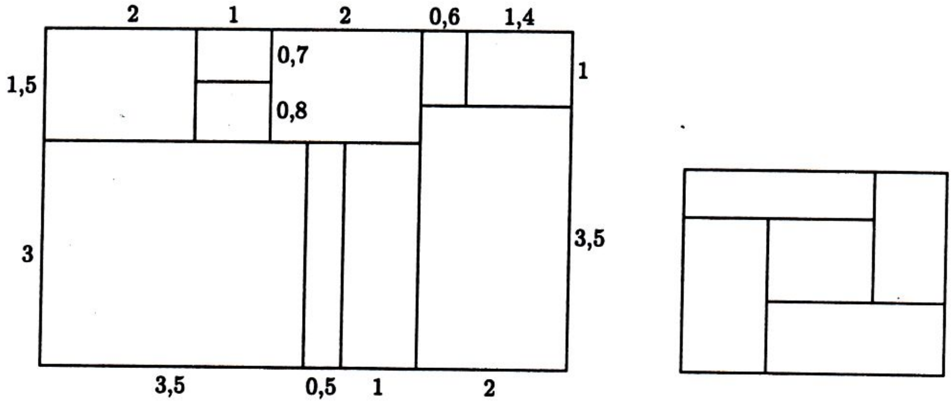
Jest to skrót drugiej części odczytu z XXI Szkoły Matematyki Poglądowej, *Zdarzyło się w XX wieku*.
Red.

Jest takie zadanie...

Krzysztof CIESIELSKI, Kraków

Zadanie, o którym będzie mowa, brzmi:

Prostokąt P dzielimy na skończenie wiele mniejszych prostokątów $P_1, \ldots, P_n$ o wnętrzach parami rozłącznych, tak, że boki prostokątów podziału są równoległe do boków prostokąta P. Wykazać, że jeśli każdy z prostokątów $P_1, \ldots, P_n$ ma bok o długości całkowitej, to również prostokąt P ma bok o długości całkowitej.



Rys. 1

Zadanie jest z rodzaju takich, które „tygrysy lubią najbardziej". Ma bardzo proste i elementarne sformułowanie, zrozumiałe nawet dla uczniów szkół podstawowych, a rozwiązać je wcale nie jest tak łatwo...

Skąd wiadomo, że zadanie nie jest proste? Tu się pojawia kłopot, „klasyczny" przy pisaniu o takich problemach. Dopiero po samodzielnej próbie zmierzenia się z zadaniem można w pełni docenić jego smak. Gdy od razu poznajemy rozwiązanie, nie raz i nie dwa mamy ochotę krzyknąć „Ależ to śmiesznie proste!" – tak, jak doktor Watson, gdy Sherlock Holmes objaśniał mu drogę swojego rozumowania. W zasadzie najlepiej byłoby redagować teksty o interesujących zadaniach w postaci powieści w odcinkach; w pierwszym odcinku zadanie, w drugim, po przerwie, rozwiązanie. A czasami można się spodziewać odcinków kolejnych... Tak będzie i w naszym przypadku, tyle, że – niestety – nie będzie odstępów w czasie; Czytelnik może je sobie zrobić we własnym zakresie.

Przejdźmy zatem do części drugiej – rozwiązania. Oto ono. Krótkie, ale czy proste?

Rozważmy na płaszczyźnie z wprowadzonym układem współrzędnych prostokąt Q o bokach równoległych do osi układu; niech $Q = [a, b] \times [c, d]$. Policzmy całkę podwójną po Q z funkcji $f(x, y) = e^{2\pi i(x+y)}$. Wykorzystując twierdzenie Fubiniego i podstawowe reguły całkowania mamy:

$$\iint\limits_Q e^{2\pi i(x+y)}dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d e^{2\pi ix} \cdot e^{2\pi iy} dy \right) dx = \int_a^b e^{2\pi ix} \left[\frac{1}{2\pi i} \cdot e^{2\pi iy} \Big|_c^d \right] dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \left(e^{2\pi id} - e^{2\pi ic} \right) \int_a^b e^{2\pi ix} dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \left(e^{2\pi id} - e^{2\pi ic} \right) \cdot \left[\frac{1}{2\pi i} e^{2\pi ix} \Big|_a^b \right] =$$

$$= \frac{1}{-4\pi^2} \cdot \left(e^{2\pi id} - e^{2\pi ic} \right) \cdot \left(e^{2\pi ib} - e^{2\pi ia} \right)$$

