykład przypisując każdemu sympleksowi wielościanu orientację i modyfikując homomorfizm brzegu tak, by sympleksowi przyporządkowywać naprzemienną sumę jego ścian (minus sympleks oznacza ten sam sympleks z przeciwną orientacją), możemy każdemu wielościanowi przyporządkować kompleks grup abelowych i zdefiniować w ten sposób homologie wielościanu o współczynnikach całkowitych. W latach trzydziestych i czterdziestych naszego stulecia podano szereg sposobów dobrego przyporządkowania przestrzeni topologicznej kompleksu łańcuchowego, definiując tym samym pewną teorię homologii. Najważniejsze z nich to teoria homologii singularnych i teoria Čecha. Niekiedy do zdefiniowania teorii homologii, czy też teorii kohomologii, wykorzystywano dodatkową strukturę na przestrzeni topologicznej, na przykład to, iż jest ona rozmaitością różniczkową.

Przykład 9. Niech M będzie rozmaitością różniczkową, niech $C^n(M) = \Omega^n(M)$ oznacza rzeczywistą przestrzeń liniową gładkich $n-$form różniczkowych na M (gdzie 0-formy, to rzeczywiste funkcje gładkie), $\partial^n: \Omega^n(M) \longrightarrow \Omega^{n+1}(M)$ zaś niech będzie różniczkowaniem zewnętrznym. W ten sposób rozmaitości przypisujemy kompleks kołańcuchowy rzeczywistych przestrzeni liniowych, funkcji gładkiej zaś przekształcenie kołańcuchowe. Otrzymane w ten sposób grupy kohomologii nazywamy grupami kohomologii de Rhama rozmaitości różniczkowej. □

Dla matematyków połowy XX wieku było jasne, że wprowadzenie do topologii teorii homologii i kohomologii otwiera zupełnie nowe perspektywy i jest potężnym narzędziem badawczym. Niemal równocześnie zauważono, że owo nowe narzędzie ma zastosowanie w algebrze. Szukano więc sposobów przyporządkowywania obiektom algebraicznym kompleksów łańcuchowych. Zdefiniowano (G. Hochschild) grupy homologii i kohomologii algebr łącznych, a także algebr Liego. Przełomowe dla algebry homologicznej okazało się wprowadzenie teorii homologii grup dyskretnych w pracach Samuela Eilenberga i Heinza Hopfa.

Definicja 10. Niech G będzie grupą dyskretną. Grupami homologii G o współczynnikach całkowitych $H_*(G, \mathbb{Z})$ nazywamy grupy homologii kompleksu łańcuchowego, w którym $C_n(G)$ jest wolną grupą abelową generowaną przez wszystkie ciągi $\{(g_1, g_2, \ldots, g_n); g_i \in G\}$, oraz

$$\partial_n(g_1, g_2, \ldots, g_n) =$$

$$(g_2, g_3, \ldots, g_n) + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i(g_1, \ldots, g_i g_{i+1}, \ldots, g_n) + (-1)^n(g_1, \ldots, g_{n-1}).$$

Nie będziemy omawiać własności homologii grup. Odnotujmy tylko, że z powyższej definicji łatwo wynika, iż $H_1(G, \mathbb{Z}) = G/[G, G]$ jest abelianizacją grupy.

Definicja homologii grupy dyskretnej ma swoje źródło w topologii. Rozpatrzmy wielościan X (być może o nieskończonej liczbie sympleksów), którego grupa podstawowa to $\pi_1(X) = G$, każde zaś odwzorowanie $S^n \xrightarrow{f} X$ dla $n > 1$ jest homotopijne ze stałym. Topologowie nazywają taką przestrzeń asferyczną. Homologii wielościanów asferycznych dotyczy twierdzenie Hurewicza:

Twierdzenie 11 (W. Hurewicz). *Jeżeli X oraz X' są przestrzeniami asferycznymi oraz $\pi_1(X) = \pi_1(X') = G$, to grupy homologii X i X' o dowolnych współczynnikach są równe.*

Z twierdzenia Hurewicza wynika więc, że grupy homologii przestrzeni asferycznej zależą jedynie od jej grupy podstawowej i można przyjąć, iż są one właśnie homologiami tej grupy. Kompleks łańcuchowy, występujący w definicji 10, to po prostu kompleks łańcuchowy pewnego kanonicznie skonstruowanego wielościanu asferycznego o grupie podstawowej G. Wielościan kanoniczny nie jest bynajmniej jedynym asferycznym wielościanem o grupie podstawowej równej G – jest takich nieskończenie wiele. Aby zrozumieć, jaka własność algebraiczna jest wspólna dla ich kompleksów łańcuchowych, dla dowolnego wielościanu asferycznego X, $\pi_1(X) = G$ rozpatrzmy jego nakrycie uniwersalne $\tilde{X}$. Jest ono wielościanem i to ściągalnym, jego grupy homologii są więc równe grupom homologii punktu. Istnieje naturalne działanie grupy G na $\tilde{X}$ wyznaczone przez działanie grupy podstawowej na nakryciu uniwersalnym i działanie to przeprowadza sympleksy $\tilde{X}$ na sympleksy $\tilde{X}$, przy czym każdy element różny od jedynki grupy przeprowadza dowolny sympleks na sympleks od niego różny, co nazywamy działaniem wolnym. Dla przełożenia tych własności na język algebry przypomnijmy definicję pierścienia grupowego G.

Niech $\{g_i\}_{i\in I}$ będzie zbiorem elementów G.

Definicja 12. Pierścieniem grupowym $\mathbb{Z}(G)$ grupy G nazywamy pierścień z 1, którego elementami są formalne sumy $\sum_{i\in I} a_i g_i$, gdzie $a_i \in \mathbb{Z}$ i $a_i = 0$ dla prawie wszystkich i. Działania określone są następująco:

$$\sum_{i\in I} a_i g_i + \sum_{i\in I} b_i g_i = \sum_{i\in I} (a_i + b_i) g_i$$

$$\sum_{i\in I} a_i g_i * \sum_{j\in I} b_j g_j = \sum_{i,j\in I} a_i b_j g_i g_j$$

Rozpatrzmy $(C_*(\tilde{X}), \partial_*)$ – kompleks łańcuchowy $\tilde{X}$. Działanie G na $\tilde{X}$ definiuje na $C_n(\tilde{X})$ strukturę $\mathbb{Z}(G)$-modułu dla każdego $n \geq 0$ i homomorfizmy brzegu są homomorfizmami modułów. Ponieważ $H_0(\tilde{X}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, więc istnieje epimorfizm $C_0(\tilde{X}) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$, na który możemy patrzeć jak na homomorfizm $\mathbb{Z}(G)$-modułów, przy czym $\mathbb{Z}$ jest modułem trywialnym, tj. takim, że dla każdego $g_i \in \mathbb{Z}(G)$ i każdego $k \in \mathbb{Z}$, jest $g_i k = k$. Mamy ciąg:

$$\ldots \xrightarrow{\partial_3} C_(\tilde{X}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_2} C_1(\tilde{X}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_1} C_0(\tilde{X}, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Jakie są jego własności?

- ($*$) powyższy ciąg jest ciągiem dokładnym $\mathbb{Z}(G)$-modułów (to znaczy takim, że jądro każdego homomorfizmu jest równe obrazowi poprzedniego), gdyż $\tilde{X}$ jest wielościanem ściągalnym,
- ($**$) dla każdego $n \geq 0$, $C_n(\tilde{X})$ jest wolnym $\mathbb{Z}(G)$-modułem, bo działanie G na $\tilde{X}$ jest wolne.

Ciąg o powyższych własnościach nazywamy wolną rezolwentą trywialnego $\mathbb{Z}(G)$-modułu $\mathbb{Z}$.

Do obliczania homologii grupy potrzebny jest nam jednak kompleks łańcuchowy $(C_*(X), \partial_*)$ a nie $(C_*(\tilde{X}), \partial_*)$. Jak algebraicznie, nie odwołując się do topologii, „podzielić $(C_*(\tilde{X}), \partial_*)$ przez działanie grupy G"?