Zauważmy teraz, że badana całka równa się zero wtedy i tylko wtedy, gdy któryś z czynników otrzymanego iloczynu równa się zero, a więc wtedy i tylko wtedy, gdy $e^{2\pi i d} = e^{2\pi i c}$ lub $e^{2\pi i b} = e^{2\pi i a}$ czyli (na mocy znanego faktu, że funkcja $t \mapsto e^{it}$ jest okresowa o okresie zasadniczym 2π) wtedy i tylko wtedy, gdy $d - c \in \mathbb{Z}$ lub $b - a \in \mathbb{Z}$. To z kolei równoważne jest temu, że któryś z boków prostokąta Q ma długość całkowitą.

Teraz już jesteśmy o krok od rozwiązania. Skoro każdy z prostokątów P_i ma bok o długości całkowitej, to (na mocy powyższej własności) $\int\int_{P_i} e^{2\pi i(x+y)} dxdy = 0$.

Skorzystajmy z addytywności całki:

$$\int\int_P e^{2\pi i(x+y)} dxdy == \int\int_{\bigcup_{i=1}^n P_i} e^{2\pi i(x+y)} dxdy = \sum_{i=1}^n \int\int_{P_i} e^{2\pi i(x+y)} dxdy = 0$$

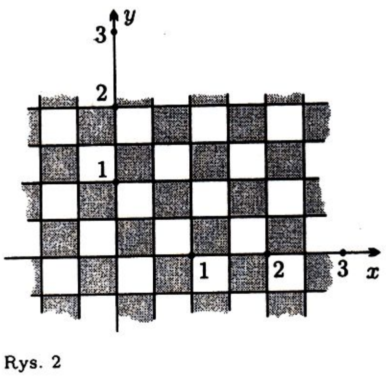
Wykorzystając ponownie wykazaną wyżej własność wnioskujemy, że prostokąt P ma bok o długości całkowitej. Koniec dowodu.

Sądzę, że bardzo wiele osób zgodzi się ze mną, że powyższe rozwiązanie nie jest pozbawione swoistego uroku. Jednak chyba każdemu nasunie się jakże naturalne pytanie: a czy tego nie da się zrobić prościej? Dowód, choć był krótki, wykorzystywał jednak wcale zaawansowane rezultaty matematyczne; podnosiliśmy liczby do potęgi zespolonej, całkowaliśmy funkcje zespolone, wykorzystana była addytywność całki, twierdzenie Fubiniego, związek całki oznaczonej z nieoznaczoną...

Na tym przykładzie widać, że nie zawsze podanie tematu zadania wraz z rozwiązaniem musi oznaczać koniec zabawy.

Wiem o trzech (co nie oznacza, że nie było ich więcej) poważnych, „twardych" matematycznych konferencjach (w różnych krajach), podczas których pokazano uczestnikom to zadanie – od razu z powyższym rozwiązaniem. Na wszystkich tych konferencjach zadanie wywołało gorące dyskusje; na żadnej nikomu nie udało się podczas konferencji znaleźć innego dowodu...

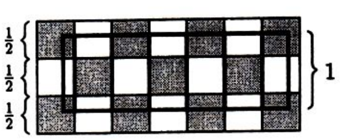
To, że nikomu się tam nie udało, nie oznacza, że nie można poradzić sobie z problemem bardziej elementarnie. Jak? Przechodzimy do części trzeciej.