Stwierdzenie 13. *Dla każdego $n \geq 0$, zachodzi $C_n(X) = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}(G)} C_n(\tilde{X})$.*

Zauważmy, że tensorowanie nad $\mathbb{Z}(G)$ przez trywialny moduł $\mathbb{Z}$ nie zachowuje dokładności ciągu!

Przykład 13. Rozpatrzmy wolną rezolwentę otrzymaną jako kompleks łańcuchowy nakrycia kanonicznego wielościanu grupy G. Oznaczamy ją przez $\bar{C}(G)$ i nazywamy *bar-rezolwentą* grupy G. Wygląda ona następująco: $\bar{C}_n(G)$ jest jest wolną grupą abelową generowaną przez wszystkie ciągi $\{(g_0, g_1, \ldots, g_n); g_i \in G\}$, a $\partial_n(g_0, g_1, \ldots, g_n) =$ $= \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i (g_0, \ldots, \hat{g}_i, g_{i+1}, \ldots, g_n)$. Struktura $\mathbb{Z}(G)$-modułu na $\bar{C}_n(G)$ jest zadana przez $g(g_0, g_1, \ldots, g_n) = (gg_0, gg_1, \ldots, gg_n)$. Łatwo sprawdzić, że istotnie $C_n(G) = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}(G)} \bar{C}_n(G)$. □

Stwierdzenie 13 sugeruje ogólniejszą algebraiczną „receptę" obliczania homologii o współczynnikach całkowitych grupy dyskretnej G, niż ta sformułowana w Definicji 10. Należy wziąć dowolną wolną rezolwentę (C_*, ∂_*) trywialnego $\mathbb{Z}(G)$-modułu $\mathbb{Z}$. Grupy homologii kompleksu łańcuchowego $\{\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}(G)} C_n\}$ powinny być równe grupom homologii G o współczynnikach całkowitych. Łatwo uogólnić tę „receptę" tak, by otrzymać homologie o dowolnych współczynnikach.

Definicja 14. Niech B będzie prawym $\mathbb{Z}(G)$-modułem. Wówczas homologiami G o współczynnikach w module B nazywamy homologie kompleksu łańcuchowego $\{B \otimes_{\mathbb{Z}(G)} C_*\}$,

$$H_n(G, B) = H_n(B \otimes_{\mathbb{Z}(G)} C_*), n \geq 0.$$

Korzystając z wolnej rezolwenty trywialnego $\mathbb{Z}(G)$-modułu $\mathbb{Z}$ definiuje się także grupy kohomologii. Przez $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}(G)}(C, A)$ oznaczamy grupę homomorfizmów lewych $\mathbb{Z}(G)$-modułów. Zauważmy, że jeżeli (C_*, ∂_*) jest kompleksem łańcuchowym $\mathbb{Z}(G)$-modułów, to w oczywisty sposób $(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}(G)}(C_*, A), \partial^*)$ jest kompleksem kołańcuchowym.

Definicja 15. Niech A będzie lewym $\mathbb{Z}(G)$-modułem. Grupami kohomologii o współczynnikach w A nazywamy grupy kohomologii kompleksu kołańcuchowego $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}(G)}(C_*, A)$:

$$H^n(G, A) = H^n(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}(G)}(C_*, A), \partial^*).$$

Zauważmy, że nietrudno przekonać się, że $H^0(G, A) = A^G$ jest podmodułem punktów stałych działania G na A. Interesująca i ważna jest interpretacja grupy $H^2(G, A)$ – jej elementy są we wzajemnie jednoznacznej odpowiedniości z klasami izomorfizmu rozszerzeń G', $0 \longrightarrow A \longrightarrow G' \longrightarrow G \longrightarrow 0$ przy zadanej strukturze A jako G-modułu.

Przedstawiliśmy powyżej czysto algebraiczną definicję homologii i kohomologii grupy. Nie jest jednak wcale jasne, czy definicja ta jest poprawna – potrzebny jest bowiem algebraiczny odpowiednik twierdzenia Hurewicza, czyli niezależność homologii od wyboru rezolwenty. Zrozumienie tej niezależności doprowadziło Samuela Eilenberga i Henri Cartana do stworzenia ogólnej teorii funktorów pochodnych, którą przedstawili w monografii *Homological Algebra*. Teoria ta unifikowała dotychczasowe przykłady homologii i kohomologii w algebrze. Była też na tyle ogólna, że stała się podstawą dalszego rozwoju i zastosowań algebry homologicznej. Do dziś książka ta jest „biblią" przedmiotu – zresztą termin „algebra homologiczna" został w niej użyty po raz pierwszy.