Rys. 2

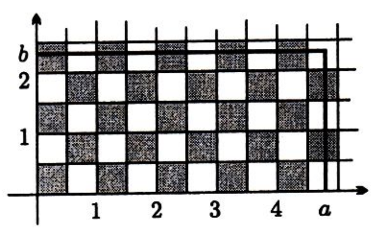
Ponownie wprowadźmy na płaszczyźnie układ współrzędnych. Na płaszczyźnie poprowadźmy proste równoległe do osi układu, odległe od siebie o $\frac{1}{2}$. Powstanie sieć kwadratów o bokach $\frac{1}{2}$. Pokolorujmy co drugi z tych kwadratów na czarno; otrzymamy „nieskończoną szachownicę" (rysunek). Załóżmy, że kwadrat $[0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{2}]$ jest pomalowany na czarno.

Rozważmy dowolny prostokąt o bokach równoległych do osi zawarty w pomalowanej płaszczyźnie. Pokażemy, że jeśli jeden z jego boków ma długość całkowitą, to przykryty przez ten prostokąt obszar pomalowany na czarno ma takie samo pole, jak przykryty przez prostokąt obszar nie pomalowany.



Rys. 3

Bez straty ogólności możemy przyjąć, że liczbą całkowitą jest wysokość prostokąta (czyli długość boku pionowego). Wystarczy wykazać równość „pola czarnego" i „pola białego" w przypadku prostokąta o wysokości 1 (odpowiednie pola można później dodać). Prostokąt o wysokości 1 podzielony jest prostymi pionowymi na pewną liczbę prostokątów o wysokości 1; podstawy ich wszystkich oprócz co najwyżej dwóch mają długości $\frac{1}{2}$. Oczywiście, każdy z tych małych prostokątów pokrywa czarny obszar o polu $\frac{p}{2}$ i biały obszar o polu $\frac{p}{2}$, gdzie p to długość podstawy odpowiedniego małego prostokąta; to kończy dowód interesującej nas własności.



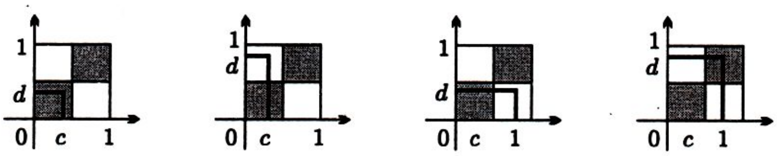
Rys. 4

Teraz możemy rozwiązać zadanie.

Połóżmy na płaszczyźnie prostokąt P tak, by jego boki były równoległe do osi i by lewy dolny wierzchołek pokrywał się z początkiem układu. Załóżmy, że podstawa prostokąta to a, wysokość zaś b.

Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że $a \notin \mathbb{Z}$ i $b \notin \mathbb{Z}$. Na mocy założenia i obserwacji uczynionej powyżej każdy z prostokątów P_i przykrywa obszary „biały" i „czarny" o takim samym polu. Stąd wynika, że także prostokąt P przykrywa taki sam obszar biały, jak i czarny. Odcinając od P kolejno prostokąty: $[a-1, a] \times [0, b]$; $[a-2, a-1] \times [0, b]$ i tak dalej nie zmieniamy tej własności; w każdym z odciętych prostokątów „pole białe" równe jest „polu czarnemu". Czynimy tak, dopóty nie zostanie nam prostokąt $[0, c] \times [0, b]$ gdzie $c \in (0, 1)$; będzie tak, gdyż a nie jest liczbą całkowitą. Teraz odcinamy kolejno „od góry" prostokąty $[0, c] \times [b-1, b]$; $[0, c] \times [b-2, b-1]$... W efekcie zostanie prostokąt $[0, c] \times [0, d]$, przy czym $c \in (0, 1)$ i $d \in (0, 1)$; przykryte przez ten prostokąt „pole białe" równe jest „polu czarnemu". Łatwo jednak zauważyć, że to się zdarzyć nie może!