Funktory pochodne

Niech R będzie pierścieniem z 1. Będziemy rozpatrywać lewe R-moduły i ich homomorfizmy. Załóżmy, że mamy dokładny ciąg R-modułów:

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0.$$

Wówczas dla każdego R-modułu P dokładny jest ciąg grup abelowych:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P, M') \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P, M'').$$

Nie zawsze natomiast zachowywana jest jest dokładność na ostatnim miejscu, to znaczy nie zawsze $\mathrm{Hom}_R(P, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P, M'')$ jest epimorfizmem.

Definicja 17. R-moduł P nazywa się projektywny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu dokładnego modułów $M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$, dokładny jest ciąg $\mathrm{Hom}_R(P, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P, M'') \longrightarrow 0$.

Przykład 18. Każdy moduł wolny jest projektywny.

Dowód. Niech $\{a_i\}_{i \in I}$ będzie zbiorem wolnych generatorów modułu wolnego P. Niech $f\colon M \longrightarrow M''$ będzie epimorfizmem, zaś $g\colon P \longrightarrow M''$ dowolnym homomorfizmem modułów. Definiujemy $h\colon P \longrightarrow M$ określając go na generatorach, $h(a_i) = m_i$, gdzie $m_i \in f^{-1}(g(a_i))$. Ponieważ w zbiorze generatorów $\{a_i\}_{i \in I}$ nie ma żadnych relacji, więc homomorfizm h jest dobrze zdefiniowany. □

Kompleksy łańcuchowe R-modułów projektywnych mają następującą ważną własność, która zresztą ma swój topologiczny odpowiednik w postaci twierdzenia Whiteheada.

Twierdzenie 19. *Przekształcenie łańcuchowe ograniczonych z dołu kompleksów łańcuchowych modułów projektywnych, które indukuje izomorfizm grup homologii, jest łańcuchową homotopijną równoważnością.*

Wprowadzamy definicję motywowaną rozważaniami na temat homologii grupy dyskretnej.

Definicja 20. Rezolwentą projektywną R-modułu M nazywamy ciąg dokładny:

$$\longrightarrow P_n \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \ldots \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon_0} M \longrightarrow 0,$$

taki, że dla każdego $i \geq 0$, P_i jest R-modułem projektywnym.

Uzasadnienie wprowadzenia takiej definicji jest następujące: zamiast modułu M będziemy rozpatrywać ciąg dokładny modułów projektywnych, który jest jego rezolwentą, uważając że to on go opisuje. Rozważmy przykład, w którym ten punkt widzenia, jak się okaże kluczowy dla algebry homologicznej, jest zupełnie naturalny. Przykład ten był rozpatrywany przez Hilberta:

Przykład 21. Elementarnym faktem jest, że zbiór rozwiązań układu równań liniowych $\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j = 0$, $i = 0, \ldots, n$, $a_{ij} \in K$, gdzie K jest ciałem, jest podprzestrzenią liniową K^m i jako taka ma bazę. Hilbert rozpatrywał analogiczny układ równań, ale o współczynnikach w pierścieniu wielomianów, to jest $a_{ij} \in K[t_1, \ldots, t_r]$. Wówczas każde rozwiązanie jest wprawdzie kombinacją skończonej liczby rozwiązań, ale bazy rozwiązań na ogół nie ma. W języku modułów oznacza to, że moduł M rozwiązań układu jest skończenie generowany, ale nie jest wolny. Hilbert rozpatrywał więc następujący dokładny ciąg modułów nad $K[t_1, \ldots, t_r]$:

$$\ldots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

gdzie P_0 jest modułem wolnym generowanym przez rozwiązania, P_1 jest modułem wolnym generującym relacje między rozwiązaniami, który Hilbert nazywał modułem pierwszych syzygii itd. Hilbert udowodnił, że w ten sposób konstruowany ciąg modułów zawsze będzie skończony i będzie miał co najwyżej $r + 1$ niezerowych elementów. Zatem w naszym języku można powiedzieć, że zamiast modułu rozwiązań M rozpatrywał jego wolną rezolwentę, a twierdzenie Hilberta mówi, że każda taka rezolwenta jest skończona i ma co najwyżej $r + 1$ niezerowych elementów. □

Gdy zastąpimy moduł M jego projektywną rezolwentą, naturalne stanie się pytanie, jaki jest związek między dwoma projektywnymi rezolwentami tego samego modułu.