Jeśli $c \leq \frac{1}{2}$ i $d \leq \frac{1}{2}$, to „pole białe" wynosi 0. Jeśli $c \leq \frac{1}{2}$ i $d \in (\frac{1}{2}, 1)$ to ewidentnie pole czarne jest od pola białego większe; gdy $c \in (\frac{1}{2}, 1)$ i $d \leq \frac{1}{2}$, sytuacja jest symetryczna. „Pole czarne" jest większe od białego również wtedy, gdy $c \in (\frac{1}{2}, 1)$ i $d \in (\frac{1}{2}, 1)$. Uzyskana sprzeczność kończy dowód.



Rys. 5

Zauważmy – a to bardzo ciekawe – że gdy wgłębimy się w matematykę ukrytą za tymi dwoma rozwiązaniami, to okaże się ona w zasadzie taka sama! Cóż bowiem zrobiliśmy za drugim razem? Oznaczmy przez C zbiór pomalowany na czarno, przez B zbiór pomalowany na biało, a przez $\mathbf{1}_X$ funkcję charakterystyczną zbioru X (to znaczy taką, która na zbiorze X przyjmuje wartość 1, zaś poza nim wartość 0). Porównując odpowiednie pola, po prostu liczyliśmy całkę z funkcji $f = \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_C$. Z tym, że w tym drugim przypadku można było przeprowadzić całe rozumowanie nie odwołując się do funkcji zespolonych, całek i twierdzenia Fubiniego.

Okazuje się – i jest to być może jeszcze ciekawsze – że metod rozwiązań tego zadania jest znacznie więcej. Ba, różne dowody wykorzystują rozmaite, czasem niesłychanie odległe, działy matematyki! Niektóre z nich pozwalają na uogólnienia, na przykład na wyższe wymiary. Przy okazji powstają kolejne problemy.

Podawanie tu wszystkich, które znam (wiem o szesnastu!) sposobów tego rozwiązania mijałoby się z celem; można je znaleźć w cytowanej literaturze. Nie wypada jednak skończyć na dwóch powyższych metodach. Poniżej przedstawiony zostanie (część czwarta) jeszcze jeden dowód, wykorzystujący pewne uogólnienie lematu Spernera.

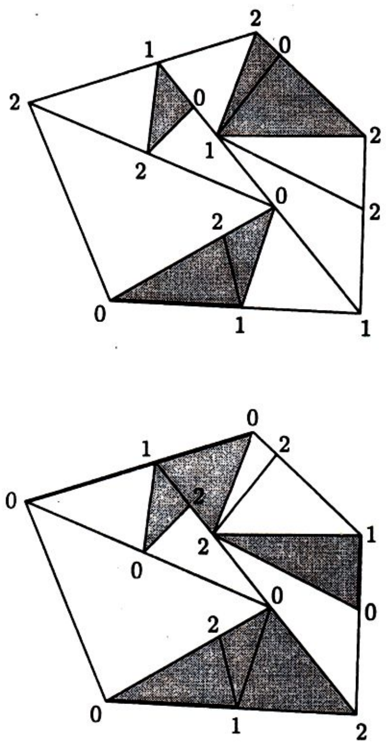
Zacznijmy od sformułowania tego uogólnienia.

Załóżmy, że wielokąt na płaszczyźnie dzielimy na skończoną liczbę trójkątów o parami rozłącznych wnętrzach. Wszystkie wierzchołki trójkątów ponumerujmy liczbami 0, 1 lub 2 tak, by spełniony był warunek:

(∗) *na dowolnym boku trójkąta podziału wszystkie wierzchołki podziału, które znajdują się na tym boku, są ponumerowane co najwyżej dwoma liczbami.*

Wówczas liczba trójkątów podziału ponumerowanych (0,1,2) jest nieparzysta wtedy i tylko wtedy, gdy liczba odcinków o końcach ponumerowanych (0,1) zawartych w brzegu wyjściowego wielokąta i nie zawierających wewnątrz żadnego wierzchołka podziału jest nieparzysta.