Twierdzenie 22. *Jeżeli (P_*, ∂_*) i (Q_*, ∂_*) są projektywnymi rezolwentami modułu M, to istnieje przekształcenie łańcuchowe $(P_*, \partial_*) \longrightarrow (Q_*, \partial_*)$ będące łańcuchową homotopijną równoważnością.*

Dowód. Rozpatrzmy diagram:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\ldots & \xrightarrow{\partial_2} & Q_1 & \xrightarrow{\partial_1} & Q_0 & \xrightarrow{\epsilon_0} & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle f_1} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f_0} & & \Big\| & & \\
\ldots & \xrightarrow{\partial_2} & Q_1 & \xrightarrow{\partial_1} & Q_0 & \xrightarrow{\epsilon_0} & M & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Ponieważ Q_0 jest modułem projektywnym, to istnieje homomorfizm $f_0 \colon Q_0 \longrightarrow P_0$, taki że $\epsilon_0 f_0 = \epsilon_0$. Dalej korzystając z projektywności Q_1 konstruujemy homomorfizm $Q_1 \longrightarrow P_1$ i tak dalej. Dostajemy w rezultacie przekształcenie łańcuchowe $(f_*) \colon (P_*, \partial_*) \longrightarrow (Q_*, \partial_*)$ kompleksów łańcuchowych, w których przyjmujemy, że $\partial_0 = 0$. Zauważmy, że przekształcenie to indukuje izomorfizm grup homologii, gdyż $H_0((P_*, \partial_*)) = H_0((Q_*, \partial_*)) = M$, a dla $i \neq 0$, $H_i((P_*, \partial_*)) = H_i((Q_*, \partial_*)) = 0$. Z twierdzenia 19 wynika więc, że skonstruowane przekształcenie łańcuchowe jest łańcuchową homotopijną równoważnością. □

Podobnie jak wyżej, wykazujemy, że homomorfizmy modułów można zastąpić homomorfizmem łańcuchowym ich rezolwent projektywnych.

Twierdzenie 23. *Jeżeli $f \colon M \longrightarrow M'$ jest homomorfizmem modułów, (P_*, ∂_*) i (Q_*, ∂_*) zaś są projektywnymi rezolwentami M i M' odpowiednio, to istnieje przekształcenie łańcuchowe $(f_*) \colon (P_*, \partial_*) \longrightarrow (Q_*, \partial_*)$, dla którego diagram*

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\ldots & \xrightarrow{\partial_2} & Q_1 & \xrightarrow{\partial_1} & Q_0 & \xrightarrow{\epsilon_0} & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle f_1}\downarrow & & {\scriptstyle f_0}\downarrow & & {\scriptstyle f}\downarrow & & \\
\ldots & \xrightarrow{\partial_2} & Q_1 & \xrightarrow{\partial_1} & Q_0 & \xrightarrow{\epsilon_0} & M' & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

jest przemienny i, co więcej, przekształcenie (f_*) jest jednoznacznie zdefiniowane z dokładnością do homotopii łańcuchowej.

Powyższe fakty tłumaczą także, dlaczego w naszych rozważaniach nie ograniczamy się do wolnych rezolwent, a rozpatrujemy rezolwenty projektywne – po prostu wszystkie własności potrzebne do tego, by dowolny moduł zastąpić jego rezolwentą są spełnione przez klasę modułów szerszą niż moduły wolne.