Osoby znające lemat Spernera łatwo zauważą, że jest on natychmiastowym wnioskiem z powyższego twierdzenia. Istotnie; w lemacie Spernera dzielimy trójkąt na małe trójkąty, ale podział ten ma być symplicjalny – to znaczy, jeśli



Rys. 6

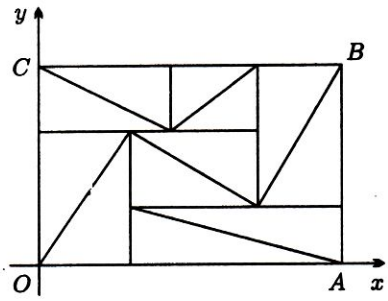
dwa trójkąty podziału nie są rozłączne, to ich część wspólna jest albo wspólnym wierzchołkiem, albo wspólnym bokiem obu trójkątów. Każdy zatem bok trójkąta podziału zawiera tylko dwa wierzchołki podziału – jego końce, wobec tego wierzchołki znajdujące się na tym boku są ponumerowane co najwyżej dwoma liczbami.

Zanim zobaczymy, jak przy pomocy powyższego twierdzenia rozwiązać zadanie o prostokącie, dwie uwagi.

Podobno pewien wybitny matematyk mawiał, że każde twierdzenie ma dowód i powód. Powyższe uogólnienie pokazuje, że powodem tezy lematu Spernera w przypadku dwuwymiarowym nie jest specyficzny wymóg podziału (triangulacja), ale pewne restrykcje przy numerowaniu wierzchołków, które przy podziale symplicjalnym są w banalny sposób spełnione. Uwaga druga. Twierdzenie to jest (niestety?) tylko dwuwymiarowe; analogiczne uogólnienie lematu Spernera już w przypadku wielościanu nie byłoby prawdziwe. To jest jednak temat na oddzielne opowiadanie.

Przejdźmy teraz do rozwiązania zadania. Tak, jak poprzednio, umieśćmy prostokąt P na płaszczyźnie; niech jego boki będą równoległe do osi, a lewy dolny wierzchołek pokryje się z punktem $O = (0, 0)$. Oznaczmy pozostałe wierzchołki prostokąta przez A, B i C; niech A należy do osi OX, a C należy do osi OY. Przypuśćmy, dla dowodu nie wprost, że odcięta punktu A i rzędna punktu C nie są liczbami całkowitymi.

W każdym z prostokątów P_i poprowadźmy przekątną (obojętne, którą). W ten sposób podzieliliśmy prostokąt P na trójkąty. Łatwo się domyślić, że teraz będziemy numerować wierzchołki. Jak?

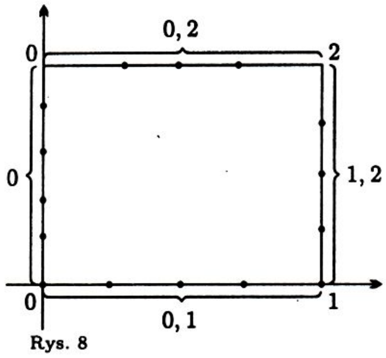


Rys. 7

Jeśli wierzchołek trójkąta podziału ma współrzędne (x, y), to przypisujemy mu liczbę 0, 1, lub 2 według następującej reguły:

0 – *jeśli x jest liczbą całkowitą,*
1 – *jeśli x nie jest liczbą całkowitą, ale y jest liczbą całkowitą,*
2 – *jeśli x nie jest liczbą całkowitą i y nie jest liczbą całkowitą.*

Zauważmy teraz, że – zgodnie z powyższą regułą:
- punkty O i C mają numer 0, punkt A ma numer 1, punkt B ma numer 2,
- wszystkie wierzchołki podziału znajdujące się na odcinku $\overline{OC}$ mają numer 0 (bo odcięte równe są 0),
- wszystkie wierzchołki podziału znajdujące się na odcinku $\overline{BC}$ mają numer 0 lub 2 (bo ich rzędne równe są rzędnej B, która nie jest całkowita),
- wszystkie wierzchołki podziału znajdujące się na odcinku $\overline{OA}$ mają numer 0 lub 1 (bo ich rzędne równe są 0),
- wszystkie wierzchołki podziału znajdujące się na odcinku $\overline{AB}$ mają numer 1 lub 2 (bo ich odcięte równe są odciętej A, która nie jest całkowita).