Wprowadzimy teraz ważne pojęcie funktora. Załóżmy, że dane jest przyporządkowanie F, które każdemu modułowi M przypisuje grupę abelową $F(M)$ oraz każdemu homomorfizmowi modułów $f\colon M \longrightarrow N$ homomorfizm grup abelowych $F(f)\colon F(M) \longrightarrow F(N)$, w taki sposób, że $F(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_{F(M)}$ oraz $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$. Przyporządkowanie takie nazywamy funktorem. Będziemy dodatkowo zakładać addytywność F, co oznacza, że dla dowolnych dwóch homomorfizmów modułów $f, g\colon M \longrightarrow N$ zachodzi $F(f+g) = F(f) + F(g)$. Rozpatrywaliśmy już dwa przykłady funktorów addytywnych – funktor mnożenia tensorowego przez ustalony moduł i funktor homomorfizmów w ustalony moduł.

Niech F będzie funktorem addytywnym, M zaś dowolnym modułem. Zgodnie z naszą filozofią rozpatrzmy dowolną rezolwentę projektywną (P_*, ∂_*) modułu M i zastosujmy do niej funktor F. Dostajemy kompleks łańcuchowy:

$$\ldots \xrightarrow{F(\partial_2)} F(P_1) \xrightarrow{F(\partial_1)} F(P_0) \xrightarrow{F(\epsilon_0)} F(M) \longrightarrow 0.$$

Jeżeli funktor F przeprowadzał ciągi dokładne na dokładne, to homologie kompleksu łańcuchowego

$$\ldots \xrightarrow{F(\partial_2)} F(P_1) \xrightarrow{F(\partial_1)} F(P_0) \longrightarrow 0$$

są równe $F(M)$ w wymiarze 0 i zerowe w wyższych wymiarach. Wiele ważnych funktorów nie jest dokładnych (na przykład wymienione wyżej funktor homomorfizmów i funktor mnożenia tensorowego). Wówczas grupy homologii kompleksu łańcuchowego $(F(P_*), F(\partial_*))$ zerowe nie są. Zauważmy, że addytywność funktora F gwarantuje nam, że obrazem przy F kompleksów łańcuchowo homotopijnie równoważnych są kompleksy łańcuchowo homotopijnie równoważne, a zatem grupy homologii $(F(P_*), F(\partial_*))$ nie zależą od wyboru rezolwenty projektywnej (P_*, ∂_*), a jedynie od modułu M i funktora F.

Definicja 24. Lewym n-tym funktorem pochodnym funktora F nazywamy funktor:

$$L_n F(M) = H_n((F(P_*), F(\partial_*))),$$

gdzie (P_*, ∂_*) jest dowolną projektywną rezolwentą M.

Związek funktorów pochodnych z wyjściowym funktorem wyjaśnia następujące stwierdzenie.

Stwierdzenie 25. Jeżeli funktor F jest prawodokładny, to znaczy każdy dokładny ciąg modułów $M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ przeprowadza na ciąg dokładny $F(M') \longrightarrow F(M) \longrightarrow F(M'') \longrightarrow 0$, to

$$L_0 F(M) = H_0((F(P_*), F(\partial_*))) = F(M).$$

Dowód. Jeżeli (P_*, ∂_*) jest rezolwentą projektywną, to ciąg $P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow$ $\longrightarrow M \longrightarrow 0$ jest dokładny. Ponieważ funktor F jest prawodokładny, to ciąg grup abelowych $F(P_1) \longrightarrow F(P_0) \longrightarrow F(M) \longrightarrow 0$ jest dokładny, czyli $F(M) \cong F(P_0)/\operatorname{im} F(P_1) = H_0((F(P_*), F(\partial_*)))$. □

W świetle powyższego stwierdzenia na ciąg funktorów pochodnych funktora prawodokładnego możemy patrzeć jak na jego rozwinięcie.

Przykładem prawodokładnego funktora jest $F(M) = N \otimes_R M$. Jego funktory pochodne oznacza się $\mathrm{Tor}_n^R(N, M)$ i nazywa n-tym produktem torsyjnym.

Jeżeli G jest grupą dyskretną, B zaś prawym $\mathbb{Z}(G)$-modułem, to w terminologii funktorów pochodnych

$$H_n(G, B) = \mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}(G)}(B, \mathbb{Z}).$$

Jasne jest więc, że w definicji homologii grupy można brać rezolwenty projektywne, a nie tylko wolne, trywialnego $\mathbb{Z}(G)$-modułu $\mathbb{Z}$ oraz, że definicja nie zależy od wyboru rezolwenty, czyli otrzymaliśmy szukany algebraiczny odpowiednik twierdzenia Hurewicza.