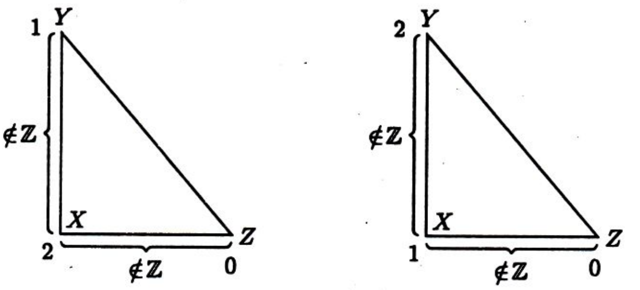
Rys. 8

Na brzegu prostokąta odcinki ponumerowane (0,1), bez punktów podziału w środku, znajdują się wyłącznie na odcinku $\overline{OA}$. Bardzo łatwo wykazać, że ich liczba jest nieparzysta (notabene jest to teza lematu Spernera w jednowymiarowym przypadku).

Pokażemy teraz, że wprowadzona numeracja spełnia warunek (∗). Rozważmy dowolny trójkąt podziału; jest to trójkąt prostokątny, przeciwprostokątna zawiera tylko dwa numerowane punkty – wierzchołki, więc spełnia odpowiedni warunek. Zbadajmy przyprostokątne. Każda z nich jest albo równoległa do osi rzędnych, albo do osi odciętych. W pierwszym przypadku odcięte wszystkich numerowanych punktów na pionowym odcinku są takie same, więc są tam albo same zera, albo wyłącznie jedynki i dwójki. W przypadku odcinka poziomego wszystkie numerowane punkty mają tę samą rzędną; jeśli jest ona liczbą całkowitą, to wśród numerów na odcinku nie ma dwójki, jeśli nie jest liczbą całkowitą, to wśród numerów na odcinku nie ma jedynki.

Możemy zatem zastosować zacytowane uogólnienie lematu Spernera. Wynika z niego, że wśród trójkątów podziału istnieje trójkąt o wierzchołkach (0,1,2). Ale to jest niemożliwe!

Niech tym trójkątem będzie trójkąt XYZ. Przyjmijmy, że odcinek $\overline{XY}$ jest pionowy, $\overline{XZ}$ poziomy; $\overline{YZ}$ to przeciwprostokątna. Punkty X i Y mają tę samą odciętą, zatem albo oba mają numer 0, albo żaden. Oba tego samego numeru mieć nie mogą, jeden z nich otrzymał zatem jedynkę, drugi dwójkę. Oznacza to, że rzędna jednego z tych punktów jest liczbą całkowitą, a drugiego nie, więc długość odcinka $\overline{XY}$ nie jest liczbą całkowitą. Punkt Z musi mieć jednak numer 0, więc jego odcięta jest liczbą całkowitą, ale odcięta punktu X nie jest całkowita (niezależnie od tego, czy ma numer 1, czy 2), więc i długość odcinka $\overline{XY}$ nie jest liczbą całkowitą. Trójkąt XYZ powstał jednak po podzieleniu przekątną prostokąta podziału, zatem przynajmniej jedna z jego przyprostokątnych ma długość całkowitą. Uzyskana sprzeczność kończy dowód.



Rys. 9

Na zakończenie parę uwag bibliograficznych. Tym, których zadanie zainteresowało, polecam przede wszystkim znakomity artykuł Stana Wagona [13], gdzie można przeczytać między innymi aż o czternastu rozwiązaniach zadania!