Gdy rozpatrywany funktor nie jest prawodokładny, lecz lewodokładny tj. każdy ciąg dokładny modułów $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M''$ przeprowadza na ciąg dokładny grup abelowych $0 \longrightarrow F(M') \longrightarrow F(M) \longrightarrow F(M'')$, to chcąc uzyskać ciąg funktorów pochodnych rozwijający F, należy wszystko, co zostało powiedziane dla funktorów prawodokładnych, „odbić w lustrze" odwracając kierunki strzałek. Pojęcie modułu projektywnego należy więc zastąpić dualnym pojęciem modułu injektywnego.

Definicja 26. R-moduł I nazywa się injektywny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu dokładnego modułów $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M$, dokładny jest ciąg grup abelowych $\mathrm{Hom}_R(M, I) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M', I) \longrightarrow 0$.

Zamiast kompleksu łańcuchowego będącego rezolwentą projektywną należy rozpatrywać kompleks kołańcuchowy stanowiący rezolwentę injektywną. Własności przysługujące rezolwentom projektywnym, które pozwoliły na zdefiniowanie funktorów pochodnych (Twierdzenia 19, 22, 23), są prawdziwe dla rezolwent injektywnych i ich dowody są „lustrzanym odbiciem" poprzednich. Analogicznie jak poprzednio definiujemy funktory pochodne, jako odpowiednie grupy kohomologii:

Definicja 27. Prawym n-tym funktorem pochodnym funktora F nazywamy funktor:

$$R^n F(M) = H^n((F(I_*), F(\partial_*))),$$

gdzie (I_*, ∂_*) jest dowolną injektywną rezolwentą M.

Analogicznie jak poprzednio dowodzimy

Stwierdzenie 28. *Jeżeli funktor F jest lewodokładny, to*

$$R^0 F(M) = H^0((F(I_*), F(\partial_*))) = F(M).$$

Ważnym funktorem lewodokładnym jest $F(M) = \mathrm{Hom}_R(N, M)$. Jego funktory pochodne oznaczamy przez $\mathrm{Ext}_R^n(N, M)$. Dowodzi się, że dla grupy dyskretnej G,

$$H^n(G, A) = \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}(G)}(\mathbb{Z}, A)$$

Są to funktory pochodne funktora punktów stałych $F(A) = A^G$.

Wspomniane tu jedynie homologie i kohomologie Hochschilda algebr łącznych oraz kohomologie algebr Liego także podpadają pod ten schemat.

Punkt widzenia Cartana i Eilenberga okazał się niezwykle płodny. Nie tylko podawał jednolitą konstrukcję znanych wówczas w algebrze teorii homologii i kohomologii, ale też dostarczał metody na konstruowanie nowych i znakomicie nadawał się do uogólnień. Jeżeli popatrzymy na występujące definicje widzimy, że można je odnieść niekoniecznie do modułów nad ustalonym pierścieniem. Musimy tylko móc mówić o jądrach i obrazach rozpatrywanych przekształceń, móc w zbiorze przekształceń między dwoma obiektami wprowadzić operację dodawania, tak by otrzymać grupę abelową. Te założenia są wystarczające, by mówić o projektywnych i injektywnych rezolwentach funktorów addytywnych o wartościach w grupach abelowych, a więc także o ich prawych ewentualnie lewych funktorach pochodnych. Taki punkt widzenia przyjął Aleksander Grothendieck pisząc *Sur quelques points d'algebre homologique*, Tohoku Math. J. 1947 oraz *Fondaments de la géometrie algébrique*, sem. Bourbaki, 1962.