Nie wiem, kto pierwszy wymyślił rozwiązanie z szachownicą. Wagon podaje jako autorów Richarda Rochberga i Shermana K. Steina. Opisuje on jednak dowody znalezione w roku 1985 lub później, zaś interesujące nas zadanie znajduje się (w przypadku trójwymiarowym) m.in. w zbiorze [10] (zad. 16.25) z adnotacją, że pochodzi z jugosławiańskiej olimpiady matematycznej z roku 1979. Nie jest jednak zaskakujące, że na ten pomysł mogło wpaść niezależnie wiele osób; po opublikowaniu zadania w Delcie ([3]), wśród znalezionych później przez rozmaitych entuzjastów matematyki rozwiązań było i takie, podane niezależnie przez kilka osób.

Autorem pięknego dowodu z wykorzystaniem lematu Spernera jest James Schmerl ([13]). Problem jednak w tym, że Schmerl stosuje inne uogólnienie lematu Spernera, którego założenia w przypadku wprowadzonej przez niego powyższej numeracji wierzchołków mogą nie być spełnione. Otóż Schmerl wykorzystuje twierdzenie podane w [7]; tam w założeniach wprowadzony jest podział n-wymiarowego wielościanu na sympleksy, który również nie musi być symplicjalny, ale spełnia warunek następujący:

(**) *dowolna k-wymiarowa podprzestrzeń afiniczna, zawierająca wierzchołki ponumerowane $0, \ldots, k$ (taka, że wszystkie numery się tam pojawiają) nie zawiera żadnego z wierzchołków ponumerowanych $k+1, \ldots, n$.*

W naszym przypadku sprowadza się to do niemożliwości znalezienia się na jednej prostej wierzchołków o numerach 0, 1, 2. A to, niestety, może się zdarzyć na prostej ukośnej, zawierającej przekątne. Punkty 0, 1, 2 mogą złośliwie leżeć nawet na jednym odcinku, powstałym po sklejeniu dwóch przekątnych. Gdy jednak wykorzystamy uogólnienie lematu Spernera z warunkiem (*), wszystko jest już w porządku.

Okazało się, że tym zadaniem, odległym przecież od wyższej, zaawansowanej, chwilami tak abstrakcyjnej matematyki, zainteresowało się (i to czynnie!) wiele osób. Moim zdaniem, to bardzo dobrze. Uważam, że w tego rodzaju problemach i historiach z nimi związanymi tkwi niebagatelna część uroku matematyki.

Literatura

[1] N. G. de Bruijn, *Filling boxes with bricks*, American Mathematical Monthly 76(1969), 37–40.

[2] D. Ciesielska, K. Ciesielski, *O pewnym uogólnieniu lematu Spernera.*

[3] S. Cynk, *Łatwe czy trudne?*, Delta 1991 # 9 (208), (Epsilon), 17.

[4] B. Gaweł, *Elementarny dowód*, Delta 1992 # 1 (212), 7.

[5] P. Hajłasz, *A jednak elementarnie...*, Delta 1991 # 11 (210), 5.

[6] K. Kuratowski, *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, wyd. VII rozszerzone, PWN, Warszawa 1977.

[7] D. G. Mead, *Dissection of the hypercube into simplices*, Proceedings of the American Mathematical Society 76(1979), 302–304.

[8] J. Mioduszewski, *Wykłady z topologii*, Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, Katowice 1994.

[9] *Prostokąt...*, Delta 1992 # 8 (219), (Epsilon), 17.

[10] И. Н. Сергеев (red.), *Зарубежные математические олимпиады*, Наука, Москва 1987.

[11] A. Tyszka, *On combinatorial partitions of a box into boxes*, Journal of Natural Geometry 8(1995), 129–132.

[12] A. Tyszka, *On some combinatorial problems concerning partitions of a box*, Journal of Natural Geometry 5(1994), 1–9.

[13] S. Wagon, *Fourteen proofs of a result about tiling a rectangle*, American Mathematical Monthly 94(1987), 601–617.