Pracami tymi zrewolucjonizował geometrię algebraiczną. Grothendieck rozpatrywał przestrzenie topologiczne wraz ze snopem grup abelowych określonym na nich. Snop można sobie wyobrażać, jako przypisanie każdemu punktowi przestrzeni pewnej grupy abelowej i to w ciągły sposób zależnej od punktu. Ścisła definicja jest następująca:

Definicja 29 (J. Leray). Niech X będzie przestrzenią topologiczną. Snopem $\mathcal{F}$ grup abelowych na X nazywamy przyporządkowanie każdemu otwartemu podzbiorowi U przestrzeni X grupy abelowej $\mathcal{F}(U)$, tak że:

(1) każdej parze $V \subseteq U$ odpowiada homomorfizm $i_{UV}: \mathcal{F}(V) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$,
(2) $i_{UU} = \mathrm{id}$,
(3) $i_{WV} i_{UW} = i_{UV}$,
(4) dla każdego pokrycia otwartego $U = \bigcup_{j \in J} U_j$ i dowolnej zgodnej rodziny $s_j \in \mathcal{F}(U_j)$, tj. takiej że $i_{U_i U_i \cap U_j}(s_i) = i_{U_j U_i \cap U_j}(s_j)$, dla dowolnych $i, j \in I$, istnieje dokładnie jeden element $s \in \mathcal{F}(U)$, taki, że $i_{UU_j}(s) = s_j$ dla każdego $j \in I$.

Morfizmem snopów $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ na przestrzeni X nazywamy rodzinę homomorfizmów $f_U: \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$, dla której $i_{UV} f_U = f_V i_{UV}$.
Przekrojem snopa $\mathcal{F}$ nazywamy element $\mathcal{F}(X)$.

Snopy nad ustaloną przestrzenią X i ich morfizmy spełniają wymienione wyżej warunki. Funktor przypisujący snopowi $\mathcal{F}$ grupę jego przekrojów jest lewodokładny. Tak więc możemy mówić o funktorach pochodnych tego funktora. Nazywamy je grupami kohomologii X o współczynnikach w snopie $\mathcal{F}$ i oznaczamy $H^n(X, \mathcal{F})$.

Przykład 30. Niech M będzie gładką rozmaitością. Rozpatrzmy na niej snop stały $\mathbb{R}$, to jest $\mathcal{F}(U) = \mathbb{R}$ dla każdego otwartego U oraz $i_{UU} = \mathrm{id}$. Jeżeli $\mathcal{F}^n$ będzie snopem kiełków form różniczkowych stopnia n na M, a $d: \mathcal{F}^n \longrightarrow \mathcal{F}^{n+1}$ morfizmem snopów wyznaczonym przez różniczkę zewnętrzną, to można sprawdzić, że $\mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{F}^0 \longrightarrow \mathcal{F}^1 \longrightarrow \ldots$ jest injektywną rezolwentą snopa stałego $\mathbb{R}$. Przekroje snopa $\mathcal{F}^n$ to formy różniczkowe stopnia n na M, tak więc kohomologie rozmaitości M o współczynnikach w snopie stałym $\mathbb{R}$ to nic innego jak wspominane wcześniej kohomologie de Rhama rozmaitości. □

Teoria Grothendiecka pozwoliła określić na danej rozmaitości algebraicznej z zadaną topologią różne snopy, każdej takiej parze przypisując odpowiednie grupy kohomologii. Uzyskane tą drogą niezmienniki pozwoliły na udowodnienie wielu starych hipotez i otworzyły przed geometria algebraiczną nowe kierunki rozwoju.

Na zakończenie tego artykułu należy wspomnieć o sytuacji algebry homologicznej pod koniec XX wieku. Tak jak wspomniałam we wstępie, na stałe weszła ona jako narzędzie badań niemal do wszystkich działów matematyki. Sama algebra homologiczna także rozwija się. Chodzi o to, by rozszerzyć pojęcie funktora pochodnego na takie sytuacje, w których nie możemy mówić o jądrze homomorfizmu i ciągach dokładnych i te pojęcia trzeba zastąpić czymś ogólniejszym. Teoria taka została stworzona przez D. Quillena i nazywa się zamkniętą kategorią modeli. O jednym z jej ważnych zastosowań w geometrii algebraicznej mówił na ostatnim kongresie w Berlinie V. Voevodski. Wszystko więc wskazuje na to, że znaczenie algebry homologicznej w matematyce XXI wieku nie będzie mniejsze od roli, jaką odegrała ona w wieku przemijającym.